Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
Prof.: Jaime Michelow
Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa

Auxiliar: Cuadratura de Gauss – Ceros de Funciones

Cuadratura de Gauss. La clase de métodos que se presentan en esta auxiliar tiene como objetivo aumentar la exactitud de las integrales a estudiar.

Sea

$$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Y consideremos una fórmula de integración numérica

$$I_n(f)=\sum_{i=1}^{n}(c_i)f(x_i)$$

Donde los coeficientes c_i y los nodos x_i, $i=1,2,...,n-1,n,$ son tales que l fórmula sea exacta para $f \in P_{2n-1}$, es decir,

$$I(f)=I_n(f),\forall f \in P_{2n-1}$$

Si $n=2$ se pueden encontrar los coeficientes y nodos que satisfacen este requisito, resolviendo el sistema no lineal que resulta de imponer las condiciones de exactitud sobre los polinomios de la base canónica de

$P_3 : f(x)=1; f(x)=x; f(x)=x^2; f(x)=x^3;$

$$c_1+c_2=2$$
$$c_1x+c_2x=0$$
$$c_1x^2+c_2x^2=\frac{2}{3}$$
$$c_1x^3+c_2x^3=0$$

La solución de este sistema es

$$c_1=c_2=1,\ x_1=\sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Y en consecuencia la fórmula de cuadratura de Gauss (que para este problema recibe el nombre de Gauss Legendre) para $n=2$, es

$$I_2(f)=f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

En resumen.

$$I=\int_a^b f(x)w(x)dx=\sum_{i=1}^{n} l_{n,i}\cdot f(x_{n,i})$$

$$l_{n,i}=\int_a^b \frac{f(x)}{f'(x_{n,i})(x-x_{n,i})}dx$$

Problema Nº1. Use el método de Cuadratura de Gauss para evaluar la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x}$$

La integral anterior es muy simple de evaluar en forma exacta. De hecho tenemos,

$$I = \log(3+x)\,|_{-1}^{1} = \log(2) \approx 0{,}6930\ldots$$

Se utilizara el método de cuadratura de Gauss para estimar I. Nótese que la integral en cuestión está hecha sobre el intervalo $(-1{,}1)$, de modo que la podemos pensar de la forma

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot w(x)dx$$

En que $f(x) = \dfrac{1}{3+x}$, y el peso es $w(x) = 1$. Los polinomios apropiados son por lo tanto los polinomios de Legendre. Usemos entonces el Método de cuadratura de Gauss con el polinomio (de Legendre) de segundo grado.

$$f_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

Nótese que, tal como se espera f_2 tiene exactamente dos ceros simples en el intervalo $(-1{,}1)$, dados por

$$x_{2,1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;;\; x_{2,2} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

En cuanto a los pesos correspondientes, tenemos,

$$l_{2,1} = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2 - 1}{6x_{2,1}\left(x - x_{n,i}\right)}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)dx = 1$$

Análogamente se puede obtener

$$l_{2,2} = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2 - 1}{6x_{2,2}\left(x - x_{n,i}\right)}dx = 1$$

Por lo tanto, usando cuadratura, tenemos la siguiente estimación.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x} \approx l_{2,1}\cdot f\left(x_{2,1}\right) + l_{2,2}\cdot f\left(x_{2,2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$I \approx \frac{1}{3+\sqrt{3}/3} + \frac{1}{3-\sqrt{3}/3} = \frac{9}{13} \approx 0.6923\ldots$$

Problema Nº2. Usar el método de cuadratura de Gauss para evaluar la siguiente integral:

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3 + x^2}$$

La integral anterior también es muy simple evaluar en forma exacta.

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{p}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046$$

Ahora se usara el método de cuadratura de Gauss para estimar J. Notese que la integral anterior está hecha sobre el intervalo $(-1,1)$, de modo que la podemos pensar de la forma

$$. J = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot w(x) dx$$

En que $f(x) = 1/(3 + x^2)$ y el peso $w(x) = 1$. Los polinomios apropiados son por lo tanto los polinomios de Legendre. Usemos entonces el Método de Cuadratura de Gauss, pero esta vez con el polinomio (de Legendre) de tercer grado $\left(f_3 = (1/2)(5x^3 - 3x)\right)$, cuyos pesos y abscisas están dados por

$$l_{3,1} = \frac{5}{9}, \qquad x_{3,1} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$l_{3,2} = \frac{8}{9}, \qquad x_{3,2} = 0$$

$$l_{3,3} = \frac{5}{9}, \qquad x_{3,1} = +\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Por lo tanto, usando cuadratura, tenemos la siguiente estimación

