Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
Prof.: Jaime Michelow
Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa
Ecuaciones Diferenciales

Método de Euler:

Consideremos un problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t));\ t\ 2\ [t_0;\ t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

y una subdivisión del intervalo [t0; t0 + T] mediante los puntos:
t0 < t1 < t2 < :::: < tn < tn+1 < :::: < tN = t0 + T

Designaremos por *hn* a los valores (*tn*+1 ¡ *tn*) y por *yn* a las aproximaciones que se vayan obteniendo de *y*(*tn*), (*n* = 0; 1; :::;*N*).

En primer lugar, examinemos cómo se puede justificar el esquema de cálculo que se conoce con el nombre de método de Euler mediante diferentes interpretaciones: usando fórmulas de integración numérica; mediante desarrollos en serie de Taylor; de forma grafica; mediante interpolación polinómica.

Obtención del método de Euler mediante formulas de integración Numérica

Es conocido que la solución del problema de valor inicial verificara:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \quad \rightarrow \quad y(tn+1) = y(tn) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

El problema que plantea en general la expresión anterior es la evaluación de la integral que en ella aparece. Una idea para resolver este problema puede ser evaluarla mediante una fórmula de integración numérica. Al no ser exacta dicha fórmula, nos conducirá a un valor más o menos cercano al valor exacto de la solución. Una primera elección de la formula de integración numérica a emplear podría ser la fórmula del rectángulo con soporte en el extremo izquierdo del intervalo de integración, es decir:

$$y(tn+1) \approx y(tn) + hn\, f(tn, y(tn)) \rightarrow yn+1 = yn + hn\, f(tn, yn)$$

Con ello puede plantearse el siguiente algoritmo de cálculo:
Dado $y0 = y(\mathrm{t_o})$:

$$yn+1 = yn + hn\, f(tn;\ yn) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

Este esquema de cálculo de las soluciones aproximadas del P.V.I. se conoce con el nombre método de Euler explícito en honor al matemático Leonard Euler (nacido en Basilea (Suiza) en 1707 y muerto en San Petersburgo (Rusia) en 1783). En el proceso de obtención del método se ha utilizado una de las múltiples formas de aproximar la integral que aparece en la expresión formal de la solución. Pero podrían haberse considerado muchas otras. Por ejemplo, si se hubiera utilizado la fórmula del rectángulo soportada en el extremo derecho del intervalo se obtendrá:

$$y(tn+1) \approx y(tn) + hnf(tn+1, y(tn+1)) \rightarrow yn+1 - hnf(tn+1, yn+1) = yn$$

Con lo que podría plantearse el denominado método de Euler implícito (o Retrógrado) consistente en: $Dado\ y_o = y(t_o)$:

$$Resolver: yn + 1 - hn\, f(tn + 1, yn + 1) = yn \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$$

Este esquema de cálculo exige, en cada paso, resolver una ecuación algebraica. Para ello puede utilizarse alguno de los métodos planteados en el tema 4 de estos apuntes. Análogamente, si se hubiera evaluado la integral anterior mediante el método del trapecio, se obtendría el esquema:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \frac{h_n}{2}\big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\big) \rightarrow$$

$$y_{n+1} - \frac{h_n}{2} f(tn + 1, yn + 1) = y_n + \frac{h_n}{2} f(tn, yn)$$

del que se infiere el algoritmo de cálculo:
$Dado\ y0 = y(t0):$

$$Resolver: y_{n+1} - \frac{h_n}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \quad (n = 0,1,2,..,N - 1)$$

El esquema, también implícito, dado por la expresión anterior se designa habitualmente con el nombre de esquema de **Crank-Nicholson**. Los esquemas de Euler explícito, de Euler implícito y de **Crank-Nicholson** son un caso particular de la familia de esquemas que se obtienen ponderando mediante un parámetro $\mu\ 2$ [0*;* 1] el peso dado a $f(tn, y(tn))$ frente al dado a $f(tn+1, y(tn+1))$ en la fórmula de integración numérica con lo que se obtendrían las expresiones:

$$y(tn + 1) \approx y(tn) + hn\ \Big((1 - \theta) f\big(tn, y(tn)\big) + \theta f\big(tn + 1, y(tn + 1)\big)\Big)$$

$$yn + 1 - \theta hn\ (f(tn + 1, yn + 1) = yn + (1 - \theta) hnf(tn, yn)$$

que corresponden a los métodos conocidos con el nombre de θ-métodos. Para el caso en que $\theta = 0$ se recupera el método de Euler explícito, para el caso $\theta = 1$ el de Euler implícito y para $\theta = 0{,}5$ el de Crank-Nicholson. En general si $\theta \neq 0$ el método es implícito y exige, en cada paso, la resolución de una ecuación de tipo algebraico para determinar $yn+1$*:*

