Tutorial de Análisis Numérico
Interpolación : Splines cúbicos

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3

Índice General

1. INTERPOLACIÓN POR SPLINES CÚBICOS

Supongamos que tenemos los $n+1$ puntos:

$$P_k(x_k, y_k), \text{ donde } y_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

en los cuales se quiere interpolar la función f. Las abcisas no es necesario que sean equidistantes, pero se suponen *ordenados*, o sea,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

En ésta sección trataremos de la interpolación polinómica a trozos. La idea es encontrar polinomios cúbicos $q_k(x)$ que interpolen la función f en el subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definición 1. *La función $s(x)$ se llama cúbica a trozos en $[x_0, x_n]$ si existen polinomios cúbicos $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ tales que :*

$$s(x) = q_k(x) \quad en \quad [x_k, x_{k+1}], \quad para\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Para que $s(x)$ interpole en los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ los $q_k(x)$ han de verificar :

$$\begin{cases} q_k(x_k) = y_k \\ q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{1}$$

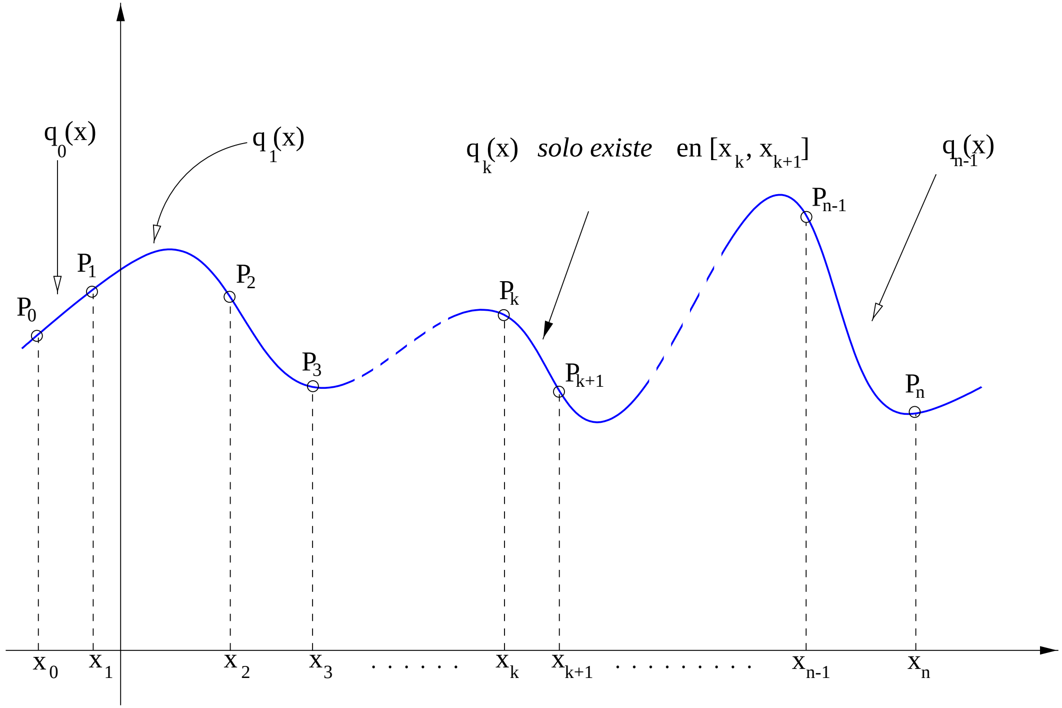

Figura 1: Interpolación polinómica a trozos.

lo cual supone $2n$ condiciones. Llamaremos a $s(x)$ spline cúbico, o simplemente spline, si los polinomios $q_k(x)$ tienen la misma pendiente y la misma concavidad en los nodos que las unen, o sea :

$$\begin{cases} q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) \\ q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{2}$$

lo cual supone $2(n-1)$ condiciones a cumplir. Al tener que verificar las condiciones (1) y (2) se asegura que $s(x)$ tiene su primera y segunda derivadas continuas en $[x_0, x_n]$. En éste caso se dice que $s(x)$ es un spline interpolador para $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Si $s(x)$ es cúbica a trozos en el intervalo $[x_0, x_n]$, su derivada segunda $s''(x)$ es lineal en el mismo intervalo e interpola en los puntos $(x_k, s''(x_k))$ y $(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$ en $[x_k, x_{k+1}]$. Por tanto, $q_k(x)$ es un polinomio de grado uno que interpola en los puntos $(x_k, s''(x_k))$ y $(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$:

$$q''_k(x) = s''(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + s''(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Denotando con

