

Calculo Numérico MA33A.-Primavera 2007
 Prof.: Jaime Michelow
 Aux.: Ignacio Trujillo-Hugo Ulloa
Auxiliar: Spline Cubic-Integración (Trapezio y Simpson)

Spline

Resumen. En el subcampo matemático del análisis numérico, un **spline** es una curva definida a trozos mediante polinomios. En los problemas de interpolación, se utiliza a menudo la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado a la vez que se evitan las oscilaciones, que en la mayoría de las aplicaciones resultan indeseables, que aparecen al interpolar mediante polinomios de grado elevado. Para el ajuste de curvas, los splines se utilizan para aproximar formas complicadas. La simplicidad de la

representación y la facilidad de cómputo de los splines los hacen populares para la representación de curvas en informática, particularmente en el terreno de los gráficos por ordenador.

Una spline muy común es la “**natural spline cubica**” de grado 3 con continuidad de tipo C^2 . La palabra “**natural**” significa que la segunda derivada de los polinomios spline son un conjunto igual a cero en los puntos finales del intervalo de interpolación.

Definicion.

Spline cúbica: $S(x) = \{S_k, x \in [x_k, x_{k+1}], k \in [0, 1, \dots, n-1]\}$, se cumplen las siguientes restricciones.

- | | |
|--|---------------------|
| 1. interpola: $S_k(x_k) = y_k$ | $n+1$ restricciones |
| 2. $S(x)$ continua: $S_{k-1}(x_k) = S_k$ | $n-1$ restricciones |
| 3. 1 st Derivada Continua: $S'_{k-1}(x_k) = S'_k$ | $n-1$ restricciones |
| 4. 2 nd Derivada Continua: $S''_{k-1}(x_k) = S''_k$ | $n-1$ restricciones |

Condiciones de borde: se tienen $4n$ incógnitas y $4n-2$ más 2 condiciones de bordes

- Spline Natural: $S'(x_0) = S''(x_n) = 0$
- Spline con Extremos constantes: $S'(x_0) = S'(x_1), S''(x_n) = S''(x_{n-1})$
- Spline con Valores Fijos: $S'(x_0) = a, S'(x_n) = b$
- Spline Sujeta: $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$

Problema 1. Se necesita encontrar una fórmula para la función spline cúbica $S(x)$ que interpola los puntos $\{0, 1, 0\}$ en la malla $\{-1, 0, 1\}$ a través del siguiente procedimiento.

Se esta trabajando con una Spline cúbica natural, por lo que en los extremos $S'(x)$ vale cero. Llame a al valor (indeterminado) de la segunda derivada de S en el origen.

- Encuentre una formula para $S'(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ en función de a , de la forma

$$S'(x) = \begin{cases} \dots si \ x \in [-1, 0] \\ \dots si \ x \in [0, 1] \end{cases}$$

- Integre dos veces la expresión anterior para obtener una fórmula de $S(x)$ en términos de a y cuatro constantes de integración.
- Use las condiciones de interpolación para determinar los valores de las constantes de integración en función de a
- Encuentre el valor de la constante a y escriba la función spline cúbica resultante.

Solución:

1. Como $S(x)$ es un polinomio cúbico en cada intervalo $[-1,0]$ y $[0,1]$ entonces $S'(x)$ es un polinomio de grado 1 en esos intervalos, que vale 0, a , 0 en los puntos -1, 0 y 1 respectivamente. Luego imponiendo estas condiciones $S'(x)$.

Primer intervalo: $[-1,0]$, tomando un polinomio lineal general para $S'(x)$, $S'(x) = m \cdot x + n$ se obtiene lo siguiente:

$$S'(-1) = m(-1) + n = 0 \Rightarrow m = n$$

$$S'(0) = m \cdot 0 + n = a \Rightarrow n = a$$

$$\text{Luego: } S''(x) = a \cdot (1+x) \text{ para } x \in [-1,0]$$

Segundo intervalo: $[0,1]$, tomando un polinomio lineal general para $S'(x)$, $S'(x) = m \cdot x + n$ se obtiene lo siguiente:

$$S'(1) = m(1) + n = 0 \Rightarrow m = -n$$

$$S'(0) = m \cdot 0 + n = a \Rightarrow n = a$$

$$\text{Luego: } S'(x) = a \cdot (1-x) \text{ para } x \in [0,1]$$

$$S'(x) = \begin{cases} a(1+x) & x \in [-1,0] \\ a(1-x) & x \in [0,1] \end{cases}$$

2. Integrando en cada intervalo se tiene que:

$$S(x) = \begin{cases} a(1+x)^2 / 2 + b & x \in [-1,0] \\ -a(1-x)^2 / 2 + c & x \in [0,1] \end{cases}$$

$\therefore$

$$S(x) = \begin{cases} a(1+x)^3 / 6 + b \cdot x + d & x \in [-1,0] \\ a(1-x)^3 / 6 + c \cdot x + e & x \in [0,1] \end{cases}$$

Donde b, c, d y e son constantes de integración.