Esta forma de introducir el método de Euler y sus variantes muestra muchas otras formas de proceder (aproximando el valor de la integral de f mediante muy diferentes fórmulas de integración) que dan origen a muchos otros métodos numéricos de un paso. En los apartados siguientes presentaremos algunos otros métodos de un paso muy utilizados en la práctica. Pero antes de ello examinemos otras maneras diferentes (aunque equivalentes) de obtener los esquemas anteriores y analicemos cuál es el comportamiento del método de Euler y las variantes presentadas.

Obtención del método de Euler mediante desarrollos de Taylor

Si se supone que la función $y(t)$ es al menos de clase $C2([t0; tN])$, puede expresarse el valor de $y(t)$ en el punto $tn+1$ en función del valor de $y(t)$ en tn mediante el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h_n) = y(tn) + hn\, y'(tn) + \frac{h_n^2}{2} y''(tn) + \cdots$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n f\big(t_n, y(t_n)\big) + \frac{h_n^2}{2} y''(tn) + \cdots$$

Si *hn* es suficientemente pequeño, el desarrollo anterior podrá aproximarse despreciando los términos en los que aparezcan potencias de *hn* superiores o iguales a 2, obteniéndose así nuevamente el esquema de cálculo del método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h_n\, f(t_n, y_n)$$

Si en lugar de expresar el valor de *y*(*tn*+1) en función del valor de la función *y*(*t*) y de sus derivadas en *tn*, se hiciera al revés y se expresara el valor en *tn* en función del valor de *y*(*t*) y de sus derivadas en *tn*+1 se obtendrá la expresión siguiente:

$$y(t_n) = y(t_{n+1} - h_n) = y(t_{n+1}) - h_n y'(t_{n+1}) + \frac{\mathrm{h}_\mathrm{n}^2}{2} y''(t_{n+1}) + \cdots$$

$$y(t_{n+1}) - h_n f\big(t_{n+1}, y(t_{n+1})\big) = y(t_n) - \frac{\mathrm{h}_\mathrm{n}^2}{2} y''(t_{n+1}) + \cdots$$

de la que, despreciando los términos cuadráticas y posteriores en *hn*, se obtiene la fórmula que constituye el esquema de cálculo del método de Euler implícito (o retrogradó):

$$y_{n+1} - h_n\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n$$

Obtención del método de Euler mediante derivación numérica

Una forma equivalente de obtener el método de Euler consiste en considerar que, en un punto *t*¤ la derivada de la función *y*(*t*) está dada por:

$$y'(t^*) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t^* + h) - y(t^*)}{h}$$

Para valores de *h* suficientemente pequeños, puede aproximarse la expresión anterior, prescindiendo del “limite" , es decir por:

$$y'(t^*) \approx \frac{y(t^* + h) - y(t^*)}{h}$$

Aplicando esta fórmula de derivación numérica para $t^* = tn$ y con *h* = *hn* se tendrá que:

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_n + h_n) - y(t_n)}{h_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{hh_n}$$

con lo que la EDO del problema de valor inicial puede aproximarse por:

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{hh_n} \approx f\big(t_n, y(t_n)\big)$$

de donde se obtiene nuevamente la expresión del método de Euler explícito:

$$y_{n+1} = y_n + h_n\, f(t_n, y_n)$$

Si en lugar de aplicar la fórmula de derivación numérica para $t^* = tn$ se aplicase para $t^* = tn+1$ y tomando ahora *h* = -*hn* se tendría que:

$$\frac{y(t_{n+1} + h_n) - y(t_{n+1})}{-h_n} \approx f\big(t_{n+1}, y(t_{n+1})\big)$$

de donde se podría obtener nuevamente la expresión del método de Euler implícito:

$$y_{n+1} - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n$$

Ejemplo: aplicación a un problema regido por una única ecuación de variables separadas.

Con el objeto de poder comparar la solución aproximada con la solución exacta comencemos considerando un problema de valor inicial sencillo: regido por una EDO de variables separadas. Ello nos permitirá ilustrar la práctica del método y realizar algunas primeras consideraciones.

