Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
Prof.: Jaime Michelow
Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa
Auxiliar: Normas- Gauss-Seidel

Definiciones de normas.

1. Sea $\| \|_p$ una norma en R^n. Se define la norma matricial subordinada a esta norma vectorial como
$$\forall A \text{ Matriz real cuadrada de tamaño } n \quad \|A\|_p = \sup_{x\in R^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{x\in R^n, \|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

2. Sea A una matriz real y cuadrada de tamaño n. Se define el **radio espectral** de A, que se denotara por $r(A)$, como el modulo del mayor valor propio en modulo de A. Es decir,
$$r(A) = \max_{l\in s(A)} |l|$$

El radio espectral no es una norma matricial y sin embargo juega un rol muy parecido a las normas matriciales subordinadas. Su relación con éstas quedara establecida en las propiedades que siguen.

3. Para cualquier matriz A, para cualquier vector $x \in R^n$, la norma vectorial y su correspondiente norma matricial subordinada satisfacen.
$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

4. Para cualquier par de matrices A y B, para cualquier norma matricial subordinada
$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

5. Para cualquier norma matricial subordinada, se tiene que la norma de la matriz identidad vale 1, es decir.
$$\|I\| = 1$$

6. Para cualquier norma subordinada, para cualquier matriz A
$$r(A) \leq \|A\|$$

7. Si A es una matriz invertible entonces toda norma subordinada satisface
$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$$

8. Sea A una matriz invertible. Se llama número de condicionamiento de A a la cantidad
$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Gauss-Seidel. (G-S)

Sea $A = D + E + F$, si la matriz A no tiene elementos diagonales nulos (D es invertible), entonces el sistema $Ax = b$ será equivalente al problema de punto fijo

$$x = D^{-1}(-E - F)x + D^{-1}b$$

Donde

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & si\, i \leq j \\ A_{ij} & si\, i > j \end{cases} \qquad F_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & si\, i < j \\ 0 & si\, i \geq j \end{cases}$$

El metodo de Gauss-Seidel se reduce al siguiente sistema iterativo.

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}E \cdot x^{(k+1)} - D^{-1}F \cdot x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)}\left(I + D^{-1}E\right) = D^{-1}F \cdot x^{(k)} + D^{-1}$$

$$x^{(k+1)} = \left(I + D^{-1}E\right)^{-1} D^{-1}F \cdot x^{(k)} + \left(I + D^{-1}E\right)^{-1} D^{-1}b$$

Para la convergencia del método se debe cumplir que la matriz que acompaña el término $x^{(k)}$ sea diagonal dominante.

Otra forma…

Sea el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

De la ecuación 1 despejamos x_1, de la segunda ecuación despejamos x_2,…, de la ecuación n despejamos x_n. Esto nos da el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Este ultimo conjunto de ecuaiones son las que forman el método iterativo. Para comensar con el proceso iterativo, le entregamos el valor de cero a las variables $x_2,\ldots,x_n$, esto entrega un primer valor para x_1, más precisamente, se tiene que:

$$.x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

En seguida, se sustituye este valor de x_1 en la ecuación 2, y las variables $x_3,\ldots,x_n$ siguen teniendo valor de cero, esto se repite hasta llegar a la ultima variable. Todo este paso nos arroja una lista de primeros valores para el vector incógnita, la cual conforma el primer paso iterativo. Luego que se tienen todos lo valores de la primera iteración se vuelve a iterar para x_1 con los nuevos valores de $x_2,\ldots,x_n$, así recursivamente.

Problema 1. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ by + z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Determinar los valores de a y b para que el sistema tenga solución única.
(b) Determinar los valores de a y b para asegurar la convergencia del método Gauss-Seidel.

Solución.

(a) $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 - (a+b) \neq 0 \Rightarrow (a+b) \neq 1$

(b) El método G-S convergerá si su matriz de convergencia

$$S = (L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & ab & -b \end{pmatrix}$$

Tiene que tener radio espectral menor que la unidad. Se debe obtener sus valores propios.

$$|S - l_s I| = \begin{vmatrix} -l_s & a & 0 \\ 0 & -a - l_s & 1 \\ 0 & ab & -b - l_s \end{vmatrix} = 0$$

Es decir $l_s((a + l_s)(b + l_s) - ab) = 0$, luego $l_s^1 = 0$, $l_s^2 = 0$, $l_s^3 = -(a+b)$
Por lo tanto $r(S) = |a+b|$, se debe imponte que el radio que $r(S) = |a+b| < 1$ para tener convergencia.

Problema Propuesto. Para la resolución del sistema $Bx = b$, donde $x, b \in R^2$, se propone el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = b + Ax^{(k)}, \; k \geq 0$$

Donde

$$\begin{pmatrix} l & c \\ 0 & -l \end{pmatrix}, \qquad c, l \in R$$

(a) ¿Para que valores de l y c existe solución única?
(b) Sea x_{PF} el punto fijo de iteración. calcule $x_{PF} - x^{(k)}$ para aquellos valores de l y c para los que existe solución unica. Suponga que $|l| < 1$.
(c) Para las condiciones de la parte (b), ¿Cómo se comporta $\|x_{PF} - x^{(k)}\|_\infty$ y $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$, cuando $k \to \infty$, ?,

Problema 2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss-Seidel utilizando un error de 10^{-3}.

$$
\begin{aligned}
0.1x_1 + 7.0x_2 - 0.3x_3 &= -19.30 \\
3.0x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10.3x_3 &= -71.40
\end{aligned}
$$

Solución: Primero ordenamos las ecuaciones, de modo que en la diagonal principal estén los coeficientes mayores para asegurar la convergencia.

$$
\begin{aligned}
3.0x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 + 7.0x_2 - 0.3x_3 &= -19.30 \\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10.3x_3 &= -71.40
\end{aligned}
$$

Despejamos cada una de las variables sobre la diagonal y luego iteramos.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7.85 - (0.1x_2 + 0.2x_3)}{3} \\
x_2 &= \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7} \\
x_3 &= \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}
\end{aligned}
$$

iteración 0	valores	Error $\left\|x_i^{k+1} - x_i^k\right\|$
x_1	2.616667	
x_2	-2.794524	
x_3	7.005610	
iteración 1		
x_1	2.990557	0.373890
x_2	-2.499625	0.294899
x_3	7.000291	0.005319
iteración 2		
x_1	3.000032	0.009475
x_2	-2.499988	0.000363
x_3	6.999999	0.000292
iteración 3		
x_1	3.000000	0.000032
x_2	-2.500000	0.000012
x_3	7.000000	0.000001

Luego de la tercera iteración se obtiene la precisión que se buscaba (10^{-3})

Recomendaciones: Estudiar las propiedades de normas vistas en clases. Conocer las condiciones de convergencia del Método Gauss-Seidel, manejar el Algoritmo de iteración de G-S (P2). Hacer el problema Propuesto.