Apuntes Slines Cúbicos - MA-33A

Gonzalo Hernández y Gonzalo Ríos

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1 Definición Spline Cúbico:

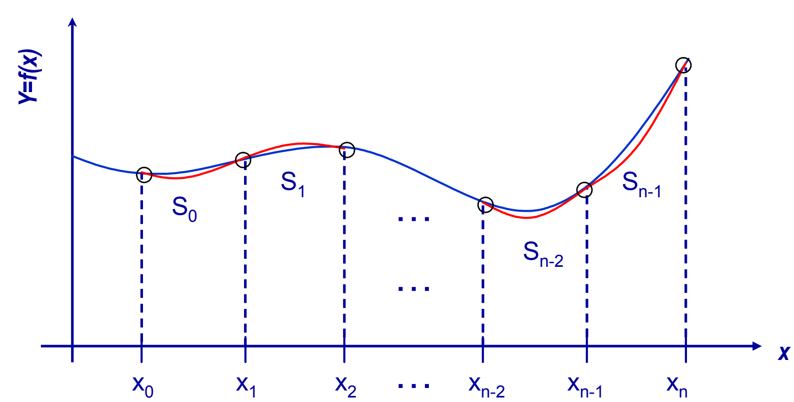
Un spline cúbico es un polinomio cúbico $S(x)$ definido por trazos que interpola una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Para contruir la spline sólo se necesitan $(n+1)$ puntos (x_k, y_k) tales que:

i) $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

ii) $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$

Luego, $S(x)$ es un polinomio cúbico en el subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ denotado por $S_k(x)$ para $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ definido segun:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x-x_2) + c_2(x-x_2)^2 + d_2(x-x_2)^3 & x \in [x_2, x_3] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



2 Cálculo Spline Cúbico:

Para determinar un spline cúbico se imponen las siguientes condiciones:

i) Condición de Interpolación:

$$S(x_k) = S_k(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, ..., n$$

ii) Condición de continuidad de $S(x)$:

$$S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2$$

iii) Condición de continuidad de $S'(x)$:

$$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2$$

iv) Condición de continuidad de $S''(x)$:

$$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2$$

Las condiciones i) - iv) generan $(4n-2)$ ecuaciones. Las dos últimas ecuaciones se obienen de las condiciones de frontera:

v) Condiciones de frontera:

(a) Natural, Libre o Variacional:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \Leftrightarrow c_0 = c_n = 0$$

(b) Segunda Derivada:

$$S''(x_0) = f''(x_0) \quad S''(x_n) = f''(x_n)$$

(c) Sujeta:

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n)$$

(d) Not a knot:

$$S'''_0(x_1) = S'''_1(x_1) \quad S'''_{n-2}(x_{n-1}) = S'''_{n-1}(x_{n-1})$$

(e) Periódica:

$$S'(x_0) = S'(x_n) \quad S''(x_0) = S''(x_n)$$

Se deducirán a continuación las ecuaciones que deben satisfacer el spline, aplicando las condiciones i) - v) para las condiciones de frontera natural y sujeta.
Aplicando la condiciones i):

$$a_k = S_k(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, ..., n \tag{0}$$

Aplicando las condiciones ii):

$$S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2$$
$$a_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3 = a_{k+1}$$

Si se define:

$$h_k = (x_{k+1} - x_k) \quad \forall k = 0, ..., n-1$$

se obtiene:

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = a_{k+1} \quad \forall k = 0, ..., n-2 \tag{1}$$

Aplicando las condiciones iii):

$$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2 \tag{2}$$
$$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}$$

Aplicando las condiciones iv):

$$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \quad \forall k = 0, ..., n-2 \tag{3}$$
$$c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}$$

Despejando d_k de (3): $d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k)$ y sustituyendo en (1) y (2) se obtienen las ecuaciones:

$$a_{k+1} = a_k + b_k h_k + (c_{k+1} + 2c_k)\frac{h_k^2}{3} \quad \forall k = 0, ..., n-2 \tag{4}$$

$$b_{k+1} = b_k + (c_{k+1} + c_k)h_k \quad \forall k = 0, ..., n-2 \tag{5}$$

Al despejar b_k y b_{k-1} de (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} b_k &= (a_{k+1} - a_k)\frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k)\frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, ..., n-1 \\ b_{k-1} &= (a_k - a_{k-1})\frac{1}{h_{k-1}} - (c_k + 2c_{k-1})\frac{h_{k-1}}{3} \quad \forall k = 1, ..., n \end{aligned}$$

