***Demostración del error para polinomios de Taylor***

**(TEOREMA DE TAYLOR)**

**Supóngase que $f', \ldots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

**Entonces**

$$(2)\quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \textbf{para algún } t \textbf{ de } (a, x).$$

<u>Demostración</u>:

Tenemos $P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Definamos la función,

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}\right]$$

Es fácil ver que,

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}\right]$$

$$g'(t) = -\left[f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}\right]$$

Notar que se van eliminando los términos derivados, solo queda el ultimo (las funciones con respecto a x, son constante a t).

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} \qquad (1)$$

Por otro lado vemos que,

$$g(t) = f(x) - \left[ f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \right]$$

$$g(a) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R(x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \right]$$

$$g(a) = f(x) - \left[ \underbrace{P(x) + R(x)}_{f(x)} \right] = 0$$

También, tenemos

$$g(t) = f(x) - \left[ f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \right]$$

$$g(x) = f(x) - \left[ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n + R(x)\frac{(x-x)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \right]$$

$$g(a) = f(x) - f(x) = 0$$

Por teorema del Rolle existe $g'(\xi) = 0$ con $\xi \in [a, x]$.

Ocupando la ecuación (1).

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + (n+1)R(x)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = (n+1)R(x)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con $\xi \in [a, x]$

Ejercicios prácticos,

1. Hallar los polinomios de Taylor (del grado indicado y en torno al punto indicado) para la siguiente función.

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^{\sin x}\cos^3 x + e^{\sin x}\cos x \sin x + e^{\sin x}\cos x + e^{\sin x}2\cos x \sin x \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f(x) = e^{\sin x}; grado\ 4, en\ 0.$$

<u>Solución</u>:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3$$
$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3$$
$$= 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

2. Escribir una suma (utilizando la notación $\sum$ ) que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica. Para reducir al mínimo los cálculos superfluos, consúltese la calculadora.

i) $\sin(2); \text{error} < 10^{-17}$

<u>Solución</u>:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$
$$f^{IV}(x) = \sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego,

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(o)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$P(2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i 2^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Ahora, tratamos el error

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
$$\Rightarrow R(2) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(2)^{2n+2} = \frac{\sin(\xi)}{(2n+2)!}(2)^{2n+2} \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}, \text{ pues } \sin(\xi) \leq 1 \,\forall\, \xi \in [0,2]$$

Tenemos que encontrar el $n$ para el cual se cumple,

$\dfrac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq 10^{-12}$ Es fácil ver que para $n \geq 9$, se cumple la preposición.

Tener en cuenta que $\sin(2) = P(2) + R(2)$

$$\sin(2) \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 2^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

ii) $e$; error $< 10^{-4}$

<u>Solución</u>:

$f(x) = e^{x} \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = e^{x} \Rightarrow f'(0) = 0$

Luego,

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{(i)!}$$
$$P(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i)!}$$

Ahora, tratamos el error

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
$$\Rightarrow R(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1)^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}, \text{porque } \xi \in [0,1]$$

Tenemos que encontrar el $n$ para el cual se cumple,

$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$ Es fácil ver que para $n \geq 7$, se cumple la preposición.

Tener en cuenta que $\exp(1) = P(1) + R(1)$

$$\exp(1) \approx \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{(i)!}$$

3. Este Problema es parecido al anterior, salvo que los errores que se piden son tan pequeños que no se podrá utilizar la calculadora. Habrá que pensar un poco y en algunos casos será necesario utilizar la teoría de límites. En el problema anterior fue posible hallar el n más pequeños que hacia la estimación del resto dada por el teorema menor que el error deseado. Pero en este problema el hallazgo de cualquier suma constituye una victoria moral (siempre que se pueda demostrar la suma da el resultado que se pide)

i) $\sin(1); \text{error} < 10^{-(10^{10})}$

Solución:

Para obtener

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-(10^{10})} \qquad \text{o} \qquad (2n+2)! > 10^{10^{10}}$$

basta ciertamente tomar $2n+2 = 10^{10^{10}}$; podemos también tomar $2n+2 = 10^{10}$, ya que $(10^{10})!$ es claramente $> 10^{10^{10}}$. Así pues, una posible suma es

$$\sum_{i=0}^{\frac{10^{10}}{2}} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}.$$

ii) $\sin(10); \text{error} < 10^{-20}$

Solución:

Tenemos que hallar un $n$ con

$$\frac{10^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-20}$$

Ahora bien,

$$\frac{10^{100+k}}{(100+k)!} = \frac{10^{100}}{100!} \cdot \frac{10}{101} \cdot \frac{10}{102} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{100+k} < \frac{10^{100}}{100!} \cdot \frac{1}{10^k},$$

con lo que

$$\frac{10^{100+k}}{(100+k)!} < 10^{-20}$$

cuando

$$\frac{10^{100}}{100!}\cdot\frac{1}{10^k}<10^{-20} \qquad \text{o} \qquad \frac{10^{120}}{100!}<10^k.$$

Esto ocurre ciertamente para $k = 120$, por lo que podemos tomar $2n + 2 = 220$ o $n = 109$, lo que da la suma

$$\sum_{i=0}^{109}\frac{(-1)^i 10^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

iii) $\exp(10)$; $\text{error} < 10^{-30}$

<u>Solución</u>:

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$\Rightarrow R(10)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(10)^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\le\frac{3^{10}\cdot 10^{n+1}}{(n+1)!}, \text{porque } \xi\in[0,10]$$

Como el limite de $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$ y desde $n=25$, $\frac{10^n}{n!}$ es decreciente.

$$\frac{3^{10}\cdot 10^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{10^5 10^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ahora, usando

$$\frac{10^{100+k}}{(100+k)!}=\frac{10^{100}}{100!}\cdot\frac{10}{101}\cdot\frac{10}{102}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{100+k}<\frac{10^{100}}{100!}\cdot\frac{1}{10^k},$$

$$3^{10}\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\le 10^5\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}<10^5\frac{10^{100}}{(100)!}\frac{1}{10^k}=\frac{10^{105-k}}{(100)!}$$

$$\frac{10^{105-k}}{(100)!}=\frac{10^{-30}}{100!}$$

$$105-k=-30$$

$$k=135$$

Finalmente, $n+1=100+k$

$n=234$

$$\exp(10)\approx\sum_{i=0}^{234}\frac{10^i}{(i)!}$$