3. Como la spline pasa por los puntos $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ y se tiene que

$$s(-1) = -b + d = 0$$

$$S(1) = c + e = 0$$

$$S(0^-) = a/6 + d = 1$$

$$S(0^+) = a/6 + e = 1$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen los valores de las constantes de integración en función del parámetro a

$$b = d = e = 1 - a/6, \quad c = a/6 - 1$$

4. El parámetro a se determina imponiendo continuidad para $S'(x)$ en 0.

$$S'(0^-) = S'(0^+) \Leftrightarrow a/2 + b = -a/2 + c \Rightarrow a = -3, \text{ finalmente se determina } S(x) +$$

$$S(x) = \begin{cases} \left[3(1+x) - (1+x)^3 \right] / 2 & x \in [-1,0] \\ \left[3(1-x) - (1-x)^3 \right] / 2 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Integración, Métodos Trapecio y Simpson.

Resumen. Para calcular la integral definida, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, es preciso obtener previamente una integral indefinida. Aunque se conocen diversos métodos para hallar la integral indefinida de una cantidad considerable de funciones, existen funciones para las cuales estos métodos no son aplicables. Este inconveniente se supera haciendo uso de la integración numérica. La integración numérica permite evaluar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado con la exactitud deseada. En este auxiliar se estudiarán dos metidos de integración numérica: El Método del Trapecio y El Método de Simpson.

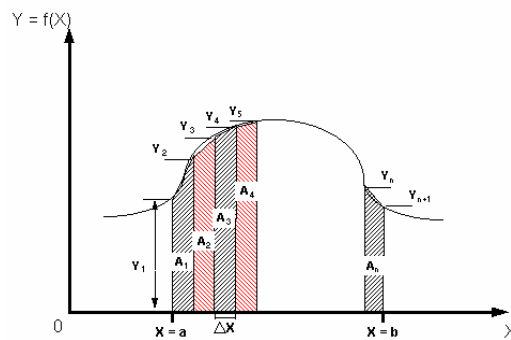
Método del Trapecio: Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, y los números $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ forman una partición regular de $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Estimación del error en el método del Trapecio

Si $M \in \mathbb{R}^+$ y $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, entonces el error que se comete al usar el Método de Integración del Trapecio no es mayor que

$$M \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$



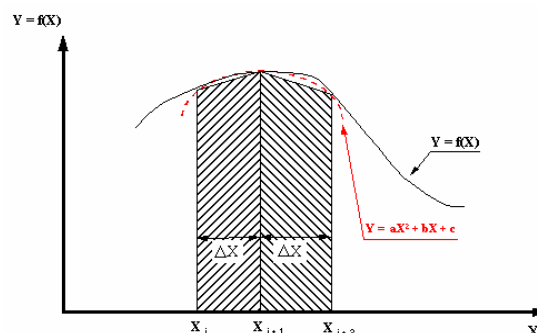
Método de Simpson: Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, y n es un numero par. Y si $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ forman una partición regular de $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Estimación del error en el método del Trapecio

Si $M \in \mathbb{R}^+$ y $|f^{(iv)}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, entonces el error que se comete al usar el Método de Integración del Simpon no es mayor que

$$M \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$



Ejemplos.

1. $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$, $n = 6$

Solución:

(a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{4-1}{2(6)} [f(1) + 2f(1.5) + 2f(2) + 2f(2.5) + 2f(3) + 2f(3.5) + f(4)] \quad (1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1, f(1.5) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, f(2) = \frac{1}{2}, f(2.5) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}, f(3) = \frac{1}{3}, f(3.5) = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

$$f(4) = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{3}{12} \left[1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \right],$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{4} \left[\frac{420 + 560 + 420 + 336 + 280 + 240 + 105}{420} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{2361}{420} \right] = \frac{2361}{1680},$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx 1.41.$$

(b) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{4-1}{3(6)} [f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + 2f(3) + 4f(3.5) + f(4)] \quad (1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1, f(1.5) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, f(2) = \frac{1}{2}, f(2.5) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}, f(3) = \frac{1}{3}, f(3.5) = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

$$f(4) = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{3}{18} \left[1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{6} \left[1 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{8}{5} + \frac{2}{3} + \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \right],$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{6} \left[\frac{420 + 1120 + 420 + 672 + 280 + 480 + 105}{420} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{2361}{420} \right] = \frac{3497}{2520},$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{1}{x} dx \approx 1.39.$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, n=4$

Solución:

(a) $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1-0}{2(4)} [f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)] \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1, f(0.25) = \frac{1}{\sqrt{1+0.25^2}} \approx 0.9701, f(0.5) = \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} \approx 0.8944,$$

$$f(0.75) = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} \approx 0.8000, f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \approx 0.7071,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1}{8} [1 + 2 \cdot (0.9701) + 2 \cdot (0.8944) + 2 \cdot (0.8) + 0.7071],$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1}{8} [1 + 1.9402 + 1.7888 + 1.6 + 0.7071] = \frac{7.0361}{8};$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx 0.88$$

