Pauta P2 C3

i) Calculamos $F_X(x) = P(X < x) = P(Y - \alpha < x) = P(Y < x + \alpha) = F_Y(x + \alpha) \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_Y(x + \alpha)$

Análogamente, se calcula que $f_X(-x) = f_Y(-x + \alpha) \Rightarrow f_X(-x) = f_X(x)$.

ii) Dado que Y,X son absolutamente continuas, tenemos que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} yf_X(y)dy + \int_{0}^{\infty} yf_X(y)dy$. Haciendo en la primera integral $x = -y$, y dando vuelta los límites de integración por el signo menos que resulta del cambio de variables, tenemos que $E(X) = \int_0^{\infty} -xf_X(-x)dx + \int_0^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{\infty} -xf_X(x) + xf_X(x)dx = 0$. Asimismo, por linealidad de la esperanza, tenemos que $E(Y) = E(X + \alpha) = E(X) + \alpha = \alpha$.

iii) Dado que X,α son independientes (pues α es una constante), tenemos que $\varphi_Y(t) = \varphi_{X+\alpha}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_\alpha(t)$. Pero dado que X está centrada en el origen, por propiedad vista en clase se tiene que $\varphi_X(t) = h(t)$, donde h es una función que toma valores reales (si no recordaban la propiedad, también podían demostrarla en el control, no resulta demasiado difícil, usando que $e^{iz} = cos(z) + isin(z)$). Además $\varphi_\alpha(t) = E(e^{it\alpha}) = e^{it\alpha}$ (pues $e^{it\alpha}$ es una constante). Así, tendremos que $\varphi_Y(t) = h(t) \cdot e^{it\alpha}$.