Considérese el P.V.I. formulado por:

$$\begin{cases} y'(t) = 2t + e^t, \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La solución analítica de este P.V.I. está dada por:

$$y(t) = -1 + \mathrm{t}^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{t}}$$

y con ella podremos comparar el comportamiento de los métodos planteados. Resolvamos el problema por el método de Euler explícito determinando los valores de la solución aproximada en los instantes $t0 = 0{,}0$, $t1 = 0{,}1$, $t2 = 0{,}2$, $t3 = 0{,}3$; $t4 = 0{,}4, \ldots, t9 = 0{,}9$; y $t10 = 1$, siendo la longitud del paso de integración en todas las etapas de cálculo $h = 0{,}1$. Con ello el esquema de cálculo, según vimos anteriormente puede resumirse en:

$$y_0 = 0$$
$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1\,(2\,t_n + e^{tn})$$

Por tanto los primeros valores calculados serán:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = y_0 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot t_1 + e^{t1}) = 0 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}1 + e^{0,1}) = 0{,}13052$$
$$y_2 = y_1 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot t_2 + e^{t2}) = 0{,}1352 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}2 + e^{0,2}) = 0{,}29266$$
$$y_3 = y_2 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot t_3 + e_{t3}) = 0{,}29266 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}3 + e^{0,3}) = 0{,}48764$$
$$y_4 = y_3 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot t_4 + e_{t4}) = 0{,}48764 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}4 + e^{0,4}) = 0{,}65182$$

valores que son sensiblemente mayores que los obtenidos por el método explícito.

Resolvamos ahora por el método de Crank-Nicholson. Este esquema, sobre este P.V.I. se formula:

$$y_0 = 0$$
$$y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot [(2 \cdot t_n + e^{tn}) + (2 \cdot t_{n+1} + e^{tn+1})], \quad (n = 0,1,2, \ldots, 9)$$

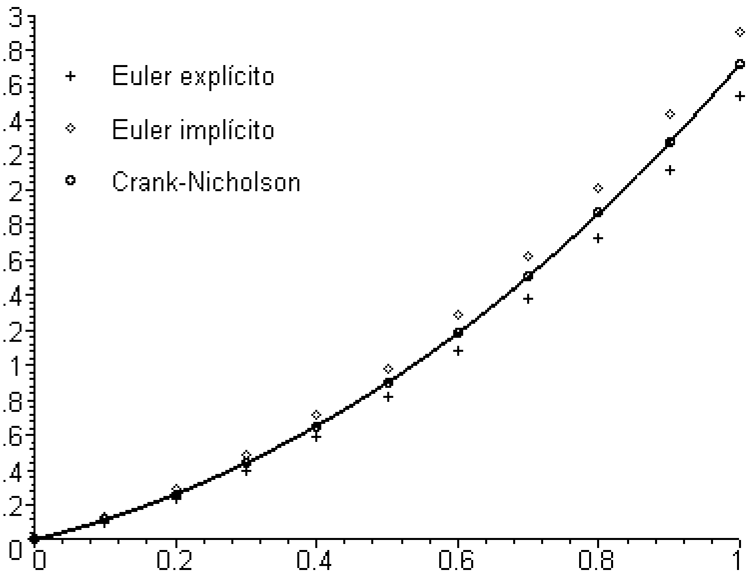
y los primeros valores a los que nos conduce son:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = y_0 + 0{,}05 \cdot (2 \cdot (t_0 + t_1) + e_{t0} + e_{t1}) =$$
$$= 0 + 0{,}05 \cdot (0{,}2 + 1 + e^{0,1}) = 0{,}11526$$

$$y_2 = y_1 + 0{,}05 \cdot (2 \cdot (t_1 + t_2) + e^{t1} + e^{t2}) =$$
$$= 0{,}11526 + 0{,}05 \cdot (0{,}6 + e^{0,1} + e^{0,2}) = 0{,}26158$$

$$y_3 = y_2 + 0{,}05 \cdot (2 \cdot (t_2 + t_3) + e^{t2} + e^{t3}) =$$
$$= 0{,}26158 + 0{,}05 \cdot (1{,}0 + e^{0,2} + e^{0,3}) = 0{,}44015$$

$$y_4 = y_3 + 0,05 \cdot (2 \cdot (t_3 + t_4) + e^{t3} + e^{t4}) =$$
$$= 0,26158 + 0,05 \cdot (1,4 + e^{0,3} + e^{0,4}) = 0.65182$$



Estos valores son intermedios entre los obtenidos por los métodos anteriores. En este caso es sencillo verificar cuáles son los valores más precisos pues la solución analítica es conocida. Podemos representar los valores obtenidos junto a la solución exacta obteniendo:

