

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Guía N°1 Probabilidades

Profesor: Servet Martínez. Profesores Auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomas Spencer

P1

En el juego del Crabs, el jugador dispone de dos dados. Si en la primera tirada el jugador saca 7 u 11, gana. Si saca 2, 3 ó 12 pierde. En otro caso, sigue jugando hasta sacar un 7, caso en el que pierde, ó el número inicial, caso en el que gana. Calcule la probabilidad de ganar.

P2

En un control de alternativas, Pablo tiene probabilidad $\mathbf{p}$ de saber una respuesta. Cada pregunta consta de $\mathbf{m}$ alternativas. Si sabe la respuesta a la pregunta, responde en forma correcta con probabilidad 1. Si no la sabe, responde en forma aleatoria y equiprobable cualquier alternativa. Calcule la probabilidad de que supiera una respuesta si contestó bien.

P3

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$, tal que $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$ y suponga que $\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

P4

Sean $\{n_1, \dots, n_m\}$ números naturales mayores que cero, conocidos por m personas que juegan al siguiente juego: Se elige un número al azar entre 1 y n_1 (inclusive), y el primer jugador intenta adivinar. Si lo logra, gana el juego, y si no, se elige un número al azar entre 1 y n_2 , tras lo cual el segundo jugador intenta adivinar, y así sucesivamente. El juego termina cuando alguien gana o cuando ya no hay más jugadores. Calcule la relación que debe haber entre los n_i para que el juego sea justo, es decir, para que todos los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar. Debe llegar a una relación bien concisa.

P5

Considere un espacio con medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Sean A, B dos eventos con probabilidad no nula. Se dice que B repele a A si $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$, y que B

atrae a A si no se cumple que B repele a A. Demuestre que si B atrae a A, entonces A atrae a B y B repele a A^c .

P6

Sea $S = \{1, \dots, n\}$. Sea $\Omega = P(S) \times P(S)$, donde P denota al conjunto de las partes. Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$, donde la probabilidad de cada conjunto es la equiprobable. Pruebe que $\mathbb{P}\{(C, D) \in \Omega : C \subseteq D\} = (\frac{3}{4})^n$. Hint: Condicione con respecto a la cardinalidad del conjunto D.

P7

Melón y Melame juegan lanzando una moneda cargada, con probabilidad p de salir cara. Si Melame comienza jugando, calcule la probabilidad de que Melame gane (gana quien saca la primera cara).

P8

En un curso de 20 niños, se va a formar una directiva, compuesta por 5 secretarios. Si el Pato Willie es un alumno de este curso, y la directiva se elige al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que Pato Willie no esté en la directiva?. Calcule ahora la probabilidad de que Pato Willie sea presidente, si la lista está compuesta por un presidente, un vicepresidente, un secretario, un tesorero y un guardián.

P9

Se define para $\{a_n\}$ sucesión real, $\limsup_n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m > n} \{a_m\})$. Sea E_n una colección de eventos (asuma que estamos en un espacio de probabilidad). Demuestre que $\mathbb{P}\{\limsup_n (E_n)\} \geq \limsup(\mathbb{P}\{E_n\})$

P10

En una fábrica hay tres máquinas, A, B y C, las que producen el 45%, 30% y 25% de la producción total de la fábrica, respectivamente. Los porcentajes de artículos defectuosos producidos por cada máquina son 3%, 4% y 5% respectivamente. Calcule:

- Si seleccionamos un artículo al azar, la probabilidad de que sea defectuoso
- Si tomamos al azar un artículo y resulta que es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por B?
- Si tomamos al azar un artículo y resulta que no es defectuoso, ¿Qué máquina tiene mayor probabilidad de haberlo producido?

P11

En una urna, tenemos 3 bolitas rojas y 2 negras. Se saca una bolita al azar

y, sin mirarla, se guarda en el bolsillo. Se saca luego otra bolita, y resulta que es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bolita también haya sido roja?

P12

Magallanes United y Buin Lakers son los dos equipos finalistas de la NBA, y jugarán una cantidad impar de partidos para dirimir al campeón (obviamente, quien gane más partidos será el campeón). Supongo que Magallanes United tiene probabilidad $\mathbf{p}$ de ganar cada partido, y que cada partido es independiente de los demás. Calcule los valores de $\mathbf{p}$ para los que a Magallanes United le conviene más jugar $(2K+1)$ partidos en vez $(2K-1)$.

P13

Actualmente, los números celulares en Chile se componen de 8 cifras. La primera puede ser 7, 8 ó 9, y las restantes pueden ser cualquier dígito. Calcule la probabilidad de que si a usted le entregan un número al azar, este contenga exactamente tres 8.

P14

Se elige un número al azar entre 0 y 10, al que llamaremos $\mathbf{i}$. Posteriormente, se tiran dos dados de $\mathbf{i}$ caras en forma independiente. Calcule la probabilidad de que $\mathbf{i}=10$, dado que la suma entre los dados dio 10.

P15

En una caja hay $2\mathbf{n}$ helados, $\mathbf{n}$ de chocolate y $\mathbf{n}$ de lúcumas. Se repartirán entre $2\mathbf{n}$ personas, dentro de las cuales hay $\mathbf{a}$ que prefieren chocolate, $\mathbf{b}$ que prefieren lúcumas y al resto le da lo mismo cualquiera de los dos. Calcule la probabilidad de que todos queden satisfechos, si se reparten al azar.