(b) $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1-0}{3(4)} [f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)] \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1, f(0.25) = \frac{1}{\sqrt{1+0.25^2}} \approx 0.9701, f(0.5) = \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} \approx 0.8944,$$

$$f(0.75) = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} \approx 0.8000, f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \approx 0.7071,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1}{12} [1 + 4(0.9701) + 2(0.8944) + 4(0.8) + 0.7071],$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx \frac{1}{12} [1 + 3.8804 + 1.7888 + 3.2 + 0.7071] = \frac{10.5763}{12};$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \approx 0.88$$

3. $\int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx, n = 6$

Solución:

(a) $\Delta x = \frac{5/2 - 1}{6} = \frac{3/2}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx \frac{5/2 - 1}{2(6)} [f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + 2f(2) + 2f(2.25) + f(2.5)]$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1^2 + 8} \approx 2.0800, f(1.25) = \sqrt[3]{1.25^2 + 8} \approx 2.1225, f(1.5) = \sqrt[3]{1.5^2 + 8} \approx 2.1722,$$

$$f(1.75) = \sqrt[3]{1.75^2 + 8} \approx 2.2282, f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 8} \approx 2.2894, f(2.25) = \sqrt[3]{2.25^2 + 8} \approx 2.3551,$$

$$f(2.5) = \sqrt[3]{2.5^2 + 8} \approx 2.4244,$$

$$\Rightarrow \int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx \frac{1}{8} [2.0800 + 2(2.1225) + 2(2.1722) + 2(2.2282) + 2(2.2894) + 2(2.3551) + 2.4244]$$

$$\Rightarrow = \frac{26.8392}{8};$$

$$\therefore \int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx 3.35$$

(b) $\Delta x = \frac{5/2 - 1}{6} = \frac{3/2}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx \frac{5/2 - 1}{3(6)} [f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + 2f(2) + 4f(2.25) + f(2.5)]$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1^2 + 8} \approx 2.0800, f(1.25) = \sqrt[3]{1.25^2 + 8} \approx 2.1225, f(1.5) = \sqrt[3]{1.5^2 + 8} \approx 2.1722,$$

$$f(1.75) = \sqrt[3]{1.75^2 + 8} \approx 2.2282, f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 8} \approx 2.2894, f(2.25) = \sqrt[3]{2.25^2 + 8} \approx 2.3551,$$

$$f(2.5) = \sqrt[3]{2.5^2 + 8} \approx 2.4244,$$

$$\Rightarrow \int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx \frac{1}{12} [2.0800 + 4(2.1225) + 2(2.1722) + 4(2.2282) + 2(2.2894) + 4(2.3551) + 2.4244]$$

$$\Rightarrow = \frac{40.2508}{12};$$

$$\therefore \int_1^{5/2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8} \right) dx \approx 3.35$$

Problema tomado de la clase del profesor Gonzalo Hernández.

Resumen Materia

1. **Spline Cúbica:** $S(x) = \{S_k(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}] \mid k \in \{0..n-1\}\}$ y cumple

- (a) i. Interpolación: $S_k(x_k) = y_k$ n+1 restricciones
- ii. Continua: $S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k)$ n-1 restricciones
- iii. 1º Derivada Continua: $S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k)$ n-1 restricciones
- iv. 2º Derivada Continua: $S''_{k-1}(x_k) = S''_k(x_k)$ n-1 restricciones

2. **Condiciones de Borde:** Son 4n incógnitas y 4n-2 restricciones + 2 condiciones de borde

- (a) Spline Natural: $S''(x_0) = 0, S''(x_n) = 0$
- (b) Spline Extremos Constantes: $S''(x_0) = S''(x_1), S''(x_n) = S''(x_{n-1})$
- (c) Spline Valor Fijo: $S''(x_0) = \alpha, S''(x_n) = \beta$
- (d) Spline Sujeta: $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$

3. **Construcción de la Spline:** se define $m_k = \frac{S''(x_k)}{2}, h_k = x_{k+1} - x_k, d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}, \mu_k = 3(d_k - d_{k-1})$ y se resuelve el sistema matricial de n+1 incógnitas

$$\begin{bmatrix}
 1^\circ & \text{fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & & & & \\
 h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
 N^\circ & \text{fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 m_0 \\
 m_1 \\
 m_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 m_{n-1} \\
 m_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mu_0 \\
 \mu_1 \\
 \mu_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \mu_{n-1} \\
 \mu_n
 \end{bmatrix}$$

Ahora, se construye la Spline de la siguiente forma:

$$S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x - x_k) + S_{k,2}(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x - x_k)^3 \quad \text{donde}$$

$$S_{k,0} = y_k \quad S_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{3} \quad S_{k,2} = m_k \quad S_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{3h_k}$$

Problemas

- Por las fuertes lluvias que se pronostican para el mes de Mayo, se desean hacer arreglos en la carretera Autopista Central para evitar inundaciones, pero el Ingeniero que diseñó la carretera era de la Universidad de las Américas, y perdió los planos. El gerente, desesperado, llama a un Ingeniero amigo suyo de Beauchef, y le plantea el problema. El Beauchefiano, que pasó Cálculo Numérico, sabe muy bien que hacer. Le pide al gerente una tabla de datos tomados en los Portales de Peaje que indiquen tiempo y posición de un vehículo. La tabla que el gerente le entrega es la siguiente:

t	0	3	5	8	11
x	0	225	383	623	1001
y	0	9	25	64	121
y'	0				22

Haga lo que un Ingeniero de Beauchef haría.