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y

$$\sigma_k = s''(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

tenemos :

$$q''_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k}(x_{k+1} - x) + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k}(x - x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

donde h_k y σ_k son constantes (σ_k a determinar). Integrando dos veces :

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k}\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k}\frac{(x-x_k)^3}{6} + C_k + D_k x \tag{4}$$

donde el término lineal lo podemos escribir como :

$$C_k + D_k x = A_k(x-x_k) + B_k(x_{k+1}-x)$$

siendo A_k y B_k constantes arbitrarias, quedando entonces :

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k}\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k}\frac{(x-x_k)^3}{6} + A_k(x-x_k) + B_k(x_{k+1}-x) \tag{5}$$

Aplicando a (5) las condiciones (1) :

$$y_k = \frac{\sigma_k}{h_k}\frac{h_k^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k}0 + A_k.0 + B_k h_k = \frac{\sigma_k}{6}h_k^2 + B_k h_k \tag{6}$$

$$y_{k+1} = \frac{\sigma_{k+1}}{h_k}h_k^3 + A_k h_k = \frac{\sigma_{k+1}}{6}h_k^2 + A_k h_k \tag{7}$$

y despejando de aquí A_k y B_k y sustituyendo en (5) resulta :

$$\boxed{\begin{aligned} q_k(x) = {} & \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1}-x)\right] \\ & + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k(x-x_k)\right] \\ & + y_k\left[\frac{x_{k+1}-x}{h_k}\right] + y_{k+1}\left[\frac{x-x_k}{h_k}\right], \qquad \text{para } k=0,1,\ldots,n-1 \end{aligned}} \tag{8}$$

que *es la ecuación del spline* $q_k(x)$.

Nos falta aún conocer los valores $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (n+1 incógnitas) para lo cual usamos (2); derivando en (8) tenemos :

$$q_k'(x) = \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{-3(x_{k+1}-x)^2}{h_k} + h_k\right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{3(x_k-x)^2}{h_k} - h_k\right] + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$$

Por tanto :

$$q_k'(x_k) = \frac{\sigma_k}{6}(-2h_k) + \frac{\sigma_{k+1}}{6}(-h_k) + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} \tag{9}$$

$$q_k'(x_{k+1}) = \frac{\sigma_k}{6}(h_k) + \frac{\sigma_{k+1}}{6}(2h_k) + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} \tag{10}$$

Reemplazando k por $k-1$ en (10) para obtener $q'_{k-1}(x_k)$ e igualando a (9) nos da :

$$\boxed{h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2\,(h_{k-1}+h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}\right), \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1} \tag{11}$$

o también

$$\boxed{h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2\,(h_{k-1}+h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\left(\frac{\Delta\, y_k}{h_k} - \frac{\Delta\, y_{k-1}}{h_{k-1}}\right), \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1} \tag{12}$$

o incluso

$$\boxed{h_{k-1}\,\sigma_{k-1} + 2\,(h_{k-1}+h_k)\,\sigma_k + h_k\,\sigma_{k+1} = 6\left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right), \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1} \tag{13}$$

Como el índice k varía de 1 a $n-1$, se producen $n-1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, lo cual produce un sistema *subdeterminado* que tiene infinitas soluciones.

Existen varias estrategias para eliminar σ_0 de la primera ecuación y σ_n de la (n-1)-ésima produciendo un *sistema tridiagonal* de orden (n-1) en las variables $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.

ALTERNATIVA I Especificar el valor de $s''(x)$ en los puntos extremos : $\sigma_0 = s''(x_0)$ y $\sigma_n = s''(x_n)$. Si se pone $\sigma_0 = 0$, $\sigma_n = 0$ se denomina *spline cúbico natural.*

ALTERNATIVA II Suponer que $s''(x)$ es constante en los extremos : $\sigma_0 = \sigma_1$ y $\sigma_n = \sigma_{n-1}$

ALTERNATIVA III Suponer que $s''(x)$ es lineal cerca de los extremos : $\sigma_0 = \frac{1}{h_1}\big((h_0+h_1)\sigma_1 - h_0\sigma_2\big)$ y

$\sigma_n = \frac{1}{h_{n-2}}\big(-h_{n-1})\sigma_{n-2} + (h_{n-2}+h_{n-1})\sigma_{n-1}\big)$

ALTERNATIVA IV Especificar el valor de $s'(x)$ en los puntos extremos :

