Clase Auxiliar Nº8

Control 2 (Kiwi '99)

PROBLEMA 1:

(i).- Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Si $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de una $\text{Normal}(0,1)$ pruebe que

$$\mathbb{P}(\{|X| \leq t\}) \;=\; \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right) - 1\,.$$

(ii).- La mediana de una variable aleatoria absolutamente continua con distribución F se define como el valor m tal que $F(m) = 1/2$. Calcule la mediana de una variable aleatoria Exponencial(λ).

(iii).- Sea $a \in [0,1]$. Considere una variable aleatoria X cuya función distribución es

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,, \\ 1 - ae^{-\lambda t} & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Sea $Y = F(X)$, determine la función distribución de Y y especifique para que valor de $a \in [0,1]$ se tiene que $Y \sim \text{Uniforme}(0,1)$.

Indicación: Grafique la función distribución F.

Control 2 (Kiwi '04)

PROBLEMA 2:

(i).- (2.0 pts) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias discretas sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ con soportes S_X y S_Y respectivamente. Se dice que X e Y son independientes si

$$\forall a \in S_X\,, \forall b \in S_Y\,, \qquad \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b)\,.$$

Identifique la distribución de $X + Y$ cuando $X \sim \text{Binomial}(r, p)$ e $Y \sim \text{Binomial}(s, p)$ son variables aleatorias independientes. Justifique en palabras su resultado.

Indicación: Particione en la familia de eventos $\{X = i\}$ y use que $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$.

(ii).- Pasadas las celebraciones dieciocheras, un compatriota A deja las fondas en grave estado de intemperancia, camina una cuadra hacia su casa con probabilidad p, y una cuadra en dirección opuesta con probabilidad $1 - p$. Se sabe que la casa de A está a d cuadras de las fondas y que este alcanza a caminar exactamente n cuadras antes de caer desmayado. Nos interesará analizar con que probabilidad A cae desmayado enfrente de su casa.

(ii.1).- (1.5 pts) Construya un espacio de probabilidad adecuado para abordar el punto de interés y especifique la variable aleatoria relevante.

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que la probabilidad que A caiga enfrente de su casa es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+d)} p^{\frac{1}{2}(n+d)} q^{\frac{1}{2}(n-d)} ,$$

si $n+d$ es par y 0 en caso contrario.

(ii.3).- (1.0 pts) Pasado un rato, A se levanta todavía en estado de ebriedad, camina m pasos más y vuelve a caer desmayado ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa? ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa si cuando se levanto estaba enfrente de su casa?

Co

Control 2 (Kiwi '96)

PROBLEMA 2: Sea $X : (\Omega, \beta, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria absolutamente continua positiva (i.e., $X \geq 0$), F su función distribución y f su función de densidad. Suponga además que $F(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y que f es continua en $\mathbb{R}_+$. Se define la 'tasa de falla' de la variable X a través de la ecuación

$$\lambda(t) \quad = \quad \frac{f(t)}{1 - F(t)} ,$$

donde $t \geq 0$.

(i).- (1.5 pts.) Probar que $\lambda(t)$ determina la función de distribución F. Para ello pruebe que si $t \geq 0$,

$$F(t) \quad = \quad 1 - \exp\left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) .$$

(ii).- En un estudio reciente se afirma que la tasa de muerte de los fumadores es el doble que la de los no fumadores. ¿Como entender ésto en términos de la probabilidad de sobrevivencia?; veremos que no significa que un fumador viva (en promedio) la mitad que un no fumador.

Si suponemos que el tiempo de vida de un no fumador es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_N y el tiempo de vida de un fumador también es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_F, donde $F_{T_N}(t) \neq 1, F_{T_F}(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y sus funciones de densidad son continuas en $\mathbb{R}_+$, entonces la comparación de dichas tasas corresponde a:

$$2\lambda_N(t) \quad = \quad \lambda_F(t) , \qquad \forall t \geq 0 .$$

(ii.1).- (2.5 pts.) Sean $0 \leq t_0 < t_1$. Probar que la probabilidad que un no fumador de al menos t_0 años alcance la edad de t_1 años está dada por:

$$\exp\left(- \int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s) ds \right) .$$

(ii.2).- (2.0 pts.) Suponga que $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ para todo $t \geq 0$. Calcular la razón entre la probabilidad que un no fumador de al menos 50 años cumpla 60 años con respecto a la misma probabilidad para un fumador.

