Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
Prof.: Jaime Michelow
Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa
Auxiliar: Sistema lineal de ecuaciones

En matemática y álgebra lineal, un sistema lineal de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones lineales sobre un Cuerpo (matemática) o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & z2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x_1, x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones.

Los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los problemas más antiguos de la matemática y tienen una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

En general, un sistema con m ecuaciones lineales n incógnitas puede ser escrito como

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}$$

donde x_1, ... ,x_n son las incógnitas y los números a_{ij} son los coeficientes del sistema. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde A es una matriz m por n, $\mathbf{x}$ es un vector columna de longitud n y $\mathbf{b}$ es otro vector columna de longitud m. El sistema anteriormente mencionado de eliminación de Gauss-Jordan se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes.

Cuando consideramos ecuaciones lineales cuyas soluciones son números racionales, reales o complejos o más generalmente un cuerpo $\mathbb{K}$, la solución puede encontrarse mediante **Regla de Cramer**. Para sistemas de muchas ecuaciones la regla de Cramer puede ser computacionalmente más costosa y suelen usarse otros métodos más "económicos" en número de operaciones como la eliminación de Gauss-Jordan y la descomposición de Cholesky. Existen también métodos indirectos (basados en iteraciones) como el método de Gauss-Seidel.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- el sistema no tiene solución (en dicho caso decimos que el sistema está sobredeterminado o que es incompatible)
- el sistema tiene una única solución (el sistema es compatible determinado)
- el sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es compatible indeterminado).

Un sistema de la forma

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Se le llama sistema *homogéneo*. El conjunto de todas las soluciones de este tipo de sistema se le llama núcleo de la matriz y se escribe como *Nuc A*.

Se han diseñado algoritmos alternativos mucho más eficientes a la eliminación de Gauss-Jordan para una gran cantidad de casos específicos. La mayoría de estos algoritmos mejorados tienen una complejidad computacional de O(n^2). Algunos de los métodos más usados son:

Regla de Cramer

La **regla de Cramer** es un teorema en álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Si $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones. (A es la matriz de coeficientes del sistema, $\vec{x}$ es el vector columna de las incógnitas y $\vec{b}$ es el vector columna de los términos independientes)

Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

donde Aj es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b.

Demostración:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando las propiedades de la multiplicación matricial (Producto de Matrices):

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

entonces:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{(\mathrm{Adj}\, A)^t}{|A|}\vec{b}$$

Sean:

$$A^{-1}\vec{b} = p_{jk}$$
$$(\mathrm{Adj}A)^t = \frac{A'_{pl}}{A'_{pl}} = A_{lp}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1}\vec{b} = p_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'_{ji}}{|A|} b_{ik} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i}{|A|} =_{(1)} \frac{|A_j|}{|A|}$$

Aparte, recordando la definic ión de determinante, la sumatoria definida acumula la multiplicación del elemento adjunto o cofactor de la posición ij, con el elemento i-ésimo del vector B (que es precisamente el elemento i-èsimo de la columna j, en la matriz A_j

Un buen ejemplo es la resolución de un sistema de ecuaciones 2x2:

Dado

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

que en forma matricial es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$$

x o y pueden ser resueltos usando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

El rango de una matriz, me da el nº de filas linealmente independientes de la matriz, si la matriz está formada por lo términos de un sistema de ecuaciones, el rango me dice cuantas de estas ecuaciones son linealmente independientes. Esto va a ser fundamental a la hora de resolver el sistema.

Una útil aplicación de calcular el rango de una matriz es la de determinar el número de soluciones al sistema de ecuaciones lineales. El sistema tiene por lo menos una solución si el rango de la matriz de coeficientes equivale al rango de la matriz aumentada. En ese caso, ésta tiene exactamente una solución si el rango equivale al número de ecuaciones; en otro caso, la solución general tiene k parámetros libres, donde k es la diferencia entre el número de ecuaciones y el rang

El teorema de Rouché-Frobenius

Decidir si el sistema $AX = B$ posee solución es decidir si la columna B es combinación lineal de las columnas de A., lo que equivale a que el rango de la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $(A|B)$ coincidan.

Existe soluciones para el sistema si y solo si el rango de la matriz (A|B) es igual al rango de la matriz A. Entonces, si existes soluciones, están forman un subespacio afín de R^n.

- Si r(A) = n, entonces la solución es única.
- De otro modo existen infinitas posibles soluciones.

Método de Gauss.

Dado un sistema de "m" ecuaciones con "n" incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente cuya 1ª ecuación tenga n incógnitas, la segunda n-1, la tercera n-2, y así sucesivamente hasta llegar a la ultima ecuación que tendrá un sola incógnita. Hecho esto, resolvemos la última ecuación, a continuación la penúltima, y así hasta llegar a la primera. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de coeficientes.