Puede observarse en la figura anterior que el método de Crank-Nicholson es el que mejor se ajusta a la solución entre los tres planteados mientras que el de Euler explícito aproxima la solución \por defecto" en tanto que el implícito lo hace \por exceso". Pero también puede apreciarse que los errores van creciendo a medida que avanza el instante de cálculo. Ello ya nos indica que no sólo deberemos intentar conocer el error que se comete al predecir con un método la solución aproximada y_{n+1} partiendo del valor exacto en el instante anterior $y(t_n)$ sino que deberá también prestarse atención a cómo los errores cometidos en una etapa influyen en el error de las siguientes. Al ¯n y al cabo, cuando obtenemos y_{n+1} no partimos de $y(t_n)$ sino de y_n y, en general $y_n \neq y(t_n)$.

Métodos de Runge-Kutta

Descripción.

Consideramos el problema de valor inicial (*P.V.I.*) y la subdivisión del interval $[t_0,t_N]$ generando los puntos $t_0 < t_1 < :::: < t_n < :::: < t_N$, y con subintervalos $[t_n,t_{n+1}]$ de longitud h_n ($n = 0, 1, ...,N-1$).

Siendo $y(t_n)$ el valor de la solución en t_n, el valor exacto de la solución en t_{n+1} puede estimarse mediante la expresión:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \qquad (3)$$

Una forma de obtener aproximaciones de dicho valor consistirá en aproximar la integral que aparece en 3 mediante una fórmula de integración numérica:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot f\left(t_{nj}, y_{nj}\right) \qquad (4)$$

donde p es el número de puntos de integración usados en la fórmula escogida, $h_n a_j$ ($j = 1; :::; p$) son los pesos de dicha fórmula, $t_{n,j}$ ($j = 1; :::; p$) son los p puntos pertenecientes al intervalo $[t_n; t_{n+1}]$ que actúan como soporte para la fórmula de integración y, finalmente, $y_{n,j}$ son los valores (o una aproximación de ellos) de $y(t)$ en los puntos $t_{n,j}$.

El problema que plantea el uso de (4) es cómo evaluar $y_{n,j}$. Para ello, de forma similar a (3) se considerará que:

$$y(t_{n,j}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt \quad j = 1,2, \dots, P \quad (5)$$

por lo que una aproximación de dichos valores puede obtenerse, nuevamente, aproximando la integral anterior. Y en los métodos de Runge-Kutta esta aproximación se realiza utilizando los mismos puntos que en la expresión (4), es decir:

$$y_{nj} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{p} b_{ji} \cdot f(t_{ni}, y_{ni}) \quad (j = 1, \dots, p) \quad (6)$$

donde $h_n b_{j,k}$ ($j; k = 1; :::; p$) es el peso otorgado al punto $t_{n,k}$ en la fórmula de integración numérica utilizada para aproximar el valor de $y(t)$ en $t_{n,j}$.

Las expresiones dadas por (6) más la expresión 4 forman un sistema de (p + 1) ecuaciones en las que las incógnitas son los p valores y_{nj} ($j = 1,\dots, p$) y el valor y_{n+1}. El uso de una u otra fórmula de integración numérica en las expresiones (4) y (6) conduce a muy distintos esquemas de tipo Runge-Kutta. Por ello para definir una fórmula de Runge-Kutta se debe concretar cuáles son los puntos t_{nj} ($j = 1,\dots, p$) utilizados en las fórmulas de integración numérica, cuáles son los coeficientes b_{jk} ($j,k = 1,\dots, p$) usados en las fórmulas (6) y cuáles son los coeficientes a_j ($j=1,\dots,p$) que intervienen en la expresión (4). Habitualmente, los puntos t_{nj} se suelen definir mediante una expresión del tipo:

$$t_{n;j} = t_n + c_j \cdot h_n \quad (j = 1, \dots, p)$$

y el esquema se define mediante la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc|}
\cline{2-5}
c_1 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\
c_2 & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_p & b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,p} \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & a_1 & a_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{a_p}
\end{array}$$

En dicha tabla designaremos por vector a, matriz B y matriz C al vector y matrices siguientes:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_p \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Ejemplos de métodos.

