Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
Prof.: Jaime Michelow
Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa
Guía de Mínimos cuadrados –Problemas Propuestos Control 3

3.2. Funciones Lipschitz, Teorema del punto fijo de Banach.

Un tipo particular de funciones continuas son las llamadas *funciones Lipschitz.* Decimos que una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ es *Lipschitz en* Ω *de constante* $K > 0$, si

$$(\forall\, x_1, x_2 \in \Omega) : \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \, \le \, K \, \|x - y\| \, . \tag{3.12}$$

Tal función es automáticamente continua relativamente a Ω. En efecto, Si $x_n \to x_0 \in \Omega$ con $x_n \in \Omega \; \forall n$, entonces se tiene que $\|x_n - x_0\| \to 0$. Se sigue que

$$0 \, \le \, \|f(x_n) - f(x_0)\| \, \le \, K \, \|x_n - x_0\| \, \to \, 0,$$

de modo que $\|f(x_n) - f(x_0)\| \to 0$, lo que significa $f(x_n) \to f(x_0)$. Como la sucesión $x_n \to x_0$ escogida es arbitraria, concluimos que f es continua en x_0, esto en todo $x_0 \in \Omega$.

Un Teorema fundamental para determinar existencia de soluciones de ecuaciones no-lineales en $\mathbb{R}^N$ es el llamado *Teorema del punto fijo de Banach.* Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Escribamos

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)), \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

El teorema del punto fijo de Banach trata de la resolución del sistema de N ecuaciones y N incógnitas,

$$x_j - f_j(x_1, \ldots, x_N) \, = \, 0 \, , \quad j = 1, \ldots, N,$$

esto es, la ecuación en $\mathbb{R}^N$ $x = f(x)$. Si x satisface esta igualdad, decimos que x es un *punto fijo* de f.

Decimos, por otra parte que f es *contractante en* Ω si es Lipschitz de constante $K < 1$, esto es, si existe $0 < K < 1$ tal que la relación (3.12) se cumple.

Teorema 3.3. *(Teorema del punto fijo de Banach) Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *una función contractante. Supongamos además que* Ω *es cerrado, y que* $f(x) \in \Omega$ *para todo* $x \in \Omega$. *Entonces existe un único* $\bar{x} \in \Omega$ *tal que* $\bar{x} = f(\bar{x})$, *en otras palabras,* f *posee un único punto fijo en* Ω.

Demostración. Para probar este resultado consideramos la sucesión de puntos de Ω, definida recursivamente como sigue: Dado $x_0 \in \Omega$ cualquiera,

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \cdots \, .$$

Para probar la existencia de un punto fijo, demostraremos que esta sucesión es convergente, y que su límite es el punto fijo buscado. Observemos que, como f es Lipschitz de constante K en Ω, entonces para todo $j \geq 1$,

$$\|x_{j+1} - x_j\| = \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq K\|x_j - x_{j-1}\| \ .$$

Así, iterando esta relación obtenemos

$$\|x_{j+1} - x_j\| \leq K\|x_j - x_{j-1}\| \leq K^2\|x_{j-1} - x_{j-2}\| \leq \cdots \leq K^j\|x_1 - x_0\|. \tag{3.16}$$

Demostraremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Supongamos que $1 \geq n < m$. Por la propiedad telescópica de la suma, tenemos

$$x_m - x_n = \sum_{j=n}^{m-1}(x_{j+1} - x_j) \ .$$

Por la desigualdad triangular para la norma, tenemos entonces que

$$\|x_m - x_n\| = \|\sum_{j=n}^{m-1}(x_{j+1} - x_j)\| \leq \sum_{j=n}^{m-1}\|x_{j+1} - x_j\| \ .$$

Así, de la relación (3.16), y del hecho que $K < 1$, obtenemos

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j\|x_1 - x_0\| \leq$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} K^j\|x_1 - x_0\| = \sum_{j=0}^{\infty} K^{j+n}\|x_1 - x_0\| = \frac{K^n}{1-K}\|x_1 - x_0\| \ .$$