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3 + x^2} \approx l_{3,1} \cdot f(x_{3,1}) + l_{3,2} \cdot f(x_{3,2}) + l_{3,3} \cdot f(x_{3,3}) = f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + f(0) + f\left(+\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

$$J = \frac{8}{27} + \frac{25}{81} + \frac{49}{81} \approx 0.6049$$

Obs: Cuando se tiene el problema de calcular numéricamente una integral donde los límites de integración no corresponden a los casos de ortogonalidad conocida se requerirá un cambio de variables previos a la utilización de la fórmula de cuadratura correspondiente. Por ejemplo, si la integral que se quiere aproximar es

$$I(f) = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

Con a y b finitos, entonces el cambio de variable correspondiente será

$$u = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

De modo que se utilice la fórmula de cuadratura de **Gauss-Legendre** que aproxime a la integral que aparece en la expresión.

Referencias:

[1] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics,** Dover Pubs., NY, 1986

[2] Varas, María Leonor, **Introducción al Cálculo Numérico** (apuntes para el curso MA33A), 2000

Ceros de función. La determinación de los ceros de funciones o raíces de ecuaciones es un problema que sucede con frecuencia en el área científica.

Por ejemplo, en la teoría de la difracción de la luz necesitamos las raíces de la ecuación

$$x - \tan(x) = 0$$

En el cálculo de las órbitas planetarias necesitamos las raíces de la **ecuación de Kepler**

$$x - a\sin(x) = b$$

Para varios valores de a y b..

El problema general, planteado en el caso más sencillo de una función definida en los números reales y cuya imagen está en el conjunto de los reales, es el siguiente: dada una función f: R --> R, encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

[CHENEY, Ward; KINCAID, David. Numerical Analisys. EE.UU.: BROOKS/COLE, 1.991. 690 p.]

El análisis numérico ofrece varios procedimientos para resolver el problema de la determinación de los ceros de una función. Algunos de esos procedimientos son los siguientes:

- **Método de bisección:** Se utiliza en funciones continuas, pero sólo encuentra un cero, más no todos, en el intervalo $[a, b]$.
- **Método de Newton:** Es un procedimiento general que se puede aplicar en diversas situaciones. Sin embargo, cualquier enunciado acerca del método debe contemplar la suposición de que el x inicial debe estar próximo a un cero, o que la gráfica de f tiene una forma especial.
- **Método de la secante:** Es una variación del método de Newton que, en vez de utilizar la derivada de la función cuyo cero se busca, utiliza f' en términos de un límite.
- **Cálculo de ceros de polinomios:** Es un procedimiento que se especializa en encontrar los ceros de funciones polinómicas.

Teorema del punto fijo de Banach

Primero será necesario definir:

Sucesión de Cauchy

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice sucesión de cauchy si:

$$\forall e > 0\ \exists n_{0\in\mathbb{N}}\ \ m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < e$$

"Toda sucesión convergente es de Cauchy".

"Toda sucesión de Cauchy es convergente"

Espacio Métrico

Es un par $(\underline{\overline{X}}, d)$ donde:

- $\underline{\overline{X}}$ es un conjunto no vacío (espacio de trabajo).
- $d : \underline{\overline{X}} \times \underline{\overline{X}} \to \mathbb{R}$ (función de distancia).

Donde:

a) $d(x, y) \geq 0 \qquad \forall x, y \in \underline{\overline{X}}$

b) $d(x, y) = 0 \qquad \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular)

Se da por asumido además el conocimiento de los espacios normados. Luego:

Espacios de Banach

Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ se dice espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en E es convergente es E.

Por ejemplo: $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.

Contractancia

Se dice que $T : K \to K$ es contractante si existe $0 \leq c \leq 1$ tal que:

$$\|T(u) - T(v)\| \leq c\|u - v\|$$

$$\Leftrightarrow d\big(T(u) - T(v)\big) \leq c \cdot d\big(u - v\big)$$

Finalmente se podrá definir:

Teorema del punto fijo de Banach

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $k \subset X$ un conjunto cerrado.

Sea $T : K \to K$ una función contractante.

