

Auxiliar Cálculo Numérico

Prof. Jaime Michelow

Aux. Ignacio Trujillo – Hugo Ulloa

Este primer ejercicio es netamente pedagógico, con él se quiere dejar patente que al resolver una ecuación en forma iterativa, el α que acompaña al x_i debe ser menor que uno para asegurar la convergencia de la solución. Al analogarlo a la resolución de un sistema de ecuaciones en forma iterativa, pediremos que los valores propios de la tasa (matriz que acompaña al $\bar{x}^{(i)}$) sean todos menores que uno para asegurar convergencia, es decir que el radio espectral sea menor que uno.

¿Para qué valores de α , la iteración

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta, \quad \text{con } x_0 = a, \quad \beta \neq 0,$$

converge? Es decir, ¿para qué valores de α ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i,$$

existe?

Solución. Iterando obtenemos

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha x_{n-1} + \beta = \alpha^2 x_{n-2} + \beta \alpha + \beta = \dots \\ &= a \alpha^n + \beta \alpha^{n-1} + \dots + \beta \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} s &= \beta \alpha^{n-1} + \dots + \beta \alpha + \beta, \\ \alpha s &= \beta \alpha^n + \dots + \beta \alpha, \end{aligned}$$

con lo que restando

$$(\alpha - 1) s = \alpha^n \beta - \beta = \beta (\alpha^n - 1),$$

y finalmente

$$x_n = a \alpha^n + \beta \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Esta secuencia convergerá si $|\alpha| < 1$ al valor

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_n = \frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

que corresponde al punto fijo de la iteración (sucesión), ya que si ésta converge a \bar{x} entonces

$$\bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta, \quad \bar{x} = \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

que es el punto fijo.

Conceptos básicos

En general, en todos los procesos iterativos para resolver el sistema $A\vec{x} = b$ se recurre a una cierta matriz Q , llamada matriz *descomposición*, escogida de tal forma que el problema original adopte la forma equivalente:

$$Q\vec{x}^{(k+1)} = (Q - A)\vec{x}^{(k)} + b \quad \text{con } (k \geq 0) \quad (1)$$

El vector inicial $\vec{x}^{(0)}$ puede ser arbitrario, aunque si se dispone de un buen candidato como solución éste es el que se debe emplear. La aproximación inicial que se adopta, a no ser que se disponga de una mejor, es la idénticamente nula $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. A partir de la ecuación (1) se puede calcular una sucesión de vectores $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$

Nuestro objetivo es escoger una matriz Q de manera que:

Método de Jacobi

En la **iteración de Jacobi**, se escoge una matriz Q que es diagonal (D) y cuyos elementos diagonales son los mismos que los de la matriz A . La matriz Q toma la forma:

$$Q = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y la ecuación general (1) se puede escribir como

$$D\vec{x}^{(k+1)} = (D - A)\vec{x}^{(k)} + b \quad \text{con } (k \geq 0) \quad (2)$$

Luego, definamos $R=A-D$:

$$R = A - D = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

la ecuación (2) se puede reescribir como:

$$D\vec{x}^{(k+1)} = -R\vec{x}^{(k)} + b \quad \text{con } (k \geq 0)$$

El producto de la matriz D por el vector columna $x^{(k+1)}$ será un vector columna. De modo análogo, el producto de la matriz R por el vector columna $x^{(k)}$ será también un vector columna. La expresión anterior, que es una ecuación vectorial, se puede expresar por n ecuaciones escalares (una para cada componente del vector). De este modo, podemos escribir, para un elemento i cualquiera y teniendo en cuenta que se trata de un producto matriz-vector:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^n r_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

Si tenemos en cuenta que en la matriz D todos los elementos fuera de la diagonal son cero, en el primer miembro el único término no nulo del sumatoria es el que contiene el elemento diagonal d_{ii} , que es precisamente a_{ii} . Más aún, los elementos de la diagonal de R son cero, por lo que podemos eliminar el término $i=j$ en el sumatoria del segundo miembro. De acuerdo con lo dicho, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

de donde despejando $x_i^{(k+1)}$ obtenemos:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

que es la expresión que nos proporciona las nuevas componentes del vector $x^{(k+1)}$ en función de vector anterior $x^{(k)}$ en la iteración de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

La **iteración de Gauss-Seidel** se define al tomar $Q=D+L$ como la parte triangular inferior de A incluyendo los elementos de la diagonal:

$$D + L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si, como en el caso anterior, definimos la matriz $U = A - Q \Rightarrow -U = Q - A$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y la ecuación se puede escribir en la forma:

$$Q\bar{x}^{(k+1)} = (D + L)\bar{x}^{(k+1)} = -U\bar{x}^{(k)} + b = -(Q - A)\bar{x}^{(k)} + b$$

$$\text{Es decir, } (D + L)\bar{x}^{(k+1)} = -U\bar{x}^{(k)} + b$$

Un elemento cualquiera, i , del vector $Qx^{(k)}$ vendrá dado por la ecuación:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

Si tenemos en cuenta la peculiar forma de las matrices Q y R , resulta que todos los sumandos para los que $j > i$ en la parte izquierda son nulos, mientras que en la parte derecha son nulos todos los sumandos para los que $j \leq i$. Podemos escribir entonces:

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i,$$

Ahora, liberando el último término de la sumatoria de la derecha.

