

# Clase Auxiliar N°7

Profesor: Iván Rapaport

Auxiliar: Sofia Moroni

**Problema 1** Supongo que una fábrica se sabe que el número de ítemes producidos en una semana es una variable aleatoria de esperanza 50.

- i) ¿Qué puede decirse acerca de la probabilidad de que la producción de una semana exceda 75?
- ii) Si la varianza de la producción semanal se sabe que es 25, entonces ¿qué se puede decir acerca de la probabilidad de que la producción de una semana esté entre 40 y 60?

## Problema 2

Un astrónomo está interesado en medir, en años luz, la distancia entre su observatorio y una estrella distante. Si bien el astrónomo tiene una técnica de medición (no detallaremos cuál), él sabe que, debido a cambiantes condiciones atmosféricas y errores normales, cada vez que se realiza una medición no entrega la distancia exacta pero sí un valor estimado. Debido a ello el astrónomo decide hacer una serie de mediciones y utilizar el promedio de esos valores como su estimador de la distancia actual. Si éste cree que las mediciones son variables aleatorias iid de esperanza  $d$  y varianza 4. ¿Cuántas mediciones necesita hacer para estar razonablemente seguro (digamos, 95 %) que su distancia estimada tenga un error de  $\pm 5$  años luz? Utilice el teorema central del límite y la desigualdad de Chebyshev para obtener dos resultados distintos.

## Problema 3

- (a) Sea  $X$  una variable aleatoria de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Se define  $Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ . Calcule la generadora de momentos  $\varphi_Y$ .
- (b) Sea  $Z$  una variable aleatoria  $N(0, 1)$ . Calcule la generadora de momentos  $\varphi_Z$ .
- (c) Muestre que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_Y(t) = \varphi_Z(t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ , en que  $Y$  es la variable aleatoria definida en (a) que depende del parámetro  $\lambda$ .

## Recuerdo

### ■ Desigualdad de Markov

Si  $X$  es una variable aleatoria que no toma valores negativos entonces para cualquier  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a}$$

### ■ Desigualdad de Chebyshev

Si  $X$  es una variable aleatoria con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces para cualquier  $k > 0$

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

### ■ Teorema Central del Límite

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una secuencia de variables aleatorias iid con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces la distribución de

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

tiende a una  $N(0,1)$ .

### ■ Ley de los grandes números

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una secuencia de variables aleatorias iid, cada una con media  $\mu = E(X_i)$ , entonces con probabilidad 1 se tiene que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### ■ Función generadora de momentos

Si  $X$  es una v.a., se define su función generadora de momentos como

$$\varphi_X(t) = E(e^{tX})$$