Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesores Auxiliares	:	Constanza Paredes
	:	Eduardo Zamora

Clase Auxiliar
10 de Septiembre de 2007

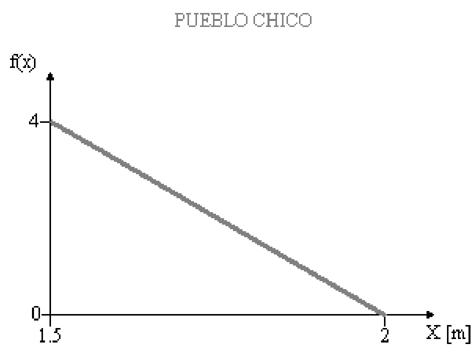
Resumen de fórmulas

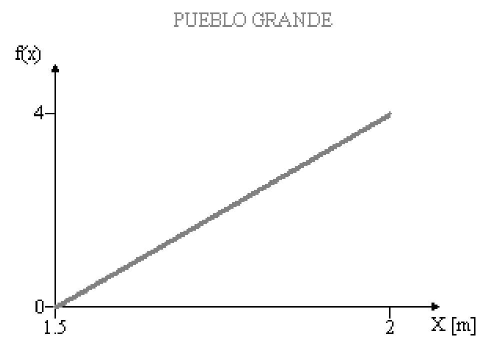
- $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$, $F(X) = \sum_{\{X_i|X_i \leq X\}} \mathbb{P}(X_i)$, $F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx = \mathbb{P}(x \leq X)$.
- $f(x) = \frac{\delta F(X)}{\delta X}$.
- $f_Y(y) = f_X(H^{-1})|\frac{\delta H^{-1}(y)}{\delta y}|$ con $Y = H(X)$.
- (X, Y) vector probabilidad, con densidad conjunta $f(x, y)$ si X e Y son v.a. y $f(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \quad \in \mathbb{R}^2$ y $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) = 1$.
- Sea (X, Y) vector probabilidad. $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$, $\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} F(x, y) = f(x, y)$.
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$. Si X e Y son independientes, $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
- $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.
- T.C.V: $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v) \cdot |det(J)|$ donde J es la matriz jacobiana del cambio de variables.
- Probabilidades Totales (caso continuo): $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A|Y = y) f_Y(y)dy$.
- Esperanza: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(X = i)$.
- $\mathbb{E}(C) = C$, $\mathbb{E}(CX) = C\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{N} X_i) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{E}(X_i)$.
- Exponencial: $X \rightarrow e(\lambda)$ si $f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x}$, $x > 0$.

Problemas

1. Dos pueblos vecinos con igual número de habitantes se reunen todos los años para festejar las fiestas patrias. La altura de un habitante de cada pueblo es una variable aleatoria X, cuya fdp se observa en la figura. Durante el holgorio, todas las personas están perfectamente mezcladas. Si se elige al azar a una persona, y se encuentra que su altura es 1.8 metros,

¿Cuál es la probabilidad de que esta persona viva en el pueblo grande?





2. Sea X v.a con función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \alpha e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Encuentre α para que la función anterior esté bien definida. Calcule $\mathbb{E}(X)$.

   b) Considere $Y = H(X)$. Encuentre $H(X)$ tal que Y se distribuya uniforme en el intervalo $(-1, 1)$.

3. Suponga que la duración T (en horas) de cierto tubo electrónico es una variable aleatoria con una distribución exponencial con parámetro β. Una máquina que usa este tubo cuesta C_1 pesos/hora para funcionar. Mientras la máquina está funcionando, se obtiene una utilidad de C_2 pesos/hora. Debe contratarse a un operador por un número $prefijado$ de horas H, y éste obtiene un pago de C_3 pesos/hora. ¿Para qué valor de H es mayor la *utilidad* esperada?

4. Sean X e Y v.a. independientes con las siguientes funciones de densidad:

$$f_x = 2x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_y = \frac{y^2}{9} \quad 0 \leq y \leq 3$$

   Usando T.C.V. encuentre la f.d.p. de la variable aleatoria $z = xy$