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

de donde despejando $x_i^{(k)}$, obtenemos:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

Obsérvese que en el método de Gauss-Seidel los valores actualizados de x_i sustituyen de inmediato a los valores anteriores, mientras que en el método de Jacobi todas las componentes nuevas del vector se calculan antes de llevar a cabo la sustitución. Por contra, en el método de Gauss-Seidel los cálculos deben llevarse a cabo por orden, ya que el nuevo valor x_i depende de los valores actualizados de x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Dados

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resuelva el sistema $Ax = b$ por el método de Gauss-Jacobi y determine la tasa de convergencia usando las normas ∞ y 1. Haga lo mismo con el método de Gauss-Seidel y deduzca cuál de ellos converge más rápidamente.

Solución.

- (a) El método de Gauss-Jacobi se basa en la descomposición $A = L + D + U$ y tiene la iteración

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(k)}).$$

Operando, obtenemos la secuencia Operando, obtenemos la secuencia

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 1/2 \\ 7/5 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 111/100 \\ 6/5 \\ 111/100 \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.929 \\ 1.055 \\ 0.929 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9906 \\ 0.9645 \\ 0.9906 \end{pmatrix},$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.01159 \\ 0.9953 \\ 1.01159 \end{pmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.00025 \\ 1.0058 \\ 1.00025 \end{pmatrix},$$

que claramente converge a la solución exacta $(1, 1, 1)^T$.

- (b) El método de Gauss-Seidel se basa en la iteración

$$x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}(b - Ux^{(k)}).$$

Operando, obtenemos la secuencia

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 39/50 \\ 513/500 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0634 \\ 1.02048 \\ 0.987516 \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.995104 \\ 0.995276 \\ 1.00191 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.00123 \\ 1.00082 \\ 0.999632 \end{pmatrix},$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.999792 \\ 0.999848 \\ 1.00007 \end{pmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.00004 \\ 1.00003 \\ 0.999988 \end{pmatrix},$$

que claramente converge, y más rápidamente que el Gauss-Jacobi, a la solución exacta $(1, 1, 1)^\top$.

(c) La tasa de convergencia del método de Gauss-Jacobi viene dada por la norma de

$$J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & 1/10 \\ -1/5 & 0 & -3/10 \\ 1/10 & 3/10 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyas normas son $\|J\|_1 = 0.6$ y $\|J\|_\infty = 0.5$. La tasa de convergencia del método de Gauss-Seidel viene dada por la norma de

$$S = (L + D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 3/50 & -7/25 \\ 0 & -6/125 & 37/500 \end{pmatrix},$$

cuyas normas son $\|J\|_1 = 227/500 = 0.454$ y $\|J\|_\infty = 2/5 = 0.4$. Estos resultados confirman la convergencia más rápida observada para el método de Gauss-Seidel.

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0 , y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

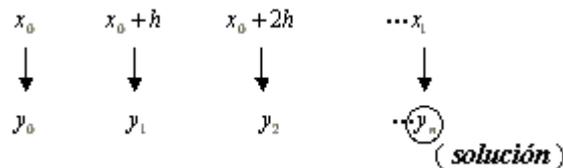
$$y(x_i) = f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_i) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)h + y_0$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\frac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:



Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0$$

Para obtener y_1 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1) , y por lo tanto, si sustituímos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = f(x_1, y_1)h + y_1$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = f(x_n, y_n)h + y_n$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h .

