Pauta Control 1 primavera 2007
16 de agosto

2. Encuentre un algoritmo que produzca la sucesión $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = \pi$.

Solución:

Como una sucesión es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, el problema se reduce a encontrar una función tal que: f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = π. Esto es equivalente a encontrar el polinomio que aproxime la malla de puntos (1,1), (2,2), (3,3) y (4, π).
(0,5 p)

De este modo, se puede usar alguno de los métodos vistos en clases: utilizar la matriz de Vandermônde, utilizar el método de Lagrange, o el método de las diferencias divididas de Newton. (0.5 p por mencionarlo).

Explicar grosso modo el método (1.0 p)

El polinomio obtenido es el siguiente:

$$\frac{1}{6}\pi x^3 - \pi x^2 + \frac{11}{6}\pi x - \pi - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{19}{3}x + 4$$

(1.0 p por el resultado correcto)

Mediante el método de Lagrange, se tiene:

$$-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$+\frac{1}{6}\pi(x-1)(x-2)(x-3)$$

Y por Newton:

$$\left(\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\right)(x-3)(x-2) + 1\right)(x-1) + 1$$

Donde los coeficientes de diferencias divididas son:

$A_0 = 1$
$A_1 = 1$
$A_2 = 0$
$A_3 = \pi/6 - 2/3$

Nota: Pueden variar según los puntos escogidos, pero el resultado final debe ser igual.

Y por Vandermônde, tenemos dos opciones:

a) Solucionar el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\pi \\ -\frac{19}{3} + \frac{11}{6}\pi \\ 4-\pi \\ \frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

b) Resolver la siguiente ecuación:

$$Det\left(\begin{bmatrix} y & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 9 & 27 \\ \pi & 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Cuya solución es:

$$12\,y - 48 + 76\,x + 8\,x^3 - 48\,x^2 + 12\,\pi - 22\,\pi\,x + 12\,\pi\,x^2 - 2\,\pi\,x^3 = 0$$

El polinomio deseado se obtiene despejando la variable y.
El desarrollo son 3 pts.

Nota final: Sólo se requiere un método para solucionar el problema, en todo caso debe dar el mismo polinomio.