Hint: Use Spline Cúbica y Polinomio de Newton

Respuestas

1. Primero se construye un Spline cúbico $S_x(t)$ el cual depende de $S_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, donde

$$S_x(t) = \begin{cases} S_0(t) = S_{0,0} + S_{0,1}(t-0) + S_{0,2}(t-0)^2 + S_{0,3}(t-0)^3 & t \in [0, 3] \\ S_1(t) = S_{1,0} + S_{1,1}(t-3) + S_{1,2}(t-3)^2 + S_{1,3}(t-3)^3 & t \in [3, 5] \\ S_2(t) = S_{2,0} + S_{2,1}(t-5) + S_{2,2}(t-5)^2 + S_{2,3}(t-5)^3 & t \in [5, 8] \\ S_3(t) = S_{3,0} + S_{3,1}(t-8) + S_{3,2}(t-8)^2 + S_{3,3}(t-8)^3 & t \in [8, 10] \end{cases}$$

La matriz es

$$\begin{bmatrix} 1^\circ & \text{Condición} & \text{de} & \text{borde} \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 2^\circ & \text{Condición} & \text{de} & \text{borde} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 = 3(d_1 - d_0) \\ \mu_2 = 3(d_2 - d_1) \\ \mu_3 = 3(d_3 - d_2) \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes son

$$\begin{aligned} h_0 &= 3 - 0 = 3 & d_0 &= \frac{225-0}{3} = 75 \\ h_1 &= 5 - 3 = 2 & d_1 &= \frac{383-225}{2} = 79 \\ h_2 &= 8 - 5 = 3 & d_2 &= \frac{623-383}{3} = 80 \\ h_3 &= 11 - 8 = 3 & d_3 &= \frac{1001-623}{3} = 126 \end{aligned}$$

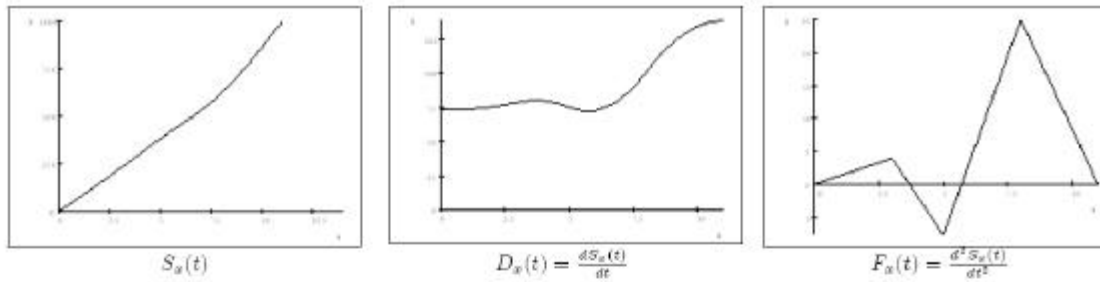
Reemplazando en la matriz es

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 12 \\ 3 \\ 138 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

