

Clase Auxiliar N°6

Profesor: Iván Rappaport

Auxiliar: Sofia Moroni

1. Hay n islas. La probabilidad de que el tesoro esté en alguna de las islas es 0.5. El tesoro tiene la misma probabilidad de encontrarse en cualquiera de las islas. Si usted es un pirata que ha visitado $n - 1$ islas y en ninguna estaba el tesoro ¿Cuál es la probabilidad de que éste se encuentre en la n -ésima isla?
2. Sea X una variable aleatoria binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0, 1]$. Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

3. Sea $p \in (0, 1)$ considere $\{X_i : i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes Bernoulli(p).
 - a) Para $r \geq 1$ sea N_r la variable aleatoria que indica el índice en el cual se alcanza el r -ésimo 1, es decir $N_r(w) = \inf\{k \geq 1 : \sum_{i=1}^k X_i(w) = r\}$ (por ejemplo, si $r = 2$ en la realización $(X_i(w) : i \geq 1) = 00100100 \dots$ se tiene que $N_2(w) = 6$)
Pruebe que

$$\mathbb{P}(N_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad \forall k = r, r+1, \dots$$

- b) Sean $T_1 = N_1 = \inf\{i \geq 1 : X_i = 1\}$ y $T_2 = N_2 - T_1$. Pruebe que $\mathbb{P}(T_1 = j, T_2 = k) = p^2(1-p)^{j+k-2}$. Usando esto pruebe que T_1 y T_2 son variables aleatorias independientes y que cada una sigue distribución Geométrica(p).
4.
 - a) Sea X una variable aleatoria Geométrica(p) con $p \in (0, 1)$. Pruebe que $\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \mathbb{P}(X = k) \quad \forall n \geq 0, k \geq 1$.
 - b) Sea $\{X_i : i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes Bernoulli(p) con $p \in (0, 1)$. Sea $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ una variable aleatoria que sigue una distribución Poisson de parámetro λ . Defina la variable aleatoria S como

$$S(w) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(w)} X_i(w) & \text{si } N(w) \geq 1 \\ 0 & \text{si } N(w) = 0 \end{cases}$$

Pruebe que S sigue una distribución Poisson de parámetro λp .

Recuerdo

- Para $p \in (0, 1)$ una variable aleatoria X verifica $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ si $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$
- $X \sim \text{Geométrica}(p)$ si $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \quad \forall k \geq 1$
- Una variable N es Poisson(λ) si verifica que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Una variable aleatoria X es binomial(n, p) si $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$