$\sigma_0 = \frac{3}{h_0}\big[\Delta y_0 - s'(x_0)\big] - \frac{1}{2}\sigma_1$ y

$\sigma_n = \frac{3}{h_{n-1}}\big[s'(x_n) - \Delta y_{n-1}\big] - \frac{1}{2}\sigma_{n-1}$

Si hay que calcular muchas veces $s(z)$ entonces es preferible hacer la sustitución :

$$x_{k+1} - z = (x_{k+1} - x_k) - (z - x_k) = h_k - (z - x_k)$$

en $q_k(z)$ y entonces expresar éste en potencias de $z - x_k$ para obtener :

$$\begin{aligned} q_k(z) &= y_k + \alpha_1(z-x_k) + \alpha_2(z-x_k)^2 + \alpha_3(z-x_k)^3 \\ &= y_k + (z-x_k)(\alpha_1 + (z-x_k)(\alpha_2 + (z-x_k)\alpha_3)) \end{aligned}$$

evaluado con sólo 4 sumas/restas y 3 productos, donde

$$\alpha_1 = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(\sigma_{k+1} + 2\sigma_k), \;\; \alpha_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \;\; \alpha_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6h_k}$$

En forma matricial, el sistema tridiagonal que resulta es (caso de spline cúbico natural):

$$\begin{bmatrix} 2\,(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2\,(h_1+h_2) & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 2\,(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2\,(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \begin{bmatrix} f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1] \\ f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2] \\ f[x_3,x_4] - f[x_2,x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-1},x_n] - f[x_{n-1},x_{n-2}] \end{bmatrix}$$

o también

$$\begin{bmatrix} 2\,(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2\,(h_1+h_2) & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 2\,(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2\,(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{h_1} - \frac{\Delta y_0}{h_0} \\ \frac{\Delta y_2}{h_2} - \frac{\Delta y_1}{h_1} \\ \frac{\Delta y_3}{h_3} - \frac{\Delta y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{\Delta y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

Interpolar por splines cúbicos la función $f(x) = 1/x$ en $x = 1.5$ tomando los puntos $(0.1, 10.0), (0.2, 5.0), (0.5, 2.0), (1.0, 1.0), (2.0, 0.5), (5.0, 0.2), (10.0, 0.1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0.2 - 0.1 = 0.1 & h_3 &= 2.0 - 1.0 = 1.0 \\ h_1 &= 0.5 - 0.2 = 0.3 & h_4 &= 5.0 - 2.0 = 3.0 \\ h_2 &= 1.0 - 0.5 = 0.5 & h_5 &= 10.0 - 5.0 = 5.0 \end{aligned}$$

El sistema que resulta es

$$\begin{aligned} 0.1\,\sigma_0 + 2\,(0.1 + 0.3)\,\sigma_1 + 0.3\,\sigma_2 &= 6\left(\frac{2-5}{0.5-0.2} - \frac{5-10}{0.2-0.1}\right) \\ 0.3\,\sigma_1 + 2\,(0.3 + 0.5)\,\sigma_2 + 0.5\,\sigma_3 &= 6\left(\frac{1-2}{1.0-0.5} - \frac{2-5}{0.5-0.2}\right) \\ 0.5\,\sigma_2 + 2\,(0.5 + 1.0)\,\sigma_3 + 1.0\,\sigma_4 &= 6\left(\frac{0.5-1.0}{2.0-1.0} - \frac{1-2}{1.0-0.5}\right) \\ 1.0\,\sigma_3 + 2\,(1.0 + 3.0)\,\sigma_4 + 3.0\,\sigma_5 &= 6\left(\frac{0.2-0.5}{5.0-2.0} - \frac{0.5-1.0}{2.0-1.0}\right) \\ 3.0\,\sigma_4 + 2\,(3.0 + 5.0)\,\sigma_5 + 5.0\,\sigma_6 &= 6\left(\frac{0.1-0.2}{1.0-5.0} - \frac{0.2-0.5}{5.0-2.0}\right) \end{aligned}$$

Poniendo $\sigma_0 = \sigma_6 = 0$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1.6 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 3.0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 8.0 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.0 & 16.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 40 \\ 8 \\ 1.5 \\ 0.4 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = 311.65398570643 & \sigma_2 = -31.077295217152 \\ \sigma_3 = 8.4549532710280 & \sigma_4 = -.82621220450797 \\ \sigma_5 = 0.18491478834524 & \end{array}$$

Para $x = 1.5$ habrá que elegir $q_3(x)$

$$q_3(x) = \frac{\sigma_3}{6}\left[\frac{(2.0-x)^3}{1.0} - 1.0\,(2.0-x)\right] + \frac{\sigma_4}{6}\left[\frac{(x-1.0)^3}{1.0} - 1.0\,(x-1.0)\right] + 1.0(2.0-x) + 0.5(x-1.0)$$

y su valor $q_3(x) = 0.27320367097855$ es una mejor estimación que la obtenida por interpolación polinómica (ver figura 2).