C.B: Spline Natural

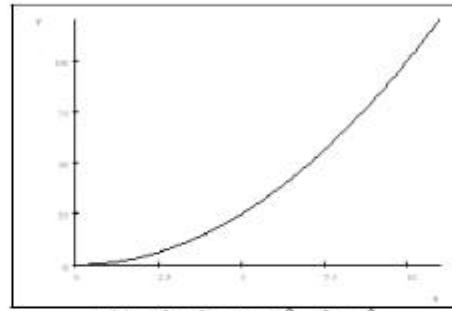
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \\ 138 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{116}{59} \\ -\frac{226}{59} \\ \frac{735}{59} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{k,0} &= y_k & S_{k,1} &= d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{3} & S_{k,2} &= m_k & S_{k,3} &= \frac{m_{k+1} - m_k}{3h_k} \\ S_x(t) &= \begin{cases} S_0(t) = 0 + \left(75 - \frac{3(2 \times 0 + \frac{116}{59})}{3}\right)(t-0) + 0 \times (t-0)^2 + \frac{\frac{116}{59} - 0}{3 \times 3}(t-0)^3 & t \in [0, 3] \\ S_1(t) = 225 + \left(79 - \frac{2(2 \times \frac{116}{59} - \frac{226}{59})}{3}\right)(t-3) + \frac{116}{59}(t-3)^2 + \frac{-\frac{226}{59} - \frac{116}{59}}{3 \times 2}(t-3)^3 & t \in [3, 5] \\ S_2(t) = 383 + \left(80 - \frac{3(2 \times (-\frac{226}{59}) + \frac{735}{59})}{3}\right)(t-5) + (-\frac{226}{59})(t-5)^2 + \frac{\frac{735}{59} + \frac{226}{59}}{3 \times 3}(t-5)^3 & t \in [5, 8] \\ S_3(t) = 623 + \left(126 - \frac{3(2 \times \frac{735}{59} + 0)}{3}\right)(t-8) + \frac{735}{59} \times (t-8)^2 + \frac{0 - \frac{735}{59}}{3 \times 3}(t-8)^3 & t \in [8, 11] \end{cases} \\ S_x(t) &= \begin{cases} \frac{4309}{59}t + \frac{116}{59}t^3 & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 & S(0) = 0 \\ \frac{2422}{59}t + \frac{629}{59}t^2 - \frac{591}{59}t^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 & S(3) = 225 \\ \frac{44116}{177}t - \frac{5483}{177}t^2 + \frac{961}{177}t^3 - \frac{167267}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 & S(5) = 383 \\ \frac{2695}{59}t^2 - 364t - \frac{245}{177}t^3 + \frac{232895}{177} & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 & S(8) = 623 \\ & & S(11) = 1001 \end{cases} \\ D_x(t) &= \begin{cases} \frac{116}{177}t^2 + \frac{4309}{59} & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 & D(0) = \frac{17897}{241} = 73.887966804979253112 \\ \frac{1258}{59}t - \frac{171}{59}t^2 + \frac{2422}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 & D(3) = \frac{18611}{241} = 77.224066390041493776 \\ -\frac{10966}{177}t + \frac{961}{177}t^2 + \frac{44116}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 & D(5) = \frac{19359}{241} = 80.327800829875518672 \\ \frac{5390}{59}t - \frac{245}{59}t^2 - 364 & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 & D(8) = \frac{18304}{241} = 78.024896265560165975 \\ & & D(11) = \frac{87909}{1205} = 72.953526970954356846 \end{cases} \\ F_x(t) &= \begin{cases} \frac{232}{177}t & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 & F(0) = 0 \\ -\frac{342}{59}t + \frac{1258}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 & F(3) = \frac{232}{59} = 3.9322033898305084746 \\ \frac{1922}{177}t - \frac{10966}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 & F(5) = -\frac{452}{59} = -7.6610169491525423729 \\ -\frac{490}{59}t + \frac{5390}{59} & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 & F(8) = \frac{1470}{59} = 24.915254237288135593 \\ & & F(11) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



2. Luego, para la coordenada y hacemos una interpolación de Newton

$$\begin{array}{rclcl}
 0 & 0 & y'(0) = 0 & \frac{2-0}{2-0} = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{9-0}{3-0} = 3 & \frac{5-0}{5-0} = 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 3 & 9 & \frac{25-9}{5-3} = 8 & \frac{19-9}{11-3} = 1 & 0 & 0 & & \\
 5 & 25 & \frac{64-25}{11-5} = 13 & \frac{10-19}{11-5} = 1 & 0 & & & \\
 8 & 64 & \frac{121-64}{11-8} = 19 & \frac{22-19}{11-8} = 1 & & & & \\
 11 & 121 & y'(11) = 22 & & & & & \\
 11 & 121 & & & & & &
 \end{array}$$



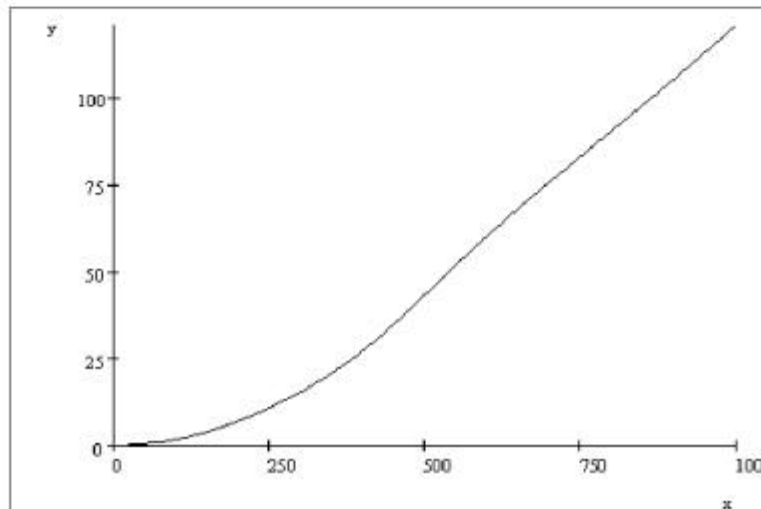
despejando $t \rightarrow t = \sqrt{y}$
reemplazando en $S_x(t)$

$$S_x(t) = S_x(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{4309}{59}\sqrt{y} + \frac{116}{531}\sqrt{y}^3 & \text{if } 0 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 3 \\ \frac{2422}{59}\sqrt{y} + \frac{629}{59}\sqrt{y}^2 - \frac{57}{59}\sqrt{y}^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 3 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 5 \\ \frac{44116}{177}\sqrt{y} - \frac{5453}{177}\sqrt{y}^2 + \frac{961}{531}\sqrt{y}^3 - \frac{107267}{177} & \text{if } 5 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 8 \\ \frac{2695}{59}\sqrt{y}^2 - 364\sqrt{y} - \frac{245}{177}\sqrt{y}^3 + \frac{233695}{177} & \text{if } 8 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 11 \end{cases}$$

