Control 2 - Probabilidades y Procesos Estocásticos - 2007

Iván Rapaport

Pregunta 1.

a.- (2 puntos) Sea X una variable aleatoria que sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Es decir,

$$\Pr\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Demuestre que $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

b.- (2 puntos) Sea X una variable aleatoria discreta definida en $\mathbb{N}$. Demuestre que $\mathbb{E}(X) = \sum_{i\geq 0} \Pr\{X \geq i\}$.

c.- (2 puntos) Suponga que una barra cuyo largo es de 1 metro se corta en un punto elegido al azar de manera uniforme de modo tal que se generen dos sub-barras. ¿Cuál es el largo esperado de la sub-barra más corta?

Solución

a.-

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \cdot i = \lambda[\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda}$$

b.-

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} 1\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} 1\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i)
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se obtiene haciendo cambio de índices como se muestra en la figura...

figura

c.- Sea X la variable aleatoria uniforme que representa el punto de se corta la barra. Sea Y el largo de la sub-barra más corta.

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y, X < \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(Y \leq y, X \geq \frac{1}{2})$$

Se tiene además que

$$\mathbb{P}(Y \leq y, X < \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \geq \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X \leq y, X \leq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \leq y) = y & \text{si } y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Análogamente

$$\mathbb{P}(Y \leq y, X \geq \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \geq \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(1 - X \leq y, X \geq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \leq 1 - y) = y & \text{si } y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Con esto se tendrá que

$$\mathbb{P}(Y \leq y, X \geq \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \geq \frac{1}{2} \\ 2y & \text{si } y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, el largo de la sub-barra más corta sigue una distribución Uniforme$[0, \frac{1}{2}]$ y su media será entonces $\frac{1}{4}$.

Pregunta 2. Sea X una variable aleatoria que sigue una ley exponencial de parámetro 0,1. Es decir, su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1e^{-0{,}1x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a.- (1.5 puntos) Calcule $\Pr\{X > 53 | X > 43\}$.

b.- (1.5 puntos) Demuestre que $\mathbb{E}(X) = 10$ y que $\mathbb{V}(X) = 100$.

c.- (3 puntos) Demuestre que la variable aleatoria $\lceil X \rceil$ sigue una ley geométrica.

Solución

a.-

$$\mathbb{P}(X > 53 | X > 43) = \frac{\mathbb{P}(X > 53, X > 43)}{\mathbb{P}(X > 43)} = \frac{\mathbb{P}(X > 53)}{\mathbb{P}(X > 43)} = \frac{e^{-0{,}1 \cdot 53}}{e^{-0{,}1 \cdot 43}} = e^{-0{,}1 \cdot 10} = e^{-1}$$

b.-

$$\int_0^\infty x 0{,}1e^{-0{,}1x} dx \overset{\substack{u=x \\ dv=0{,}1e^{-0{,}1x}dx \\ \downarrow}}{=} -xe^{-0{,}1x}|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-0{,}1x} dx$$

$$0 - 0 + \frac{-e^{-0{,}1x}}{0{,}1}|_0^\infty = 0 + \frac{1}{0{,}1} = 10$$

c.- Sea $Y = \lceil X \rceil$. Para que Y sea geométrica se debe cumplir que

$$\mathbb{P}(Y = j) = (1-p)^{j-1}p$$

para algún p.

$$\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(j-1 < X \leq j) = \int_{j-1}^{j} 0{,}1e^{-0{,}1x}dx$$

$$-e^{-0{,}1x}|_{j-1}^{j} = -e^{-0{,}1\cdot j} + e^{-0{,}1(j-1)} = e^{-0{,}1(j-1)}(1 - e^{-0{,}1})$$

Es decir Y es geométrica con $p = 1 - e^{-0{,}1}$.