Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesores Auxiliares	:	Constanza Paredes
	:	Eduardo Zamora

Tarea 1

Entrega: Control 1

1. Tres personas llegan a un cine y se sientan todos en una misma fila de n asientos (todos vacíos), de forma aleatoria. Calcule:

   a) La probabilidad de que los tres queden contiguos.
   b) La probabilidad de que exactamente dos de ellos queden contiguos.
   c) La probabilidad de que ninguno de ellos quede contiguo a otro.

2. Considere un mazo de naipe inglés, sin comodines.

   a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:

      1) Que las 4 sean, rojas o pares.
      2) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.

   b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:

      1) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
      2) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.

3. Se disputa un torneo de tenis entre 2^n jugadores igualmente hábiles. Para programar la primera ronda, los pares de oponentes se determinan al azar y en cada una de las rondas sucesivas los pares de adversarios se forman al azar de entre los jugadores vencedores de la ronda anterior. Si A y B son dos jugadores que entraron al torneo:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se enfrenten en la k-ésima ronda?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que se enfrenten en el torneo?

4. Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa, cargando el revólver, cuya nuez tiene capacidad para 6 municiones, con una bala. Antes de iniciar el juego giran la nuez.

   a) Si se va disparando cada vez sin girar la nuez, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.

b) Si ahora, después de cada intento se vuelve a girar la nuez, Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza muera. Indique el espacio muestral.

c) Considere la modalidad de juego descrita en b, pero para un revólver con capacidad n y con b balas (b<n). Calcule la probabilidad de que el primer jugador muera. ¿ Existe alguna forma de que este juego sea justo?

5. Sean A, B y C subconjuntos del espacio muestral Ω. Pruebe que:

   a) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$

   b) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B^c \cap C^c)\mathbb{P}(B^c|C^c)\mathbb{P}(C^c)$

6. Suponga que una persona está situada a N cuadras al sur , y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual quiere llegar.

   a) ¿Cuántos caminos *inteligentes* existen entre ambos puntos? (Camino *inteligente* se entenderá por aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).

   b) Considere M=N. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadriculado; calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N.

   Nota: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadriculado, o sea, todo camino *inteligente* es susceptible de ser realizado.

7. *a*) Determine el número de igualdades que deben verificarse para probar que el conjunto $A_1 ... A_n$ es una familia de eventos independientes.

   b) Sea un conjunto S con n elementos del cual extraemos (con reposición) 2 subconjuntos A y B. Asuma que la extracción de cualquier subconjunto de S es igualmente probable. Calcule $\mathbb{P}(A \cup B =$S)

   .

8. La restricción vehicular reparte los 10 dígitos posibles (2 diarios) en forma aleatoria. Usted tiene dos autos cuyas patentes terminan en dígitos diferentes. Calcule:

   a) El total de formas en que puede programarse la restricción.

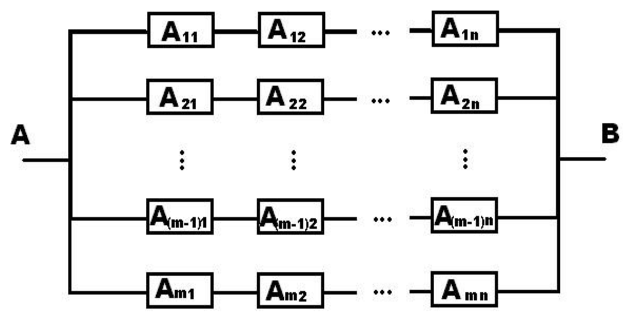
   b) La probabilidad de que algún día no pueda usar ninguno de sus vehículos. Indique el espacio muestral.

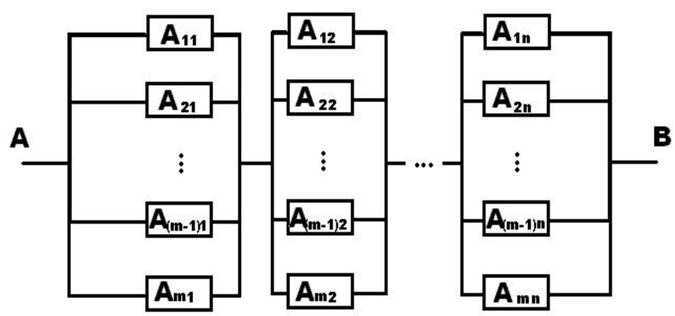
   c) Suponga ahora que con probabilidad p hay preemergencia en un día cualquiera, y en esos días se debe agregar 2 dígitos extra, que cada día que hay preemergencia se eligen de forma aleatoria entre los dígitos que quedan libres. Calcule la probabilidad de no poder usar sus autos en toda la semana (lunes a viernes).

9. Para una elección con candidatos A, B y C, se decide realizar una encuesta que arroja los siguientes resultados: $100X_A\,\%$ para A, $100X_B\,\%$ para B y $100X_C\,\%$ para C (no existen encuestan en blanco ni nulas). Sin embargo, se sabe que con probabilidad p_{xy} una persona que respondió X en la encuesta terminará votando por el candidato Y. Calcule la probabilidad de que alguien que votó por A en la elección final haya respondido C en la encuesta.

10. Se tiene un grupo de 2N bolas: N bolas blancas y N bolas negras. En una urna se echan N bolas seleccionadas de entre las 2N bolas, en forma aleatoria, y se saca una bola de la urna. Calcule la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna. (Puede serle útil calcular de manera análoga la probabilidad de sacar una bola negra para evaluar su resultado). Calcule la probabilidad de que hubiesen k bolas blancas en la urna dado que se extrajo una bola blanca.

11. Considere los circuitos:





Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar ($(1-p)$ de fallar) y lo hacen en forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

12. Para predecir el tiempo un da es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p.

a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β muestre que la probabilidad que el n-ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = [(\beta - \tfrac{1}{2})(2p-1)^{n-1}] + \tfrac{1}{2}$$

b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$.

13. Se realiza una serie de lanzamientos independientes entre sí con una moneda no equilibrada ($\mathbb{P}(cara) = p \neq 0{,}5$). Sea P_n la probabilidad de que al enésimo lanzamiento se haya acumulado una cantidad par de caras. Demuestre que:

$$P_n = \text{p}(1 \text{ - } P_{n-1}) + (1 \text{ - p})P_{n-1}$$

Use ese resultado para probar que:

$$P_n = \tfrac{1}{2}(1 + (1-2p)^n)$$

14. a) ¿ Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la siguiente ecuación?:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$$

Indicación: Puede ser decisivo que realize una buena analogía.

b) Encuentre una expresión para la cantidad de soluciones enteras no negativas de:

$$X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + 3X_5 = 30$$

Indicación: Una forma de visualizar el problema es aislar los términos "‘conflictivos"‘ a la derecha. Vea los casos *posibles* y ocupe el resultado de la parte a).

15. Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta en gen T, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si este proviene de su padre, y β si este viene de su madre. Si ambos presentan en gen, es seguro que el hijo enfermará. Por otro lado se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

a) Si una persona está enferma ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad haya sido transmitida sólo por la madre?

b) Suponga que la persona de la parte a) tiene un hermano (con el mismo padre y la misma madre). Calcule la probabilidad de que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está.