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0,5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

Solución Analítica.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0,5) = e^{(0,5)^2} = 1,28403$$

Solución Numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0,5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0,1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) & = & 1 + 0.1[2(0.1)(1)] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la fórmula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\% \right| = 5.42\%$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \\ h & = & 0.1 \\ f(x, y) & = & x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 1.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 2 + 0.1[1^2 + 0.5(2)^2] & = & 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$

MÉTODO DE EULER MEJORADO

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

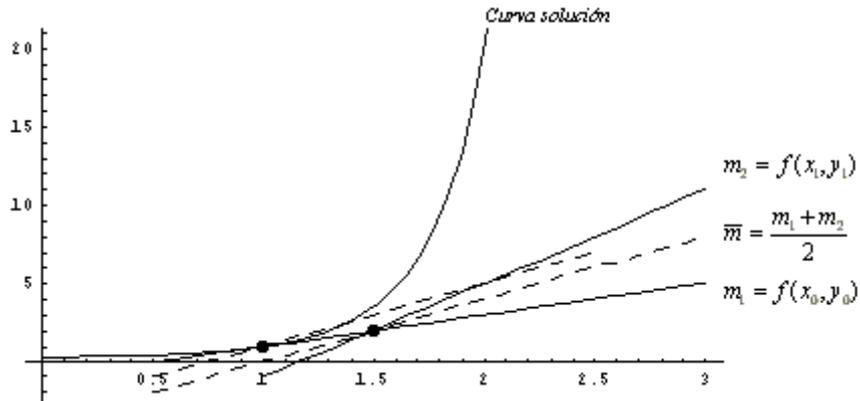
La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \right]$$

donde

$$y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:



En la gráfica, vemos que la pendiente promedio \bar{m} corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1) , donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$\begin{aligned} y' &= 2xy \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Solución

Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n .

Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ h = 0.1 \\ f(x, y) = 2xy \end{cases}$$

En nuestra primera iteración tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \\ \therefore y_1 = y_0 + h \left(\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2} \right) = 1.01 \end{array} \right.$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^* .

Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ y_2^* = y_1 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0302 \\ y_2 = y_1 + h \left(\frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)}{2} \right) = 1.040704 \end{array} \right.$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (Euler 1) y el de y_2^* . El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

Concluimos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.05\%$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%!

Veamos un segundo ejemplo.

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar $y(1.3)$ si tenemos :

$$\begin{aligned}y' &= x - y + 5 \\ y(1) &= 2\end{aligned}$$

Solución

Tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}h &= 0.1 \\ f(x, y) &= x - y + 5 \\ x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2\end{aligned}$$

En una primera iteración, tenemos lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + h = 1.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2.4 \\ y_1 = 2 + 0.1 \left(\frac{4 + (1.1 - 2.4 + 5)}{2} \right) = 2.385 \end{array} \right.$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.385
2	1.2	2.742925
3	1.3	3.07635

Concluimos entonces que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.07635$$

Finalmente, veamos el tercero y último método que estudiaremos en este curso. Por simplicidad del curso, no veremos la justificación formal de estas últimas fórmulas.

MÉTODO DE RUNGE – KUTTA

Sin entrar en mucho detalle, mencionamos solamente que el método de Runge-Kutta cambia la dirección en el sentido de que no sigue la misma línea de los métodos de Euler. De hecho está basado en una aplicación de los polinomios de Taylor.

Comentamos sin embargo, que el método de Runge-Kutta si contiene como casos especiales los de Euler.

Las fórmulas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

donde

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Se conocen como las reglas o fórmulas de Runge-Kutta de orden cuatro para la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Ejemplo 1

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$ dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Solución

Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores.

Segundo, procedemos con los mismos datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Para poder calcular el valor de y_1 , debemos calcular primero los valores de k_1 , k_2 , k_3 y k_4 . Tenemos entonces que:

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.05)(1)] = 0.01$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.05)(1.005)] = 0.01005$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.01005) + 0.020201] = 1.01005$$

Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.15)(1.02010)] = 0.03060$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.15)(1.02535)] = 0.03076$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2(0.2)(1.04081)] = 0.04163$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.04081$$

El proceso debe repetirse hasta obtener y_5 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417

4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

Concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:

$$y(0.5) \approx 1.28403$$

Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_r| = \left| \frac{1.28402 - 1.28403}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.0007\%$$

Con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación!

Ejemplo 2

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$ dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= x + y \\ y(2) &= 4 \end{aligned}$$

Solución

Igual que siempre, tomamos $h = 0.1$ y llegaremos a la aproximación en dos pasos. Con esta aclaración, tenemos los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \\ h = 0.1 \\ f(x, y) = x + y \end{array} \right.$$

Primera Iteración:

$$x_1 = x_0 + h = 2.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.1[2 + 4] = 0.6$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.05 + 4.3] = 0.635$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.05 + 4.3175] = 0.63675$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2.1 + 4.63675] = 0.673675$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 4.6362$$

Segunda Iteración:

$$x_2 = x_1 + h = 2.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2.1 + 4.6362] = 0.67362$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.15 + 4.97301] = 0.7123$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.15 + 4.99235] = 0.71424$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2.2 + 5.35044] = 0.75504$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 5.34982$$

Concluimos entonces que el valor buscado es:

$$y(2.2) \approx 5.34982$$