Los diferentes splines que resultan son:

$$
\begin{aligned}
q_0(x) =& 519.423309x^3 - 155.826993x^2 - 39.611534x + 15\\
q_1(x) =& -190.406267x^3 + 270.070753x^2 - 124.791083x + 20.678637\\
q_2(x) =& 13.177416x^3 - 35.304772x^2 + 27.896679x - 4.769324\\
q_3(x) =& -1.546861x^3 + 8.868059x^2 - 16.276152x + 9.954953\\
q_4(x) =& +0.0561737x^3 - 0.750148x^2 + 2.960264x - 2.869324\\
q_5(x) =& -0.00616383x^3 + 0.1849148x^2 - 1.715052x + 4.922870
\end{aligned}
$$

$$
s(x) = \begin{cases}
q_0(x)\,, & \text{si } x \in [0.1, 0.2], \qquad (\text{también } (-\infty, 0.2])\\
q_1(x)\,, & \text{si } x \in [0.2, 0.5],\\
q_2(x)\,, & \text{si } x \in [0.5, 1.0],\\
q_3(x)\,, & \text{si } x \in [1.0, 2.0],\\
q_4(x)\,, & \text{si } x \in [2.0, 5.0],\\
q_5(x)\,, & \text{si } x \in [5.0, 10.0], \qquad (\text{también } [5.0, +\infty))
\end{cases}
$$

En el intervalo $[1.0, 2.0]$, la representación de ambas funciones es la que aparece en la figura 2.

■

Ejemplo. Interpolar por splines cúbicos la función $f(x) = 1/(x^2+1)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ tomando los seis puntos de abcisas $x_k = k/5,\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Solución:

Por cálculo directo tenemos :

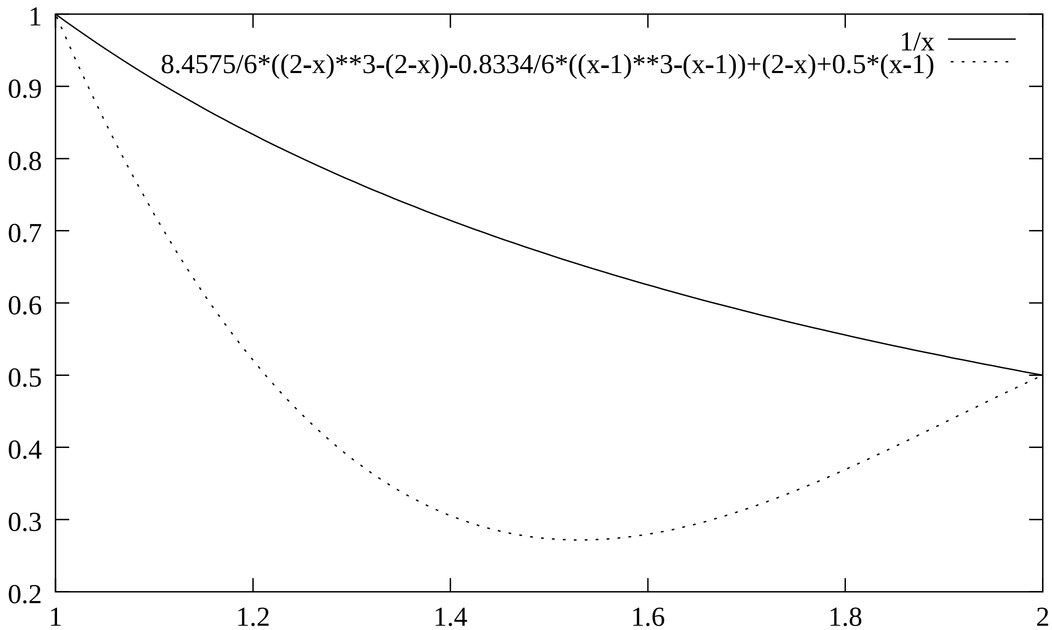

Figura 2: La función $1/x$ y $q_3(x)$ en el intervalo [1.0,2.0].

