

Clase Auxiliar N°8

Control 2 (Kiwi '99)

PROBLEMA 1:

(i).- Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Si $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de una $\text{Normal}(0, 1)$ pruebe que

$$\mathbb{P}(\{|X| \leq t\}) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right) - 1.$$

(ii).- La mediana de una variable aleatoria absolutamente continua con distribución F se define como el valor m tal que $F(m) = 1/2$. Calcule la mediana de una variable aleatoria $\text{Exponencial}(\lambda)$.

(iii).- Sea $a \in [0, 1]$. Considere una variable aleatoria X cuya función distribución es

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - ae^{-\lambda t} & t \geq 0. \end{cases}$$

Sea $Y = F(X)$, determine la función distribución de Y y especifique para que valor de $a \in [0, 1]$ se tiene que $Y \sim \text{Uniforme}(0, 1)$.

Indicación: Grafique la función distribución F .

Control 2 (Kiwi '04)

PROBLEMA 2:

(i).- (2.0 pts) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias discretas sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) con soportes S_X y S_Y respectivamente. Se dice que X e Y son independientes si

$$\forall a \in S_X, \forall b \in S_Y, \quad \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b).$$

Identifique la distribución de $X + Y$ cuando $X \sim \text{Binomial}(r, p)$ e $Y \sim \text{Binomial}(s, p)$ son variables aleatorias independientes. Justifique en palabras su resultado.

Indicación: Particione en la familia de eventos $\{X = i\}$ y use que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n}{i} \binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$.

(ii).- Pasadas las celebraciones dieciocheras, un compatriota A deja las fondas en grave estado de intemperancia, camina una cuadra hacia su casa con probabilidad p , y una cuadra en dirección opuesta con probabilidad $1 - p$. Se sabe que la casa de A está a d cuerdas de las fondas y que este alcanza a caminar exactamente n cuerdas antes de caer desmayado. Nos interesará analizar con que probabilidad A cae desmayado enfrente de su casa.

(ii.1).- (1.5 pts) Construya un espacio de probabilidad adecuado para abordar el punto de interés y especifique la variable aleatoria relevante.

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que la probabilidad que A caiga enfrente de su casa es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+d)} p^{\frac{1}{2}(n+d)} q^{\frac{1}{2}(n-d)},$$

si $n+d$ es par y 0 en caso contrario.

(ii.3).- (1.0 pts) Pasado un rato, A se levanta todavía en estado de ebriedad, camina m pasos más y vuelve a caer desmayado ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa? ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa si cuando se levanto estaba enfrente de su casa?

Co

Control 2 (Kiwí '96)

PROBLEMA 2: Sea $X : (\Omega, \beta, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria absolutamente continua positiva (i.e., $X \geq 0$), F su función distribución y f su función de densidad. Suponga además que $F(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y que f es continua en \mathbb{R}_+ . Se define la 'tasa de falla' de la variable X a través de la ecuación

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

donde $t \geq 0$.

(i).- (1.5 pts.) Probar que $\lambda(t)$ determina la función de distribución F . Para ello pruebe que si $t \geq 0$,

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right).$$

(ii).- En un estudio reciente se afirma que la tasa de muerte de los fumadores es el doble que la de los no fumadores. ¿Como entender esto en términos de la probabilidad de sobrevivencia?; veremos que no significa que un fumador viva (en promedio) la mitad que un no fumador.

Si suponemos que el tiempo de vida de un no fumador es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_N y el tiempo de vida de un fumador también es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_F , donde $F_{T_N}(t) \neq 1, F_{T_F}(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y sus funciones de densidad son continuas en \mathbb{R}_+ , entonces la comparación de dichas tasas corresponde a:

$$2\lambda_N(t) = \lambda_F(t), \quad \forall t \geq 0.$$

(ii.1).- (2.5 pts.) Sean $0 \leq t_0 < t_1$. Probar que la probabilidad que un no fumador de al menos t_0 años alcance la edad de t_1 años está dada por:

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s) ds\right).$$

(ii.2).- (2.0 pts.) Suponga que $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ para todo $t \geq 0$. Calcular la razón entre la probabilidad que un no fumador de al menos 50 años cumpla 60 años con respecto a la misma probabilidad para un fumador.