

P

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, absolutamente continuas y estrictamente positivas, con densidades f_1, f_2 respectivamente. Sea $X_3 = X_1 X_2$. Muestre que la densidad de X_3 está dada por:

$$f_3(z) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{w} f_1\left(\frac{z}{w}\right) f_2(w) dw & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Hint: Defina $(X_3, X_4) = g(X_1, X_2)$ y use el método del Jacobiano.

Solución: Notemos primero que el problema podría resolverse de la forma usual para este tipo de problemas, es decir, calculando la distribución de X_3 y luego derivando, sin embargo en este ejemplo usaremos el método del Jacobiano. Recordemos entonces que si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible y diferenciable, y conocemos la distribución conjunta $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$, entonces la distribución de $(Y_1, \dots, Y_n) = h(X_1, \dots, X_n)$ está dada por $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{|\det(J_h(h^{-1}(y_1, \dots, y_n)))|} f_{X_1, \dots, X_n}(h^{-1}(y_1, \dots, y_n))$, donde J_h es la matriz Jacobiana de la función h . Así, en este caso, para $z \leq 0$ es claro que $f_3(z) = 0$, pues X_1, X_2 son ambas estrictamente positivas. Para $z > 0$, ocuparemos el método del Jacobiano. Así, tenemos que $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J_g)| = x_2$. Además, se tiene que $g^{-1}(z, w) = (\frac{z}{w}, w)$. Luego, por el método del Jacobiano, tendremos que

$$f_{3,4}(z, w) = \frac{1}{w} f_{1,2}\left(\frac{z}{w}, w\right) = \frac{1}{w} f_1\left(\frac{z}{w}\right) f_2(w)$$

Donde la última igualdad se debe a la independencia de X_1, X_2 . Por último sacamos la marginal de X_3 , i.e., tenemos que $f_3(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{w} f_1\left(\frac{z}{w}\right) f_2(w) dw = \int_0^\infty \frac{1}{w} f_1\left(\frac{z}{w}\right) f_2(w) dw$, pues $f_2(w) = 0$ para w negativo.