Control 2 - Probabilidades y Procesos Estocásticos - 2007

Iván Rapaport

Pregunta 1

a)

Sea Y_i con i =1,…,100

Y_i se distribuye uniforme en el intervalo [0, 80], es decir $f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{80}$ para $y_i \in [1,\ldots,80]$.

Luego, la probabilidad de que el máximo de los y_i sea mayor que 40 se calcula como:

$$P(\max(y_i) > 40) = 1 - P(\max(y_i) < 40) = 1 - P(y_1 < 40 \cap y_2 < 40 \cap \ldots \cap y_{100} < 40)$$

Por independencia de las variables, lo anterior se reduce a $1 - [P(y_1 < 40)]^{100}$

Pero $P(y_{1<40}) = \int_0^{40} \frac{1}{80} dy = \frac{1}{2}$, lo que finalmente nos entrega que

$$P(\max(y_i) > 40) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

b)

(i)

$$Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum Var(x_i) = \frac{s}{n}$$

(ii)

Primera Forma:

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum (x_i - m - (\bar{x} - m))^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum (x_i - m)^2 - \sum 2(x_i - m)(\bar{x} - m) + \sum (\bar{x} - m)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum E\left((x_i - m)^2\right) - 2 \cdot n \cdot E\left((\overline{x} - m)^2\right) + \sum E\left((\overline{x} - m)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[n \cdot Var(x_i) - 2 \cdot n \cdot Var(\overline{x}) + n \cdot Var(\overline{x})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n \cdot s \; - 2 \cdot n \cdot \frac{s}{n} + n \cdot \frac{s}{n}\right) \\
&= s
\end{aligned}
$$

Segunda Forma:

$$
\begin{aligned}
(n-1) \cdot s^2 &= \sum (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \sum (x_i^2) - 2 \cdot \overline{x} \cdot \sum (x_i) + \sum (\overline{x}^2) \\
&= \sum (x_i^2) - 2 \cdot n \cdot \overline{x}^2 + n\overline{x}^2 = \sum (x_i^2) - n \cdot \overline{x}^2
\end{aligned}
$$

Luego

$$
(n-1) \cdot E(s^2) = \sum E(x_i^2) - n \cdot E(\overline{x}^2) = Var(x_i) + (E(x_i))^2 - n \cdot \left[Var(\overline{x}) + (E(\overline{x}))^2\right]
$$

$$
= n \cdot (s \; + m^2) - n\left(\frac{s}{n} + m^2\right) = s \; \cdot (n-1)
$$

Finalmente se tiene $E(s^2) = s$