P2) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1/2 & -1 \leq x \leq 0 \\ \alpha e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

a) Para encontrar α $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx + \alpha\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1 \Rightarrow \cancel{\alpha\int_0^\infty e^{-x}}dx = 1/2$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = 1/2}$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty x e^{-x}dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left\{ -x\cancel{e^{-x}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx \right\}$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}\{1\} = \boxed{+\frac{1}{4}}$$

b) $Y \sim U[-1,1] \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & y \in [-1,1] \\ 0 \end{cases}$

$\therefore$ Para x entre -1 y 0 $\Rightarrow$ $H(x) = y = x$ (identidad)
pues su fn. ya es $1/2$

Asumimos que $\exists$ H de forma que cumple las cond. del T.C.V
para $x \geq 0$

$x = H^{-1}(y)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dH^{-1}(x)}{dy} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} e^{-H^{-1}(y)} \left| \frac{dH^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-H^{-1}(y)} \left| \frac{dH^{-1}(y)}{dy} \right| = 1$$

ni sabemos si
es mayor que cero

2 casos $\frac{dH^{-1}(y)}{dy} < 0$ o $\frac{dH^{-1}}{dy} > 0$

- Supongamos que es positiva

$$\Rightarrow \quad e^{-H^{-1}(y)} \frac{dH^{-1}(y)}{dy} = 1 \Rightarrow \quad -e^{-H^{-1}(y)} = y$$

$$e^{-H^{-1}(y)} = -y$$

Notamos que no puede ser pues si $y \geq 0$ y $e^{-H^{-1}(y)} \geq 0$ siempre, entonces esta ec. no tiene sentido $\rightarrow\leftarrow$

- Ahora supongamos $\frac{dH^{-1}(y)}{dy} < 0$

$$\Rightarrow e^{-H^{-1}(y)} \cdot -\frac{dH^{-1}(y)}{dy} = 1$$

$$-e^{-H^{-1}(y)} = -y$$

$$e^{-H^{-1}(y)} = y \Rightarrow -H^{-1}(y) = \ln(y)$$

$$H^{-1}(y) = -\ln(y)$$

Entonces $x = H^{-1}(y) = -\ln(y) \Rightarrow \quad e^{-x} = y = H(x)$

Notamos que $x = 0 \Rightarrow y = 1$ y $x \to \infty \Rightarrow y \to 0$

Entonces $y \in [0, 1]$

$\Rightarrow$ Encontramos $H(x)$ tal que $y \sim U[-1,1]$

$$\Rightarrow H(x) = \begin{cases} x & x \in [-1, 0] \\ e^{-x} & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

3| Acá viene lo que no dice bien en el auxiliar y que es MUY IMPORTANTE

La utilidad es una función de T, entonces para sacar la esperanza PRIMERO hay que conocer como es esa función

Nos damos cuenta de que la utilidad depende de T pues si $T > H$ la maquina no sigue produciendo, esto es

$$U(T) = \begin{cases} (C_1 - C_2)T - C_3 H & 0 < T < H \\ (C_1 - C_2 - C_3) H & T > H \end{cases}$$

Aplicamos la prop. de esperanza de una función de una v. a

$$E(U) = \int U(T) f_T(T) \, dT$$

$$E(U) = \int_0^H ((C_1 - C_2)T - C_3 H) \beta e^{-\beta T} dT + \int_H^\infty (C_1 - C_2 - C_3) H \beta e^{-\beta T} dT$$

$$= \int_0^H (C_1 - C_2) T \beta e^{-\beta T} dT - \int_0^\infty C_3 H \beta e^{-\beta T} dT + \int_H^\infty (C_1 - C_2) H \beta e^{-\beta T} dT$$

$$= (C_1 - C_2) \left\{ \left[T \cdot -e^{-\beta T} \right]_0^H + \int_0^H e^{-\beta T} dT \right\} + C_3 H \left[e^{-\beta T} \right]_0^\infty$$

$$+ (C_1 - C_2) H \cdot \left[-e^{-\beta T} \right]_H^\infty$$

$$= -(C_1 - C_1) H e^{-\beta H} + (C_2 - C_1) \frac{1}{\beta} (e^{-\beta H} - 1) + C_3 H \cdot -1$$

$$\cancel{+ (C_1 - C_2) H e^{-\beta H}}$$

$$= (C_2 - C_1)(1 - e^{-\beta H}) + C_3 H$$

$$\frac{d\,\text{Ⓔ}(U)}{dH} = (C_2 - C_1)\left(\frac{\beta}{\beta} e^{-\beta H}\right) + C_3$$

$$e^{-\beta H} = \frac{\beta C_3}{\beta (C_2 - C_1)} \Rightarrow -\beta H = \ln\left(\frac{C_3}{C_2 - C_1}\right)$$

$$H = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{C_3}{C_2 - C_1}\right)$$