Pauta Clase Nº8

PROBLEMA 1:

(i).- Recordemos primero que si X es una Normal(μ, σ^2) entonces $(X - \mu)/\sigma$ es una Normal$(0, 1)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{|X| \leq t\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X \leq t\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X < -t\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-t-\mu}{\sigma}\right\}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-t-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Pero como $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, sigue que

$$\mathbb{P}\left(\{|X| \leq t\}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right) - 1\,.$$

(ii).- Si X es una Exponencial(λ), entonces $f_X(t) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)\lambda e^{-\lambda t}$. Luego,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como la mediana m esta definida por la relación $F(m) = 1/2$, para calcular dicho valor debemos resolver

$$1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}\,.$$

Despejando, obtenemos que $m = \ln(2)/\lambda$.

(iii).- Observemos que:

- Si $t < 1 - a$ entonces $\mathbb{P}\left(\{F(X) \leq t\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X < 0\}\right) = 0$.
- Si $t \in [1 - a, 1)$ entonces $\mathbb{P}\left(\{F(X) \leq t\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X \leq t^*\}\right)$, donde t^* es el único elemento $t \in \mathbb{R}$ tal que $F(t^*) = t$ (ver Fig. 1). Luego, $\mathbb{P}\left(\{F(X) \leq t\}\right) = F(t^*) = t$.
- Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\{F(X) \leq t\}\right) = 1$.

Luego, la distribución Y es (ver Fig. 2):

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 - a, \\ t & \text{si } 1 - a \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

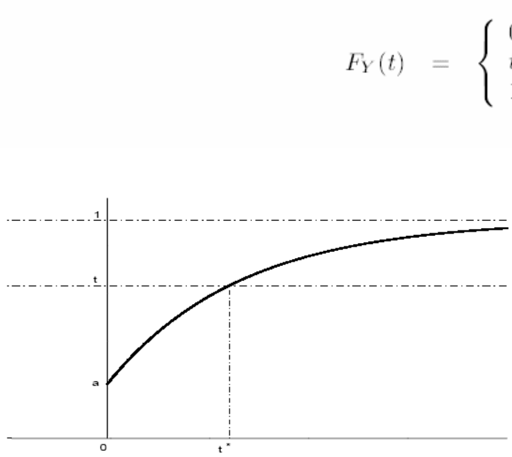

Figure 1: Distribución de X.

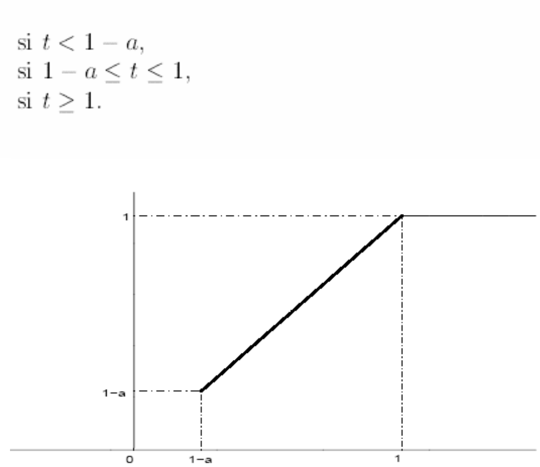

Figure 2: Distribución de Y.

PROBLEMA 2:

(i).- Claramente $X+Y$ toma valores en $\mathbb{N}$. Debemos determinar $\mathbb{P}(X+Y=a)$ para $a \in \mathbb{N}$.

Por la regla de las probabilidades totales, particionando en la familia de eventos $\{X=i\}$ con $i \in S_X$, sigue que

$$\mathbb{P}(X+Y=a) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X+Y=a, X=i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=i, Y=a-i) \ .$$

Por independencia de X e Y sigue que

$$\mathbb{P}(X+Y=a) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=i)\cdot\mathbb{P}(Y=a-i) \ .$$

Luego, como $X \sim \text{Binomial}(n,p)$ e $Y \sim \text{Binomial}(m,p)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=a) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{a-i} p^{a-i} q^{m-a+i} \\
&= p^a q^{n+m-a} \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} \\
&= p^a q^{n+m-a} \binom{m+n}{a},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por la indicación. Se concluye que $X+Y \sim \text{Binomial}(n+m,p)$.

La justificación "en palabras" del resultado recién establecido es que como X e Y corresponden al número de caras que se obtiene al lanzar n y m veces respectivamente una misma moneda con probabilidad p de caer cara, entonces bajo supuestos de independencia $X+Y$ representa el número de caras que se obtiene al lanzar la misma moneda $n+m$ veces. Luego, sigue una distribución $\text{Binomial}(n+m,p)$.