Puede diseñarse un método de Runge-Kutta en el que la fórmula que nos proporcione *yn*+1 utilice la fórmula de Simpson:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{b-a}{6}\right) + \varphi(b)\right)$$

Para ello, se tomará $p = 3$ y en el intervalo $[t_n;\ t_{n+1}]$ los puntos de integración serán:

$t_{n1} = t_n$ $(c1 = 0)$
$t_{n2} = t_n + 0{;}5\ h_n$ $(c2 = 0{;}5)$
$t_{n3} = t_n + h_n$ $(c3 = 1)$

y los pesos de integración en la fórmula considerada serán:

$$a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = \frac{4}{6},\ a_3 = \frac{1}{6}$$

resultando:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \left(\frac{1}{6}\cdot f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \frac{4}{6}\cdot f(t_{n,2}, y_{n,2}) + \frac{1}{6}\cdot f(t_{n,3}, y_{n,3})\right)$$

Para emplear la fórmula anterior es necesario evaluar: $y_{n,1}$ ($= y_n$), $y_{n,2}$ e $y_{n,3}$. Para ello se sabe que:

$$y_{n,1} = y_n$$

$$y_{n,2} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y_{n,3} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+3}} f(t, y(t))\,dt$$

y evaluando la primera de las integrales mediante la fórmula del trapecio:

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\,dt \approx \frac{t_{n,2} - t_n}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n,2}, y_{n,2})\right)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\,dt \approx \frac{h_n}{4}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n,2}, y_{n,2})\right)$$

y la segunda mediante el método del punto medio:

$$\int_{t_n}^{t_{n+3}} f(t, y(t))\,dt \approx (t_{n,3} - t_n) f(t_{n,2}, y_{n,2}) = h_n f(t_{n,2}, y_{n,2})$$

resultará:

$y_{n,1} = y_n \qquad b_{1,1} = 0,\ b_{1,2} = 0, b_{1,3} = 0$

$y_{n,2} = y_n + \frac{h_n}{4}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n,2}, y_{n,2})\right) \qquad b_{2,1} = \frac{1}{4},\ b_{2,2} = \frac{1}{4}, b_{2,3} = 0$

$y_{n,3} = y_n + h_n f(t_{n,2}, y_{n,2}) \qquad b_{3,1} = 0,\ b_{3,2} = 0, b_{3,3} = 0$

La segunda de las expresiones anteriores es una ecuación (en general no lineal) que deberá resolverse mediante algún método numérico.

Algoritmo del método de Runge-Kutta clásico.

Considérese un método de Runge-Kutta genérico definido, en cada paso, por las expresiones:

$$t_{n,j} = t_n + c_j \cdot h_n \qquad (j = 1, \dots, p)$$

$$y_{n,j} = y_n + h_n \cdot \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \cdot f(t_{n,i}, y_{n,i}) \qquad (j = 1, \dots, p)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

A la hora de realizar un algoritmo de un método como el anterior, computacionalmente es más eficaz denotar por:

$$W_{n,j} = f\left(t_n, y_n + h_n \cdot \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \cdot W_{n,i}\right) \qquad (j = 1, \dots, p) \qquad (8)$$

con lo que:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot W_{n,j} \qquad (9)$$

La expresión (8) representa un sistema de p ecuaciones (en general no lineales) que nos proporcionará los valores de $W_{n,j}$ en cada paso. Estos valores introducidos en (9) nos determinarán la solución aproximada y_{n+1}. Fácilmente puede comprobarse que ambas expresiones son equivalentes a las antes utilizadas para describir el método.

Utilizando esta forma de proceder, se recoge a continuación un algoritmo del método de Runge-Kutta clásico (que es el más frecuentemente utilizado) para la resolución de un problema de valor inicial regido por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como el siguiente:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_o \le t \le t_N \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

INICIO DEL ALGORITMO

Dados:

$t_o, t_1, \ldots, t_N = t_o + T, la\ expresión\ de\ la\ función\ f\ (t, y(t))\ y\ el\ vector\ y(0)$

Para $n = 0$; hasta $n = N$ -1, con paso 1, hacer:

$h_n \leftarrow t_{t+1} - t_n$

$W_1 \leftarrow f\ (t_n, y_{(n)})$

$W_2 \leftarrow f\ (t_n + \frac{h_n}{2}, y(n) + \frac{h_n}{2} W_1)$

$W_3 \leftarrow f\ (t_n + \frac{h_n}{2}, y(n) + \frac{h_n}{2} W_2)$

$W_4 \leftarrow f\ (t_n + h_n, y(n) + h_n W_3)$

$$y^{(n+1)} \leftarrow y^{(n)} + \frac{h_n}{6}(W_1 + 2(W_2 + W_3) + W_4)$$

Escribir el vector $y^{(n+1)}$ como solución aproximada en t_{n+1}.

Fin.