Tener Presente para Gauss,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Para encontrar las raíces deben igualar el $P_n(x) = 0$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Una vez que conocen las raíces y el $P_n(x)$, reemplazan en la formula.

$$c_i = \frac{2}{(1 - x_i^{\,2}) \left(\frac{dP_n(x_i)}{dx} \right)^2}$$

Ejemplo:

El área de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la region $[0,1]x[-1,1]$.

Calcule por gauss la integral, $\int_0^1 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$ con $n_x = 3 \wedge n_y = 2$

Primero debemos dejar la región en $[-1,1]x[-1,1]$, usamos el cambio de variable para la integral con respecto a y.

$y = \frac{1}{2}((b - a)t + a + b)$, tenemos $y = \frac{1}{2}t + 1/2$

$\int_0^1 \int_{-1}^{1} f(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{t+1}{2} \right) dx \frac{1}{2} dt$, comenzamos la resolución con la integral que depende de x.

$$\int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{t+1}{2} \right) dx$$

Las raices para el primer caso

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3 (x^2 - 1)^3}{dx^3} = \frac{1}{2}(5x^2 - 3)x = 0$$

Tenemos,

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} \wedge x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \wedge x_3 = 0$$

$$c_1 = \frac{2}{\left(1-\frac{3}{5}\right)(3)^2} = \frac{5}{3^2}$$

$$c_2 = \frac{2}{\left(1-\frac{3}{5}\right)(3)^2} = \frac{5}{3^2}$$

$$c_1 = \frac{2}{(1)\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{3^2}$$

$$\int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{t+1}{2}\right)dx \approx \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right) + \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right) + \frac{8}{9} f\left(0, \frac{t+1}{2}\right).$$

El segundo paso es integrar con respecto a t, debemos tomar en cuenta que se nos pide $n_y = 2$.

Para y entones tenemos la raíces,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \wedge x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y las constantes serán $c_1 = c_2 = 1$

El problema a resolver es,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{t+1}{2}\right)dxdt \approx \underbrace{\frac{5}{18}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{5}{18}\int_{-1}^{1} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{8}{18}\int_{-1}^{1} f\left(0, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_3}$$

$$I_1 = \underbrace{\frac{5}{18}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_1} = \frac{5}{18}\left[1\cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + 1\cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{I_2 = \frac{5}{18}\int_{-1}^{1} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_2} = \frac{5}{18}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)\right]$$

$$I_3 = \underbrace{\frac{8}{18}\int_{-1}^{1} f\left(0, \frac{t+1}{2}\right)dt}_{I_3} = \frac{8}{18}\left[1\cdot f\left(0, \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + 1\cdot f\left(0, \frac{-\frac{t}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)\right]$$

La integral final es igual a, $I = I_1 + I_2 + I_3$