transformando en una función que depende de y :

$$\Rightarrow S_x(y) = \begin{cases} \frac{4309}{59}\sqrt{y} + \frac{116}{531}\sqrt{y}^3 & \text{if } 0 \leq y \wedge y \leq 9 \\ \frac{2422}{59}\sqrt{y} + \frac{629}{59}y - \frac{57}{59}\sqrt{y}^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 9 \leq y \wedge y \leq 25 \\ \frac{44116}{177}\sqrt{y} - \frac{5453}{177}y + \frac{961}{531}\sqrt{y}^3 - \frac{107267}{177} & \text{if } 25 \leq y \wedge y \leq 64 \\ \frac{2695}{59}y - 364\sqrt{y} - \frac{245}{177}\sqrt{y}^3 + \frac{233695}{177} & \text{if } 64 \leq y \wedge y \leq 121 \end{cases}$$

Graficando en un plano xy se obtiene el plano pedido.



Ejemplos

Ejemplo 1: Utilizar la regla de Simpson para aproximar la integral: $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Tenga en cuenta que el valor real es 1.4626...

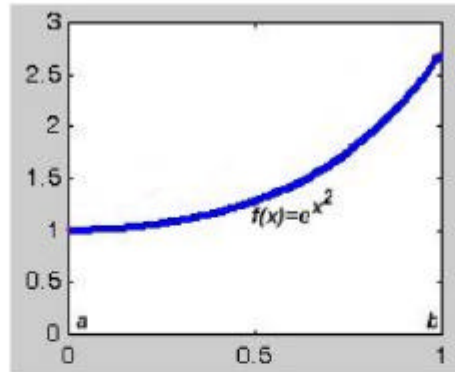


Fig. 4

Solución: Usando la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$f(x) = e^{x^2}$$

Si se asume el área a calcular como un solo arco de parábola, se tendría entonces que $dx = (b - a)/1 = 1$ ó $h = (dx/2) = 0.5$ y aplicando la ecuación **Ec 5** se tiene que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.5}{3} [e^{0^2} + 4e^{0.5^2} + e^{1^2}]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.5}{3} [1 + 4(1.2840) + 2.7183]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = 1.4757$$

Ahora si compara los resultados obtenidos al aplicar la regla del Trapecio o la regla de los Rectángulos, con respecto al valor real y al valor obtenido por la regla de Simpson tendría que analizar lo siguiente:

Integral	Valor Real	Rectangular	Trapezoidal	Simpson
$f(x) = e^{x^2}$	1.4626	1.2840	1.8591	1.4757
Er		12.21%	27.11%	0.90%
Ea		0.1786	0.3965	0.0131

Vale la pena aclarar que para los tres métodos se trabajó una sola sub área.

Desarrollado en MatLab se tendría el siguiente resultado.

```
»syms x
»f=exp(x^2);
»integral=int(f)
integral =
-1/2*i*pi^(1/2)*erf(i*x)
```

ERF Error de la función.

$Y = \text{ERF}(X)$ es el error de la función para cada elemento de X . X debe ser real. El error de la función está definido como:

$\text{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \cdot \int_0^x \exp(-t^2) dt$. Analice lo anterior.

Ejemplo 2: Aplicar la regla de Simpson para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ si se subdivide el área total en 5 intervalos.

Solución: En este caso, se identifica $n = 5$, y las particiones generadas estarían delimitadas por los puntos $P = \{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ sobre el eje x .

Así, aplicando la fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

Si se asume el área a calcular como cinco pequeños arcos de parábola, se tendría entonces que $dx = (b - a)/5 = 0.2$ ó $h = (dx/2) = 0.1$ y aplicando la ecuación **Ec 7** se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})]$$

$$y_0 = f(a) = e^{a^2} = e^{0^2} = 1, \quad y_{2n} = y_{10} = f(b) = e^{1^2} = 2.7183$$

Los términos impares se encontrarían de acuerdo con la fórmula $y_{2i-1} = f(a + (2i - 1)h) = f(x_i)$ así:

$$y_1 = f(h) = f(0.1) = e^{0.1^2} = 1.0101$$

$$y_3 = f(3h) = f(0.3) = e^{0.3^2} = 1.0942$$

$$y_5 = f(5h) = f(0.5) = e^{0.5^2} = 1.2840$$

$$y_7 = f(7h) = f(0.7) = e^{0.7^2} = 1.6323$$

$$y_9 = f(9h) = f(0.9) = e^{0.9^2} = 2.2479$$

Y la sumatoria igual a: 7.2685

Los términos pares se encontrarían de acuerdo a la fórmula $y_{2i} = f(a + 2ih)$ así:

$$y_2 = f(a + 2h) = f(0.2) = e^{0.2^2} = 1.0408$$

$$y_4 = f(a + 4h) = f(0.4) = e^{0.4^2} = 1.1735$$

$$y_6 = f(a + 6h) = f(0.6) = e^{0.6^2} = 1.4333$$

$$y_8 = f(a + 8h) = f(0.8) = e^{0.8^2} = 1.8965$$

$$y_{10} = f(a + 10h) = f(1) = e^{1^2} = 2.7183$$

Y la sumatoria igual a: 8.2624

Por tanto el valor de la integral será igual a:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{0.1}{3} [1 - 2.7183 + 4(7.2685) + 2(8.2624)] = 1.4627$$

Integral	Valor Real	Rectangular	Trapezoidal	Simpson
$f(x) = e^{x^2}$	1.4626	1.4537	1.48065	1.4627
Er		0.6085%	1.2375%	0.0068%
Ea		0.0089	0.0181	0.0001

Ejemplo 3: Usar la regla de Simpson para aproximar la integral: $\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$.