Ahora, como $K < 1$ tenemos que $\frac{K^n}{1-K}\|x_1 - x_0\| \to 0$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{K^n}{1-K}\|x_1 - x_0\| \ < \ \varepsilon \ .$$

De este modo, tenemos que para $n, m \geq n_0$, $m > n$,

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \ .$$

Hemos probado que la sucesión x_n es de Cauchy. Por el teorema 2.2, deducimos que x_n es convergente en $\mathbb{R}^N$, digamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \ .$$

Por otra parte, como $x_n \in \Omega$ para todo n, se tiene que $\bar{x} \in \operatorname{Adh}(\Omega)$. Pero Ω es cerrado, por lo tanto $\bar{x} \in \Omega$. Además, como f es Lipschitz, es continua relativamente a Ω, y se sigue que, también,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) \ .$$

Pero x_{n+1} es una subsucesión de x_n, posee por lo tanto el mismo límite $\bar{x}$. Concluimos que

$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x} \ ,$$

y entonces $\bar{x}$ es un punto fijo de f en Ω. Hemos demostrado la existencia del punto fijo. Para probar unicidad, supongamos que existen $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Omega$ con $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_1)$, $\bar{x}_2 = f(\bar{x}_2)$. Entonces

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = \|f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)\| \le K\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \ ,$$

y se sigue que $(1-K)\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le 0$. Como $K < 1$, deducimos que $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = 0$, es decir $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Hemos probado que solo un punto fijo de f existe. $\square$

Iteración por el método del punto fijo de Banach

Por medio de este método podemos resolver ecuaciones de la forma $x = f(x)$.

Si la ecuación es de la forma $f(x) = 0$, solo se debe sumar x a ambos lados de la ecuación $h(x) = f(x) + x = x$
Como hemos dicho este método es de estilo iterativo, dada una aproximación x_i, la siguiente iteración se calcula con la formula:

$$x_{i+1} = h(x_i)$$

Para poder aplicar el método del punto fijo de Banach se debe cumplir que la función $h(x)$ sea contractante, continua y diferenciable.

El mecanismo para analizar contractancia es el siguiente:

$|h'(\xi)| < 1$ para ξ en el intervalo $[a, b]$ que contiene a la raíz, se dice contractante.
$|h'(\xi)| > 1$ para ξ en el intervalo $[a, b]$ que contiene a la raíz, se dice no contractante (diverge).
Notar que si es igual a $|h'(\xi)| = 1$ estaría derivando una función $h(x)$ lineal, luego la solución es trivial.

Problema 1

Debido a la acumulación de trabajos y tareas en la última semana, un alumno, que denotaremos por las iniciales "Rodrigo", no ha podido dormir lo suficiente. Sin embargo aún debe rendir un último control, y debido a su condición, se ve obligado a recurrir a un fármaco "al margen de lo legal".

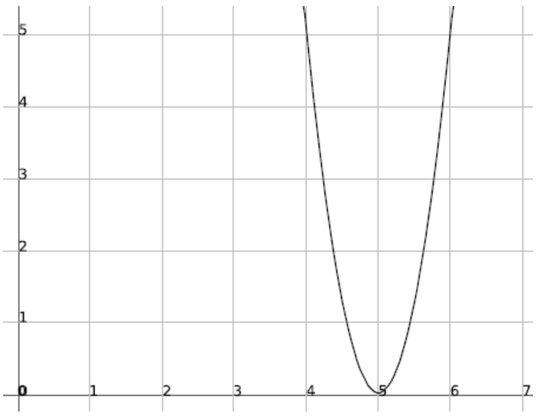
El fármaco, a partir de cierta dosis límite comienza a presentar un efecto retroactivo (somnolencia). La función que representa "Nivel de Sueño" v/s "Dosis del Fármaco" es:

$$\mathbf{f(x) = e^{-x} * x + 5 * (x - 5)^2}$$

a. Haga un gráfico de la función en el intervalo $0 \leq x \leq 7$

c. Encuentre la dosis óptima, pero ahora usando el método de Banach y tomando $x_0 = 4{,}5$. (Teorema del Punto Fijo de Banach)

