

# Clase Auxiliar N°10

Profesor: Iván Rapaport

Auxiliar: Sofia Moroni

**Problema 1** Considere un círculo de radio  $R$  y suponga que se elige un punto del círculo al azar de manera que cualquier para de regiones del círculo con igual área tienen igual probabilidad de contenerlo. Si el centro del círculo está en el origen y definimos como  $X$  e  $Y$  las coordenadas del punto elegido. Se tendrá la densidad conjunta de  $X$  e  $Y$  será de la forma

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

para algún valor  $c$ .

- (a) Determine  $c$
- (b) Encuentre la función de densidad de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$ .
- (c) Calcule la probabilidad de que  $D$ , que denota la distancia desde el origen al punto seleccionado, sea menor o igual a  $a$ .
- (d) Encuentre  $\mathbb{E}(D)$ .

**Problema 2** Suponga que la distribución conjunta de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de  $\frac{X}{Y}$

**Problema 3** Considere un triángulo isósceles de largo 2 y altura 1. Sea  $(X, Y)$  variables aleatorias que determinan algún punto de ese triángulo, es decir, siempre cae adentro de él. Dado lo anterior

- (a) Determine la ley de probabilidad de que  $(X, Y)$  pertenezca a una región A dentro del triángulo, de modo que cualquier otra región de la misma área de A tenga la misma probabilidad.
- (b) Determine la distribución de  $X$  e  $Y$ . (Recomendación: haga una interpretación gráfica)
- (c) ¿Son independientes? Justifique

**Problema 4** Suponga que una mesa tiene líneas paralelas a distancia  $D$ . Una aguja de largo  $L \leq D$  es tirada a la mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja intersecte una de las líneas?

### Recuerdo

- La *función de densidad acumulada conjunta* de dos variables  $X$  e  $Y$  es

$$F_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}(X \leq a, Y \leq b)$$

La *función de densidad conjunta* es

$$f_{X,Y}(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a,b)$$

La función de densidad de  $X$  (análogo para  $Y$ ) es

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

- La esperanza de una función  $g(X,Y)$  es

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int g(x,y) f(x,y) dx dy$$

- Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  continuas son independientes ssi

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \quad \forall A, B \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow F_{X,Y}(a,b) = F_X(a) F_Y(b)$$

$$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Dos variables aleatorias discretas  $X$  e  $Y$  son independientes ssi

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \quad \forall A, B \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) \quad \forall a, b$$