Solución: Igual que en el ejemplo anterior, se sustituyen los datos de manera directa en la fórmula de Simpson dividiendo el área en cuatro (4) sub áreas. En este caso, se tienen los datos:

$$\begin{aligned} a &= 2, b = 4, n = 4 \\ f(x) &= e^x / x \\ dx &= (4-2)/4 = 0.5 \\ h &= dx/2 = 0.25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})]$$

$$y_0 = f(a) = e^a / a = e^2 / 2 = 3.6945, \quad y_{2n} = y_8 = f(b) = e^4 / 4 = 13.6495$$

Los términos impares se encontrarían de acuerdo con la fórmula $y_{2i-1} = f(a + (2i-1)h) = f(x_i)$ así:

$$y_1 = f(a+h) = f(2+0.25) = e^{2.25} / 2.25 = 4.2168$$

$$y_3 = f(a+3h) = f(2.75) = e^{2.75} / 2.75 = 5.6882$$

$$y_5 = f(a+5h) = f(3.25) = e^{3.25} / 3.25 = 7.9355$$

$$y_7 = f(a+7h) = f(3.75) = e^{3.75} / 3.75 = 11.3390$$

Y la sumatoria igual a: 29.1795

Los términos pares se encontrarían de acuerdo a la fórmula $y_{2i} = f(a + 2ih)$ así:

$$y_2 = f(a+2h) = f(2.5) = e^{2.5} / 2.5 = 4.8730$$

$$y_4 = f(a+4h) = f(3.0) = e^{3.0} / 3.0 = 6.6952$$

$$y_6 = f(a+6h) = f(3.5) = e^{3.5} / 3.5 = 9.4616$$

$$y_8 = f(a+8h) = f(4.0) = e^{4.0} / 4.0 = 13.6495$$

Y la sumatoria igual a: 34.6793

Por tanto el valor de la integral será igual a:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{0.25}{3} [3.6945 - 13.6495 + 4(29.1795) + 2(34.6793)] = 14.6768$$

Ejemplo 4: Evaluar la función $\int_0^{1.2} f(x)dx$, usando la siguiente tabla:

x	0	0.10	0.30	0.50	0.70	0.95	1.20
$f(x)$	0	6.84	4.00	4.20	5.51	5.77	1.0

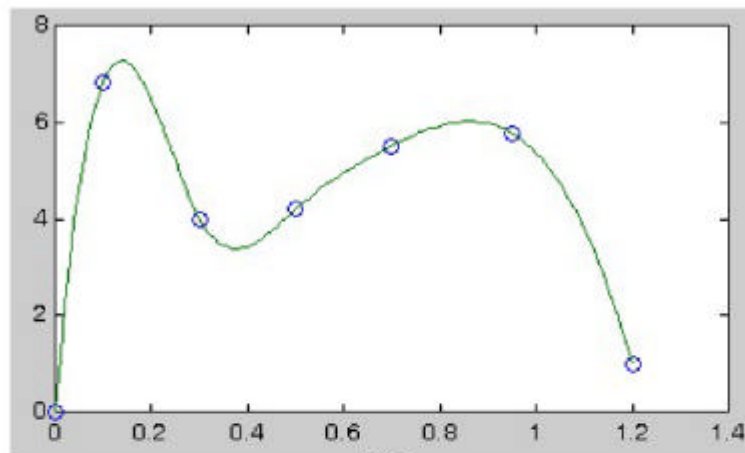


Fig 5

Solución.

Observe en la fig 5 que en el intervalo $[0,0.1]$ se puede aplicar la regla del trapecio, en el intervalo $[0.1,0.7]$ la regla de Simpson de 3/8 y en el intervalo $[0.7,1.2]$ la regla de Simpson de 1/3. Así, se tienen las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{0.1} f(x)dx = \frac{0.1-0}{2} [f(0) + f(0.1)] = 0.842$$

$$I_2 = \int_{0.1}^{0.7} f(x)dx = \frac{0.7-0.1}{8} [f(0.1) + 3f(0.3) + 3f(0.5) + f(0.7)] = 2.7712$$

$$I_3 = \int_{0.7}^{1.2} f(x)dx = \frac{1.2-0.7}{6} [f(0.7) + 4f(0.95) + f(1.2)] = 2.4658$$

Finalmente, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_0^{1.2} f(x)dx = 0.842 + 2.7712 + 2.4658 = 6.079$$

