Auxiliar Extra

Prof. Jaime Michelow
Aux. Ignacio Trujillo – Hugo Ulloa

Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$10\,x_1 - x_2 \qquad = 9,$$

$$-x_1 + 10\,x_2 - 2\,x_3 = 7,$$

$$-2\,x_2 + 10\,x_3 = 6,$$

es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación w escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa w tomando como valores iniciales $x = 0$. Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

<u>Solución</u>. El sistema se puede escribir como $A\,x = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que esta matriz es definida positiva podemos calcular sus autovalores

$$|A - \lambda\, I| = (\lambda - 10)\,(-\lambda^2 + 20\,\lambda - 95) = 0,$$

que son

$$\lambda = 10, \qquad \lambda = 10 \pm \sqrt{5},$$

que claramente son positivos. También podríamos haber aplicado la regla de los menores principales

$$A_1 = |10| = 10 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 99 > 0,$$

y $A_3 = |A| = 950 > 0$.

Como no se dice si debemos aplicar el método de relajación al método de Gauss-Jacobi (que converge porque la matriz es diagonalmente dominante) o al de Gauss-Seidel (que converge por lo anterior y además porque la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva). Vamos a escoger este último. Descomponiendo la matriz $A = L + D + U$, tenemos que el método de Gauss-Seidel es

$$x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}\,(b - U\,x^{(k)}),$$

e introduciendo un parámetro de relajación

$$x^{(k+1)} = w\,(L+D)^{-1}\,(b - U\,x^{(k)}) + (1-w)\,x^{(k)},$$

con lo que el error $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ sigue la ecuación

$$e^{(k+1)} = ((1-w)\,I - w\,(L+D)^{-1}\,U)\,e^{(k)} = N\,e^{(k)},$$

y la convergencia del método queda garantizada si la tasa de convergencia es menor que la unidad

$$\rho(N) < 1.$$

Como

$$(L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 1/100 & 1/10 & 0 \\ 1/500 & 1/50 & 1/10 \end{pmatrix},$$

$$(L+D)^{-1}\,U = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & -1/100 & -1/5 \\ 0 & -1/500 & -1/25 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$N = (1-w)\,I - w\,(L+D)^{-1}\,U = \begin{pmatrix} 1-w & w/10 & 0 \\ 0 & 1 - 99\,w/100 & w/5 \\ 0 & w/500 & 1 - 24\,w/25 \end{pmatrix},$$

y por tanto su polinomio característico es

$$|N - \lambda\,I| = (1 - 19\,w/20 - \lambda)\,(1 - w - \lambda)^2,$$

y el radio espectral será menor que la unidad si

$$|1-w| < 1, \qquad |1 - 19\,w/20| < 1,$$

y por tanto $0 < w < 2$ (de la primera desigualdad) garantiza la convergencia del método. Para obtener la convergencia más rápida debemos buscar el valor w^* que minimiza el radio espectral. Dibujando gráficamente el valor del radio espectral obtenemos que

$$\rho(N) = \begin{cases} 1 - 19\,w/20 & 0 < w \leq w^* \\ w - 1 & w^* \leq w < 2 \end{cases},$$

por lo que el valor óptimo es

$$1 - 19\,w^*/20 = w^* - 1, \qquad w^* = \frac{40}{39} \approx 1.026.$$

Seguidamente vamos a realizar tres iteraciones del método de Guass-Seidel con relajación con w^*,

$$x_w^{(1)} = \begin{pmatrix} 12/13 \\ 158/195 \\ 758/975 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.923077 \\ 0.810256 \\ 0.777436 \end{pmatrix},$$

$$x_w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.982512 \\ 0.957265 \\ 0.791059 \end{pmatrix}, \quad x_w^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.996065 \\ 0.957798 \\ 0.79157 \end{pmatrix},$$

y tres iteraciones del método de Gauss-Seidel sin relajación ($w = 1$),

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 79/100 \\ 379/500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.79 \\ 0.758 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.979 \\ 0.9495 \\ 0.7899 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.99495 \\ 0.957475 \\ 0.791495 \end{pmatrix}.$$

Al ser el sistema de 3×3 la solución exacta se puede calcular por un método directo dando

$$x = \begin{pmatrix} 0.995789 \\ 0.957895 \\ 0.791579 \end{pmatrix}.$$

Comparando los errores obtenidos

$$\|x - x_w^{(3)}\|_\infty = 0.000276, \qquad \|x - x^{(3)}\|_\infty = 0.000839,$$

$$\|x - x_w^{(3)}\|_1 = 0.000382, \qquad \|x - x^{(3)}\|_1 = 0.001343,$$

se observa que el método con relajación tiene una convergencia más rápida (menor error), aunque las diferencias entre los dos métodos son pequeñas debido a que el valor óptimo del parámetro de relajación w^* es muy próximo a la unidad.

Método de la Potencia Iterada.

Si A es una matriz diagonizable, cuyo valor propio mayor en módulo está aislado, entonces, el método iterativo que se describe a continuación, converge a un vector propio asociado a dicho valor propio, como se establece en el teorema que sigue.

Teorema 5.12. *Si los valores propios de A satisfacen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$$

y si $v_1, v_2, ..., v_n$, denotan vectores propios linealmente independientes, asociados respectivamente a los valores propios anteriores, entonces la sucesión de vectores generada por

$$\begin{aligned} &z^{(0)}\, dado \quad \forall k \geq 0, \\ w^{(k+1)} &= Az^{(k)}, \\ z^{(k+1)} &= \frac{1}{\left\| w^{(k+1)} \right\|_\infty} w^{(k+1)}, \end{aligned}$$

converge a $\pm\frac{1}{\|v_1\|_\infty}v_1$, cuando $k \to \infty$, siempre que la adivinanza inicial, $z^{(0)}$, tenga alguna componente en v_1. La velocidad de esta convergencia será mayor, mientras menor sea el cuociente $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$.

Hacemos ver que en cada iteración, se produce simultáneamente una aproximación del valor propio λ_1. En efecto, cualquiera sea el índice j de una componente no nula del vector $z^{(k-1)}$, el cuociente

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}}{z_j^{(k-1)}}$$

será una aproximación del valor propio que convergerá en la misma medida en que la sucesión de vectores producida por el método de la Potencia Iterada converja al vector propio. Para garantizar la división por una coordenada no nula se escoge el índice j donde se alcanza el máximo de los módulos de éstas, es decir,

$$|z_j^{(k-1)}| = \|z^{(k-1)}\|_\infty = 1.$$

Método de Hotelling

Si A es una matriz normal entonces el Teorema de Schur asegura que existe una base ortonormal de autovectores $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ esto es, tal que:

$p_i{}^t p_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1,2,\ldots n$ Se construye entonces la matriz:

$$A_1 = A - \lambda_1 {(p_1 p_1^t)}\big/{p_1^t p_1}$$

que verifica:

$A_1 p_j = 0$; si $j = 1$

$A_1 p_j = \lambda_j p_j$; si $j \neq 1$

Por tanto, $Sp(A_1) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$
Aplicando el método de la potencia iterada a la matriz
$A1$ se obtiene su autovalor dominante, que es el autovalor intermedio si λ_2 *:*

Ejercicio:

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule por medio del método de potencia iterada el vector y valor propio dominante.
(b) Usando Hotelling y potencia iterada calcule los demás.