

Auxiliar De Probabilidades
 Prof. Servet Martinez
 Auxs. Andres Fielbaum, Tomas Spencer

Variables Aleatorias Continuas y Poisson

P1) Sean $X \sim U(0, a)$, $\theta \sim U(0, \frac{\pi}{2})$, $b > 0$

Calcule $P(X + b \cos \theta \geq a)$:

Sol)

$P(X + b \cos \theta \geq a) = P(X \geq a - b \cos \theta)$ aquí condicionamos sobre θ .

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(X \geq a - b \cos \varphi | \theta = \varphi) \frac{2}{\pi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(X \geq a - b \cos \varphi) \frac{2}{\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{a-b \cos \varphi}^a \frac{1}{a} du \right] d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} b \cos \varphi d\varphi = \frac{2b}{a\pi}$$

P2) $X \sim U(0, 1)$, encuentre la fdp de $Y = e^X$.

Sol) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y)$,

esta probailidad la diferenciaremos dependiendo de donde este y.

$$y < 1 \Rightarrow P(X \leq \ln y) = 0$$

$$1 \leq y \leq e \Rightarrow P(X \leq \ln y) = \ln y$$

$$y \geq e \Rightarrow P(X \leq \ln y) = 1$$

Luego, como $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$:

$$\text{entonces, } f_Y(y) = \frac{1}{y} \quad \text{Si } 1 \leq y \leq e$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{Si no.}$$

P3) Un poceso de poisson bi-dimensional es aquel cuyos eventos se pertenecen a $\mathbb{R}^2$, tal que:

-Para cualquier region del plano de area A , el numero de eventos en A se distribuye segun un proceso de Poisson λA .

-El numero de eventos en regiones disjuntas son independientes.

Considere un punto r de $\mathbb{R}^2$:

Sea X la distancia al evento mas cercano (con norma euclidiana), pruebe que:

$$1) P(X > t) = e^{-\lambda \pi t^2}$$

2) Sea R_i , la distancia desde un punto arbitrario hasta el i -esimo evento mas cercano a él ($R_0 = 0$), muestre que:

$\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2$ ($i \geq 1$) son variables aleatorias independientes $\text{Exp}(\lambda)$.

$$\text{Sol) } 1) P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$$

Luego:

$$P(X \leq t) = P(\text{que exista por lo menos un evento en un area de tamaño } \pi t^2)$$

o lo que es lo mismo:

$$1 - P(X \leq t) =$$

$$P((\text{que exista por lo menos un evento en un area de tamaño } \pi t^2)^c) =$$

$$P(\text{que existan 0 eventos en un area de tamaño } \pi t^2),$$

y como esto se distribuye como una poisson de parametro $\pi t^2 \lambda$

$$\Rightarrow P(X > t) = P(\text{que existan 0 eventos en un area de tamaño } \pi t^2) = e^{-\lambda \pi t^2}$$

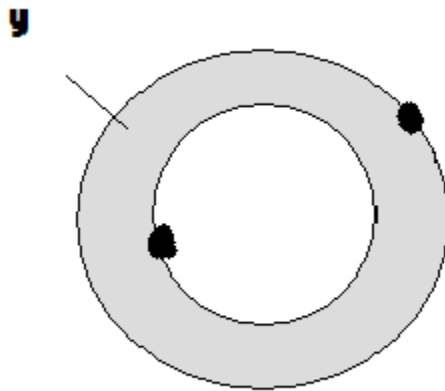
nota: se considero que el area es de tamaño πt^2 , porque esa es el area del disco de radio t.

2) Sea $Y = \pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2$

Veamos como se distribuye Y,

Para esto notemos que Y corresponde al area de los discos ubicado entre 2 eventos consecutivos.

Ver Figura.



Considere que los puntos son 2 eventos consecutivos y que el area sombreada es lo que representa la variable aleatoria Y. Luego:

$$P(Y \leq y) = P(\text{existan 0 eventos en un area de tamaño } \leq y)$$

$$= 1 - P(\text{existan 0 eventos en un area de tamaño } > y)$$

Entonces ocupando la parte 1)

$$P(Y \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Con lo que concluimos $Y \sim \exp(\lambda)$

La independencia proviene del hecho que las area representadas por

$Y_j = \pi R_j^2 - \pi R_{j-1}^2$, son disjuntas.