Ejemplo 5: Calcula la integral $\int_{-1}^{3.25} f(x)dx$, usando la siguiente tabla de datos:

x	-1	-0.5	0	1	1.75	2.5	3.25
$f(x)$	2	-3	1.5	-1	0.5	0.75	-2

Si se desarrolla la gráfica con Matlab ajustando los datos de la tabla anterior mediante splines cúbicos, se tendría lo siguiente:

```

» x=[-1 -0.5 0 1 1.75 2.5 3.25];
» y=[2 -3 1.5 -1 0.5 0.75 -2];
» xx=-1:0.01:3.5;
» yy=spline(x,y,xx);
» plot(x,y,'o',xx,yy)

```

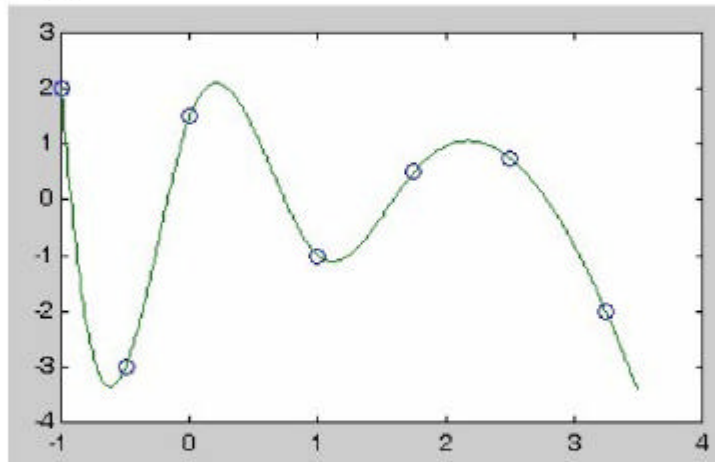


Fig. 6

Solución combinando varios métodos de integración.

Para este caso, se puede aplicar la regla de Simpson de 1/3 en el intervalo $[-1, 0]$, la regla del trapecio en el intervalo $[0, 1]$ y la regla de Simpson de 3/8 en el intervalo $[1, 3.25]$. Así, se tiene las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{-1}^0 f(x)dx \approx \frac{0 - (-1)}{6} [f(-1) + 4f(-0.5) + f(0)] \approx -1.41667$$

$$I_2 = \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1-0}{2} [f(0) + f(1)] \approx 0.25$$

$$I_3 = \int_1^{3.25} f(x)dx \approx \frac{3.25-1}{8} [f(1) + 3f(1.75) + 3f(2.5) + f(3.25)] \approx 0.210938$$

Por lo tanto, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_{-1}^{3.25} f(x)dx \approx -1.41667 + 0.25 + 0.210938 \approx -0.955729$$

Vale la pena comentar que no siempre tiene que suceder que se apliquen exactamente las tres reglas. En realidad, esto depende de cómo se encuentran espaciados los intervalos de la tabla de datos y la forma que pueda tener la curva.

Ejemplo 6: Calcular la siguiente Integral: $\int_1^3 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$, correspondiente al área bajo la curva mostrada en la Fig. 7 entre los límites 1 y 3.

Intervalo: $1 \leq x \leq 3$

Método: Regla de Simpson

$n = 2$ sub intervalos, donde $dx = (b-a)/n=1$.

Se utiliza la regla de Simpson con $dx = 1.0$ ó $h=0.5$, $n = 2$ sub intervalos y la tabla

de valores para $f(x) = \int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

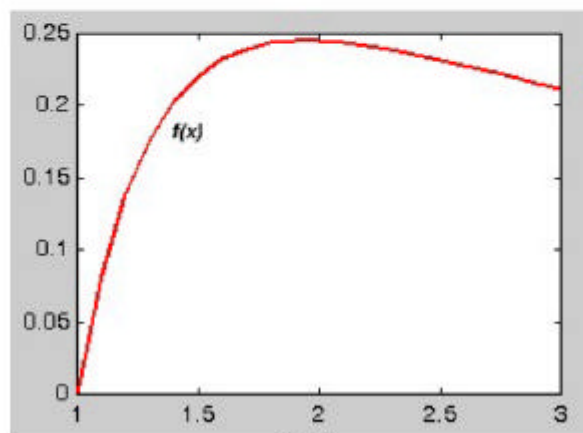


Fig. 7

TABLA de valores

x	$f(x)$	y_i
1.0	0.000000000000000	Y_0
1.5	0.22070724963720	Y_1
2.0	0.24506453586714	Y_2
2.5	0.23180525693000	Y_3
3.0	0.21142803353252	Y_4

El resultado aplicando la siguiente fórmula sería: (Tenga en cuenta que solo se trabajan 2 sub áreas)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2 + y_4)]$$

$$I = 0.50/3 * (0.000000000000000 - 0.21142803353252 + \dots \\ 4 * (0.22070724963720 + 0.23180525693000) + \dots \\ 2 * (0.24506453586714 + 0.21142803353252))$$

$$I = 0.41860118858927$$