$$
\begin{array}{ll}
y_0 = 1.00000000 & y_3 = 0.73529412 \\
y_1 = 0.96153846 & y_4 = 0.60975610 \\
y_2 = 0.86206896 & y_5 = 0.50000000
\end{array}
$$

y es $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1/5 = h$ y poniendo $\sigma_0 = \sigma_5 = 0$ y multiplicando ambas partes por $6/h$:

$$
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix}
= \frac{6}{h^2}
\begin{bmatrix} y_2 - 2\,y_1 + y_0 \\ y_3 - 2\,y_2 + y_1 \\ y_4 - 2\,y_3 + y_2 \\ y_5 - 2\,y_4 + y_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -9.151194 \\ -4.095801 \\ 0.185523 \\ 2.367288 \end{bmatrix}
$$

y resolviendo $\sigma_1 = -2.165814$, $\sigma_2 = -0.487920$, $\sigma_3 = 0.022536$, $\sigma_4 = 0.581866$ y tabulando la función entre 0 y 1.0 con paso 0.002 la gráfica de f(x) y el spline cúbico son indistinguibles (error máximo $\simeq 0.0040$ que se produce entre 0 y 0.2).

$\blacksquare$

2. PROBLEMAS

Problema 1. Construir el spline cúbico natural que interpola a partir de los datos:

x	0	1	2	2.5	3	4
y	1.4	0.6	1.0	0.65	0.6	1.0

Problema 2. Considerando los datos:

x	0.15	0.76	0.89	1.07	1.73	2.11
y	0.3495	0.2989	0.2685	0.2251	0.0893	0.0431

obtener el spline cúbico natural que interpola en dichos puntos.

Referencias

[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.

[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.

Soluciones a los Problemas

Problema 1. El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ -6.6 \\ 3.6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2.67883817742739 & \sigma_2 &= -3.5153526970954 \\ \sigma_3 &= 2.5344398340249 & \sigma_4 &= 0.57759336099585 \end{aligned}$$

Los diferentes splines son:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= +\,0.44647303x^3 - 1.24647303x + 1.4 \\ q_1(x) &= -\,1.03236514x^3 + 4.436514523x^2 - 5.68298755x + 2.87883817 \\ q_2(x) &= +\,2.01659751x^3 - 13.85726141x^2 + 30.90456432x - 21.51286307 \\ q_3(x) &= -\,0.65228216x^3 + 6.15933610x^2 - 19.13692946x + 20.18838174 \\ q_4(x) &= -\,0.09626556x^3 + 1.15518672x^2 - 4.12448133x + 5.17593361 \end{aligned}$$

$$
s(x) = \begin{cases} q_0(x)\,, & \text{si } x \in [0,1], \qquad (\text{también } (-\infty, 0]) \\ q_1(x)\,, & \text{si } x \in [1,2], \\ q_2(x)\,, & \text{si } x \in [2, 2.5], \\ q_3(x)\,, & \text{si } x \in [2.5, 3], \\ q_4(x)\,, & \text{si } x \in [3,4], \qquad (\text{también } [3, +\infty)) \end{cases}
$$

Problema 2. El sistema es ahora:

$$\begin{bmatrix} 1.48 & 0.13 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0.62 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0.18 & 1.68 & 0.66 \\ 0 & 0 & 0.66 & 2.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.905372005 \\ -0.0435897436 \\ 0.212121212 \\ 0.50507177 \end{bmatrix}$$

obteniéndose:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = -0.61616885710569 & \sigma_2 = 0.050445411325263 \\ \sigma_3 = 0.029089182290732 & \sigma_4 = 0.23359274520339 \end{array}$$

Los diferentes splines son:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= -\,0.16835215x^3 + 0.075758466x^2 - 0.0316707558x + 0.35311424 \\ q_1(x) &= +\,0.85463368x^3 - 2.25664921x^2 + 1.74095908x - 0.095951989 \\ q_2(x) &= -\,0.019774286x^3 + 0.078020050x^2 - 0.33689656x + 0.52047852 \\ q_3(x) &= +\,0.051642314x^3 - 0.15122724x^2 - 0.091601967x + 0.43299011 \\ q_4(x) &= -\,0.10245296x^3 + 0.64852723x^2 - 1.47517719x + 1.23085182 \end{aligned}$$

$$s(x) = \begin{cases} q_0(x)\,, & \text{si } x \in [0.15, 0.76], \quad (\text{también } (-\infty, 0.15]) \\ q_1(x)\,, & \text{si } x \in [0.76, 0.89], \\ q_2(x)\,, & \text{si } x \in [0.89, 1.07], \\ q_3(x)\,, & \text{si } x \in [1.07, 1.73], \\ q_4(x)\,, & \text{si } x \in [1.73, 2.11], \quad (\text{también } [1.73, +\infty)) \end{cases}$$