(ii.1).- La forma más natural de construir un espacio de probabilidad adecuado es ver la caminata de A como una sucesión de n experimentos independientes $\mathcal{E}_i$, $i=1,\ldots,n$.

Cada uno de los experimentos corresponderá a avanzar una cuadra en la dirección de las fondas hacia la casa de A o en la dirección contraria. Luego el experimento $\mathcal{E}_i$ es análogo al experimento que consiste en lanzar una moneda con probabilidad p de caer cara.

El espacio de probabilidad adecuado para asociar a $\mathcal{E}_i$ será $(\Omega_i, \mathcal{F}, \mathbb{P}_i)$ tal que $\Omega_i = \{-1,+1\}$, $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ y donde $\mathbb{P}(\{+1\}) = p$ y $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1-p$.

Por todo lo anterior, un espacio de probabilidad adecuado para estudiar la caminata de A es el espacio de probabilidad asociado al experimento $\times_{i=1}^n \mathcal{E}_i$, es decir, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i = \{-1, +1\}^n$, $\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, y $\mathbb{P} = \times_{i=1}^n \mathbb{P}_i$.

La variable aleatoria de interés es $X : \Omega \to \mathbb{R}$ correspondiente a la distancia que recorre A desde las fondas en dirección a su casa, i.e.,

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \, .$$

(ii.2).- Supongamos que A avanza R cuadras en la dirección desde las fondas hacia su casa y L pasos en dirección contraria. Para que A caiga desmayado frente a su casa debe darse que $R - L = d$.[2] Por otro lado, sabemos que $R + L = n$. Luego, se deberá cumplir que $R = (n+d)/2$ y $L = (n-d)/2$. En particular observar como R es necesariament un entero, se debe tener que $n + d$ es necesarimente par (equivalentemente $n - d$ es par).

Además, R claramente sigue una Binomial(n, p). Luego, la probabilidad que $R = (n+d)/2$ es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+d)} p^{\frac{1}{2}(n+d)} q^{\frac{1}{2}(n-d)} \, ,$$

si $n + d$ es par y 0 si no.

(ii.3).- En el caso de la primera pregunta, basta pensar que A partió desde las fondas, avanzó $n + m$ pasos y se desmayó. Luego, de la parte anterior, la probabilidad pedida es

$$\binom{n+m}{\frac{1}{2}(n+m+d)} p^{\frac{1}{2}(n+m+d)} q^{\frac{1}{2}(n+m-d)} \, ,$$

si $n + m + d$ es par y 0 en caso contrario.

En el caso de la segunda pregunta, basta pensar que A se levantó enfrente de su casa, avanzó m pasos y se desmayó. Luego, nuevamente de la parte anterior, se tiene que la probabilidad pedida es

$$\binom{m}{\frac{1}{2}m} p^{\frac{1}{2}m} q^{\frac{1}{2}m} \, ,$$

si m es par y 0 en caso contrario.

Problema 2:

(i).- Como $f(t)$ es continua en $t \geq 0$, se tiene que $F(t)$ es diferenciable en $t > 0$, y $F'(t) = f(t)$, si $t > 0$. Luego

$$\lambda(t) \quad = \quad -\frac{d}{dt}(\ln(1 - F(t))) \, , \qquad t > 0 \, .$$

Integrando, sigue que para alguna constante c se tiene que

$$F(t) \quad = \quad 1 - e^{-c} \exp\left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) \, .$$

Por otro lado, como X es variable aleatoria positiva, se tiene que $F(0) = 0$, luego $c = 0$. En resumen,

$$F(t) \quad = \quad 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right) .$$

(ii.1).- La probabilidad pedida es,

$$\begin{aligned} p_N \quad &= \quad \mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1 | T_N \geq t_0\}\right) \; = \; \frac{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1, T_N \geq t_0\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_0\}\right)} \\ &= \quad \frac{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_0\}\right)} \; = \; \frac{\exp(-\int_0^{t_1} \lambda_N(s) ds)}{\exp(-\int_0^{t_0} \lambda_N(s) ds)} . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_N \quad = \quad \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s) ds\right) . \tag{1}$$

(ii.2).- Un argumento análogo al utilizado en la parte anterior muestra que

$$p_F \quad = \quad \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_F(s) ds\right) .$$

Luego, $2\lambda_N(t) = \lambda_F(t)$ si $t \geq 0$, implica que $p_F = p_N^2$. Por lo tanto, la razón ρ pedida es

$$\rho \quad = \quad \frac{1}{p_N} .$$

Tomando $t_0 = 50$, $t_1 = 60$ y $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ en (1), se concluye que $p_N = e^{-1/3}$. Luego, $\rho = e^{1/3}$.