

Clase Auxiliar N°11

Profesor: Iván Rapaport

Auxiliar: Sofia Moroni

Problema 1

1. Suponga que un grupo de N personas dejan sus sombreros en el centro de una sala. Los sombreros se mezclan y cada uno de ellos selecciona uno al azar. ¿Cuál es el número esperado de personas que seleccionan su propio sombrero?
2. Suponga que hay N diferentes tipos de cupones y cada vez que se obtiene un cupón hay igual probabilidad que sea uno de los N tipos. Encuentre el número esperado de cupones que se deben juntar antes de tener un set completo de al menos uno de cada tipo.
3. **Caminata aleatoria en el plano.** Considere una partícula que está inicialmente en un punto del plano y suponga que realiza una serie de pasos de igual largo en dirección completamente aleatoria. Específicamente, asuma que la nueva posición después de cada paso está a una unidad de distancia de la posición anterior a un ángulo que está distribuido uniformemente entre $(0, 2\pi)$. Calcule la esperanza de la distancia al cuadrado después de n pasos.

Problema 2

1. Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 son variables aleatorias iid con distribución exponencial de parámetro λ , calcule:
 - a) $\mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$
 - b) $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_5\} \leq a)$
2. Si X_1, X_2, X_3 son v.a. independientes con distribución $U[0,1]$, calcule la probabilidad de que el más grande de los tres sea mayor que la suma de los otros dos.

Problema 3 Considere $n + m$ intentos que tienen una la misma probabilidad de éxito. Suponga que la probabilidad de éxito es elegida de manera uniforme entre 0 y 1. ¿Cuál es la distribución condicional de la probabilidad de éxito dado que $n + m$ intentos resultan en n éxitos?

Recuerdo

- Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias (no necesariamente independientes) se tiene que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

- **Distribuciones condicionales** Si las v.a. X e Y tienen densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ se define la densidad condicional como

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$