Solución:



Para encontrar el óptimo debemos derivar $f(x)$ e igualarlo a cero.

$$f(x) = e^{-x} \cdot x + 5 \cdot (x-5)^2$$
$$f'(x) = -e^{-x} \cdot x + e^{-x} + 10 \cdot (x-5) = 0$$

Luego, lo dejamos de la forma de Banach.

$$e^{-x} \cdot (1-x) + 10x - 50 = 0$$
$$e^{-x} \cdot (1-x) + 9x - 50 = -x$$
$$x = e^{-x} \cdot (x-1) - 9x + 50 = h(x)$$

Para $x_0 = 4{,}5$

$$x_1 = e^{-x_0} \cdot (x_0 - 1) - 9x_0 + 50$$
$$x_1 = 9{,}5$$

Error es $error_{i+1} = \left| \dfrac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| * 100$

$$Error_1 = \left| \frac{x_1 - x_o}{x_1} \right| * 100 = \left| \frac{9{,}5 - 4{,}5}{9{,}5} \right| * 100 = 52{,}6\%$$

$$x_2 = e^{-x_1} \cdot (x_1 - 1) - 9x_1 + 50$$
$$x_2 = -35{,}5$$
$$Error_2 = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| * 100 = \left| \frac{-35{,}5 - 9{,}5}{-35{,}5} \right| * 100 = 126{,}7\%$$

Nos damos cuenta que no converge, demostrémoslo por contractancia.

$$h(x) = e^{-x} \cdot (x - 1) - 9x + 50$$
$$|h'(x)| = \left| -e^{-x} \cdot (x - 1) + e^{-x} - 9 \right| = \left| (2 - x)e^{-x} - 9 \right|$$

Como podemos ver en un intervalo cercano a la raiz,

$$\left| (2 - x)e^{-x} - 9 \right| > 1$$

Luego, no es contractante y por lo tanto diverge el proceso iterativo.

<u>Problema 2</u>:

De acuerdo al teorema anterior, f posee un único punto fijo en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ es obviamente un conjunto cerrado!). Esto significa que el sistema no-lineal de ecuaciones

$$2 - x + \sin y = 0\,,$$
$$6 + e^{-x^2} - 2y = 0\ .$$

posee una única solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>Solución</u>: Considerémoslo de esta forma.

$$y = \frac{6 + e^{-x^2}}{2} \quad (1)$$
$$2 + \sin y = x \quad (2)$$

Luego, reemplazando la ecuación (1) en la (2).

$$h(x) = 2 + \sin\left(\frac{6 + e^{-x^2}}{2} \right) = x \quad (3)$$

Veremos si nuestra función es contractante.

$$|h'(x)| = \left|\cos\left(\frac{6+e^{-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{e^{-x^2}}{2}\cdot -2x\right| \le \cdot\frac{x}{e^{x^2}} < 1 \forall \text{ x} \in \Re$$

Por algebra de funciones diferenciables es diferenciable. Luego, es contractante.

Para $x_0 = 2$

$$x_1 = 2 + \sin\left(\frac{6+e^{-x_o^2}}{2}\right)$$

$$x_1 = 2.132$$

Error es $error_{i+1} = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| * 100$

$$Error_1 = \left|\frac{x_1 - x_o}{x_1}\right| * 100 = \left|\frac{2.132 - 2}{2.132}\right| * 100 = 6{,}19\%$$

$$x_2 = 2 + \sin\left(\frac{6+e^{-x_1^2}}{2}\right)$$

$$x_2 = 2.136$$

$$Error_2 = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| * 100 = \left|\frac{2.136 - 2{,}132}{2.136}\right| * 100 = 0{,}187\%$$

Tenemos el punto x pero nos falta encontrar el y, basta reemplazar en (1).

$$y = \frac{6+e^{-x^2}}{2}$$

$$y = \frac{6+e^{-(2{,}136)^2}}{2}$$

$$y = 3.0052$$

Finalmente la coordenada es igual a $(x, y) = (2.136\,, 3.0052)$.