Método de la Potencia Iterada.

Si A es una matriz diagonizable, cuyo valor propio mayor en módulo está aislado, entonces, el método iterativo que se describe a continuación, converge a un vector propio asociado a dicho valor propio, como se establece en el teorema que sigue.

Teorema 5.12. *Si los valores propios de A satisfacen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$$

y si $v_1, v_2, ..., v_n$, denotan vectores propios linealmente independientes, asociados respectivamente a los valores propios anteriores, entonces la sucesión de vectores generada por

$$\begin{aligned} & z^{(0)}\, dado \quad \forall k \geq 0, \\ w^{(k+1)} &= Az^{(k)}, \\ z^{(k+1)} &= \frac{1}{\left\| w^{(k+1)} \right\|_\infty} w^{(k+1)}, \end{aligned}$$

converge a $\pm \frac{1}{\|v_1\|_\infty} v_1$, cuando $k \to \infty$, siempre que la adivinanza inicial, $z^{(0)}$, tenga alguna componente en v_1. La velocidad de esta convergencia será mayor, mientras menor sea el cuociente $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$.

Hacemos ver que en cada iteración, se produce simultáneamente una aproximación del valor propio λ_1. En efecto, cualquiera sea el índice j de una componente no nula del vector $z^{(k-1)}$, el cuociente

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}}{z_j^{(k-1)}}$$

será una aproximación del valor propio que convergerá en la misma medida en que la sucesión de vectores producida por el método de la Potencia Iterada converja al vector propio. Para garantizar la división por una coordenada no nula se escoge el índice j donde se alcanza el máximo de los módulos de éstas, es decir,

$$|z_j^{(k-1)}| = \|z^{(k-1)}\|_\infty = 1.$$

Método de Hotelling

Si A es una matriz normal entonces el Teorema de Schur asegura que existe una base ortonormal de autovectores $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ esto es, tal que:

$p_i{}^t p_j = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1,2,\ldots n$ Se construye entonces la matriz:

$$A_1 = A - \lambda_1 \left(p_1 p_1^t\right) \big/ p_1^t p_1$$

que verifica:

$A_1 p_j = 0$; si $j = 1$

$A_1 p_j = \lambda_j p_j$; si $j \neq 1$

Por tanto, $Sp(A_1) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

Aplicando el método de la potencia iterada a la matriz

$A1$ se obtiene su autovalor dominante, que es el autovalor intermedio si λ_2*:*

Ejercicio:

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule por medio del método de potencia iterada el vector y valor propio dominante.
(b) Usando Hotelling y potencia iterada calcule los demás.

Solución: Ocupando definiciones anteriores.

Nos damos un $z^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, $w^1 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \|w^1\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 10$

$$z^1 = {w^1}\Big/{\|w^1\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$w^2 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36/5 \\ 27/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \qquad \|w^2\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 36/5 \\ 27/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 36/5$$

$$z^2 = {w^2}\Big/{\|w^2\|_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 27/36 \\ -4/36 \end{pmatrix}$$

$$w^3 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 27/36 \\ -4/36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 19/4 \\ -11/9 \end{pmatrix} \qquad \|w^3\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 13/2 \\ 19/4 \\ -11/9 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 13/2$$

$$z^3 = w^2 \big/ \|w^2\|_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix}$$

$$w^4 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81/13 \\ 9/2 \\ -161/117 \end{pmatrix}$$

Se supone que para la tercera iteración, z^3 es nuestro vector propio, divido por la norma infinita, pero al fin y al cabo vector propio.

Para obtener el lambda debemos aplicar,

Hacemos ver que en cada iteración, se produce simultáneamente una aproximación del valor propio λ_1. En efecto, cualquiera sea el índice j de una componente no nula del vector $z^{(k-1)}$, el cuociente

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}}{z_j^{(k-1)}}$$

será una aproximación del valor propio que convergerá en la misma medida en que la sucesión de vectores producida por el método de la Potencia Iterada converja al vector propio. Para garantizar la división por una coordenada no nula se escoge el índice j donde se alcanza el máximo de los módulos de éstas, es decir,

$$|z_j^{(k-1)}| = \|z^{(k-1)}\|_\infty = 1.$$

$$\lambda_1^4 = w_j^4 \big/ z^3_j = \begin{pmatrix} 81/13 \\ 9/2 \\ -161/117 \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix}$$

$$w_1^4 \big/ z^3_1 = \frac{81}{13} = 6{,}230$$

$$w_2^4 \big/ z^3_2 = \frac{117}{19} = 6{,}1578$$

$$w_3^4 \big/ z^3_3 = \frac{161}{22} = 7{,}318$$

Pueden elegir cualquiera, en este caso el primero es recomendable por que sabemos que nunca dividiremos por cero.

$$\lambda_1^4 = 6{,}230$$

Ahora tenemos un valor un vector propio, apliquemos Hotelling para poder obtener los valores propios menores que $\lambda_1^4 = 6{,}230$.

Tenemos $A_1 = A - \lambda_1 \left(p_1 p_1^t\right) \big/ p_1^t p_1$

Donde $A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 6{,}230$; $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix}$

A partir de estos datos obtendremos A_1, lo que nos permitirá aplicar nuevamente potencia iterativa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 6{,}23 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 19/26 & -22/117 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 19/26 & -22/117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 19/26 \\ -22/117 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 6{,}23 \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0{,}731 & -0{,}188 \\ 0{,}731 & 0{,}534 & -0{,}1374 \\ -0{,}188 & -0{,}1374 & 0{,}03535 \end{pmatrix}}{1{,}5693}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7{,}969 & 11{,}098 & 0{,}746 \\ -7{,}9 & 10{,}88 & 0{,}545 \\ -0{,}2536 & 0{,}54546 & 1{,}986 \end{pmatrix}$$

Al aplicar potencia iterada a la matriz A_1, se obtine el valor propio λ_2, pues hemos hecho cero al valor propio λ_1.