P1.- **Discutir y resolver el siguiente sistema lineal**

$$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Sistema Matricial

$$Ax=b=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema y aplicando el teorema de R-F. Obtenemos la matriz ampliada junto con la matriz del sistema

$$r\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]=r\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]=r\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

De este último desarrollo se obtiene el rango de las dos matrices A y (A|b)

$$r(A)=3$$
$$r(A\,|\,b)=3$$

- Luego $r(A)=r(A\,|\,b)\Rightarrow$ Sistema tiene solución.
- El problema esta en $R^{n=3}$, y como $n=r(A)=3$ la solución es única

Finalmente el sistema queda simplificado a

$$\begin{array}{rrr} -x & +y & +z=3 \\ & & 2y=4 \\ & & 2z=10 \end{array}$$

Desde donde se obtiene la solución del sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

P2 Averiguar si el sistema tiene soluciones. En caso afirmativo, hallarlas.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

Sistema Matricial

$$Ax=b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el sistema y aplicando el teorema de R-F. Obtenemos la matriz ampliada junto con la matriz del sistema

$$r\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right] = r\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De este último desarrollo se obtiene el rango de las dos matrices A y (A|b)

$$r(A)=2$$
$$r(A\,|\,b)=2$$

- Luego $r(A)=r(A\,|\,b) \Rightarrow$ Sistema tiene solución.
- El problema esta en $R^{n=3}$, y como $n>r(A)=2$ Tiene infinitas soluciones, un grado de libertad.

Finalmente el sistema queda simplificado a

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -3y=z \end{array}\right\}$$

Se tiene un parámetro libre, arbitrariamente se toma $z = l$, luego

$$y = -\frac{l}{3}, x = \frac{3-2l}{3}, z = l \qquad\qquad \forall l \in R$$

P3.- Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = 4 \\ -4x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Aplicando el el teorema de R-F. Se obtiene el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada

$$r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -1 & -2 & | & 4 \\ -4 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & 1 \\ 0 & -5 & 5 & | & 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Se tanto concluimos

$$\left.\begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A \mid b) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r(A) \neq r(A \mid b) \Rightarrow \text{El sistema no tiene solución.}$$

P4.- Considere el sistema lineal en los parámetros $l, b \in R$, $A\bar{x} = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & l \\ 0 & -1 & 1 & l - b \\ -2 & -1 & 2l - 1 & -b - 1 \\ 0 & 1 & -1 & b - 1 \\ 1 & 0 & 1 & l/2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 - b \\ 1 \\ 2b - 3/2 \end{pmatrix}$$

Encuentre las condiciones sobre l, b para que el sistema: (i) tenga infinitas soluciones y encuentre dichas soluciones, (ii) tenga solución única y encuentre dichas soluciones y (iii) para que no existan soluciones.

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & l & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & l - b & | & 1 \\ -2 & -1 & 2l - 1 & -b - 1 & | & 3 - b \\ 0 & 1 & -1 & b - 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & l/2 & | & 2b - 3/2 \end{pmatrix}^{E_{1,3}(1,1)}_{E_{1,5}(1,-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & l & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & l-b & | & 1 \\ 0 & -1 & 2l-1 & l-b-1 & | & 2-b \\ 0 & 1 & -1 & b-1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -4b+2 \end{pmatrix}^{E_{2,3}(-1,1)}_{E_{2,4}(1,1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & l & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & l-b & | & 1 \\ 0 & 0 & 2l & -1 & | & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -4b+2 \end{pmatrix}$$

Observemos de la última ecuación que si $-4b+2 \neq 0$ no hay solución independientemente del valor del parámetro $l \in R$. Es decir si $b \neq 1/2$ No hay solución

Pongámoslos entonces en el caso $b = 1/2$ y analicemos los valores de l :

(i) si $l \neq 0$ y $l \neq 1$: entonces el sistema tiene única solución pues la matriz se escalona de manera perfecta. Se calculara dicha solución:

$$(l-1)x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = \frac{2}{l-1}$$

$$2lx_3 - x_4 = 1 - 1/2 = 1/2 \Rightarrow x_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{l-1}\right)\frac{1}{2l} = \frac{l+3}{4l(l-1)}$$

$$-x_2 + x_3 + (l-1/2)x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = x_3 + (l-1/2)x_4 - 1$$

$$x_2 = \frac{l+3}{4l(l-1)} + \frac{2l-1}{l-1} - 1$$

$$x_2 = \frac{l+3+8l^2-4l-4l^2+4l}{4l(l-1)} = \frac{4l^2+l+3}{4l(l-1)}$$

$$2x_1 + 2x_3 + lx_4 = -1 \Rightarrow 2x_1 = -1 - \frac{l+3}{2l(l-1)} - \frac{2l}{l-1}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{l+3}{4l(l-1)} - \frac{l}{l-1}$$

(ii) Si $l = 1$: entonces la cuarta ecuación sería 0 = 2 que indica que o hay solución, aún cuando $b = 1/2$.

(iii) $l = 0, l \neq 1$:aquí pivoteamos una vez más:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & |1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & |\ 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\ 0 \end{pmatrix}^{E_{3,4}(1,-1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 & |\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & |\ 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |-3/" \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\ 0 \end{pmatrix} = *$$

Luego no hay solución por (*).

Resumiendo:

1) $b \neq 1/2$ no hay solución.

2) $b = 1/2$: $l = 1$ no hay solución.

$l = 0, l \neq 1$ no hay solución.

$l \neq 0, l \neq 1$ hay solución única

Propuestos. (No lo olviden)

P5.- Estudiar el sistema para los distintos valores del parámetro "a".

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Sistema Matricial homogéneo, b=0.

$$Ax = b = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea la matriz $A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & f'(x) \\ f''(x) & f'''(x) \end{pmatrix} \in M_{2x2}(R)$, donde f representa una función cualquiera y $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, la primera, segunda y tercera derivada de f respectivamente

a) Decida si $A(1)$ posee inversa, para $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

b) Resuelva el sistema $A(p)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para $f(x) = \sin(x)$.