Entonces existe y de forma única, $u \in k$ talque $T(u) = u$

Propuesto: Demostración.

Hay dos formas de demostrarlo:

a) Por manejo de desigualdades. Forma larga.
b) Por contradicción. Forma corta.

Luego, como se sabe de la existencia de estos puntos fijos?

Veamos el siguiente caso típico:

Si $g : [0,1] \to [0,1] \Rightarrow \exists \overline{X}$ es punto fijo

Luego si se define:

$f(x) = x - g(x)$

f es continua pues g lo es.

Luego se tienen los casos límite:

$f(0) = 0 \Rightarrow 0$ es punto fijo

$f(1) = 0 \Rightarrow 1$ es punto fijo

Problema Nº3. Se desea calcular las soluciones no nulas de la ecuación $x = \tan(x)$. Dado $p = kp$ donde $k \in N^*$ se pide

a) verificar que en el intervalo $(p - p/2, p + p/2)$ hay una y solo una solución de la ecuación, que denotaremos $\overline{x}_p$.
b) Escriba explícitamente el método de Newton en este caso, en la forma $x_{n+1} = F(x_n)$ y verifique que esta fórmula de iteración converge a $\overline{x}_p$ con rapidez cuadrática, a condición que x_0 este suficientemente cerca de la raíz $\overline{x}_p$
c) Demuestre que la formula de iteración $x_{n+1} = p + \arctan(x_n)$ converge incondicionalmente (es decir, para cualquier $x_0 \in R$) a la raíz $\overline{x}_p$ pero con rapidez lineal.

Solución:

a) Puesto que $\lim\limits_{x \to (p-p/2)+} \tan(x) - x = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to (p+p/2)-} \tan(x) - x = -\infty$, por teorema de valor intermedio $\tan(x) - x$ se debe anular al menos una vez. No se anula mas de una vez, por ejemplo, puesto que la derivada $(\tan(x) - x)' = \sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ es no negativo y entonces la función es estrictamente creciente, luego inyectiva en el intervalo $(p - p/2, p + p/2)$ donde es continua.

b) Recordemos que el método de Newton tiene como iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde en nuestro caso $f(x) = \tan(x) - x$ y según vimos en la parte a) $f'(x) = \tan^2(x)$. Así combinamos ambas expresiones,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)} = x_n\left(1 + \cot^2(x_n)\right) - \cot(x_n) = x_n \cdot \mathrm{cos}ec^2(x_n) - \cot an(x_n) \equiv F(x_n)$$

Para tener convergencia de orden 2, a condición que el punto de partida este cerca de $\overline{x}_p$ es que la derivada de F se anule en $\overline{x}_p$.

$$F'(x) = \text{cossec}^2(x) - x2\,\text{cossec}^2(x)\,\text{cot}an(x) + \text{cossec}^2(x)$$
$$F'(x) = 2\,\text{cossec}^2(x)(1 - x\,\text{cot}an(x))$$

En $\bar{x}_p$ se cumple que $\bar{x}_p = \tan(\bar{x}_p)$, luego $F'(\bar{x}_p) = 0$.

c) Puesto que el recorrido de la función arctan ES $(-p/2, p/2)$ a partir de x_1 en adelante, todas las iteraciones se encontraran en el intervalo $(p - p/2, p + p/2)$ por lo tanto, de converger, solo lo harán a $\bar{x}_p$. La derivada de la función iteración es;

$$(p + \arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Cuyo máximo en el intervalo $(p - p/2, p + p/2)$ ocurre en el extremo inferior del intervalo $p > 0$ (o simétricamente, en el intervalo para $p < 0$) y vale

$$\frac{1}{1 + (p - p/2)^2} < 1$$

Como esta derivada no se anula en el intervalo, la convergencia es solo lineal.

Problema Nº4. Se desea resolver la ecuación $x^2 = \ln(1 + 2x)$.

a) Demuestre que esta ecuación posee exactamente 2 soluciones de las cuales una es evidente. La otra solución la denotaremos s. Encuentre un intervalo encerrado entre enteros consecutivos donde se encuentre la raíz s.

b) Estudie la convergencia de los siguientes métodos numéricos, indicando donde escoger x_0

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln(1 + 2 \cdot x_n)} \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} = \frac{\exp(x_n^2) - 1}{2}$$

c) Escriba en forma explícita el método de Newton que permita resolver esta ecuación.

(Propuesto)