Si se reemplaza b_k *y* b_{k-1} en (5) para $k = 1, ..., n$ se obtiene finalmente:

$$b_k = b_{k-1} + (c_k + c_{k-1})h_{k-1} \quad \forall k = 1, ..., n-1$$

$$(a_{k+1} - a_k)\frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k)\frac{h_k}{3} = (a_k - a_{k-1})\frac{1}{h_{k-1}} - (c_k + 2c_{k-1})\frac{h_{k-1}}{3} + (c_k + c_{k-1})h_{k-1}$$

$$(c_{k+1} + 2c_k)h_k - (c_k + 2c_{k-1})h_{k-1} + (c_k + c_{k-1})3h_{k-1} = (a_{k+1} - a_k)\frac{3}{h_k} - (a_k - a_{k-1})\frac{3}{h_{k-1}}$$

$$c_{k-1}h_{k-1} + c_k(2k_{k-1} + 2h_k) + c_{k+1}h_k = (a_{k+1} - a_k)\frac{3}{h_k} - (a_k - a_{k-1})\frac{3}{h_{k-1}} \quad \forall k = 1, ..., n-1 \tag{6}$$

A este sistema de $(n-1)$ ecuaciones lineales se debe agregar las condiciones de frontera libre o sujeta, obteniéndose un sistema tridiagonal de $(n+1)$ ecuaciones lineales para las $(n+1)$ incógnitas $c_0, c_1, ..., c_n$. Aplicando las condiciones de frontera Libre o Natural:

$$c_0 = 0 \quad c_n = 0$$

se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Aplicando las condiciones de frontera sujetas:

$$S'_0(x_0) = f'(x_0) \quad S'_n(x_n) = f'(x_n)$$

se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3f'(x_n) - \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ambos sistemas tiene solución única si y sólo si: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. A continuación veremos un ejemplo sencillo para ambas condiciones de frontera.

- Condición de Frontera Natural: Consideremos los puntos equiespaciados: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$ y la función $f(x) = \sin(\pi x)$. Luego: $y_0 = \sin(0) = 0, y_1 = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, y_3 = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = \sin(\pi) = 0$. Para determinar el sistema (7) se necesita calcular h_0, h_1, h_2, h_3 y a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Como los puntos son equiespaciados: $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4}$. Los a_k se determinan de (0): $a_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, ..., 4$. Luego: $a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = 0$. El sistema (7) queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} - \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} \\ \frac{3(a_4-a_3)}{h_3} - \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12(1-\sqrt{2}) \\ 12(\sqrt{2}-2) \\ 12(1-\sqrt{2}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.9706 \\ -7.0294 \\ -4.9706 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.6723 \\ -5.1933 \\ -3.6723 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tienen que determinar los b_k y d_k. Para ello se utilizan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_k &= (a_{k+1} - a_k)\frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k)\frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, ..., n-1 \\ d_k &= \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k) \quad \forall k = 0, ..., n-1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1-a_0)\frac{1}{h_0} - (c_1+2c_0)\frac{h_0}{3} \\ (a_2-a_1)\frac{1}{h_1} - (c_2+2c_1)\frac{h_1}{3} \\ (a_3-a_2)\frac{1}{h_2} - (c_3+2c_2)\frac{h_2}{3} \\ (a_4-a_3)\frac{1}{h_3} - (c_4+2c_3)\frac{h_3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1344 \\ 2.2164 \\ 0 \\ -2.2164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3h_0}(c_1-c_0) \\ \frac{1}{3h_1}(c_2-c_1) \\ \frac{1}{3h_2}(c_3-c_2) \\ \frac{1}{3h_3}(c_4-c_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.8963 \\ -2.0281 \\ 2.0281 \\ 4.8963 \end{bmatrix}$$

- Condición de Frontera Sujeta: Consideremos los puntos equiespaciados: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$ y la función $f(x) = \cos(\pi x)$. Luego: $y_0 = \cos(0) = 1, y_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, y_3 = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = \cos(\pi) = -1$. Para determinar el sistema (7) se necesita calcular h_0, h_1, h_2, h_3 y a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Como los puntos son equiespaciados: $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4}$. Los a_k se determinan de (0): $a_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, ..., 4$. Luego: $a_0 = 1, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = -1$. El sistema

(7) queda:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} - \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} \\ \frac{3(a_4-a_3)}{h_3} - \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} \\ 3f'(x_n) - \frac{3(a_4-a_3)}{h_3} \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(\frac{\sqrt{2}}{2}-1) \\ 12(1-\sqrt{2}) \\ 0 \\ -12(1-\sqrt{2}) \\ -12(\frac{\sqrt{2}}{2}-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5147 \\ -4.9706 \\ 0 \\ 4.9706 \\ 3.5147 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.1933 \\ -3.6722 \\ 0 \\ 3.6722 \\ 5.1933 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tienen que determinar los b_k y d_k. Para ello se utilizan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_k &= (a_{k+1}-a_k)\frac{1}{h_k} - (c_{k+1}+2c_k)\frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, ..., n-1 \\ d_k &= \frac{1}{3h_k}(c_{k+1}-c_k) \quad \forall k = 0, ..., n-1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1-a_0)\frac{1}{h_0} - (c_1+2c_0)\frac{h_0}{3} \\ (a_2-a_1)\frac{1}{h_1} - (c_2+2c_1)\frac{h_1}{3} \\ (a_3-a_2)\frac{1}{h_2} - (c_3+2c_2)\frac{h_2}{3} \\ (a_4-a_3)\frac{1}{h_3} - (c_4+2c_3)\frac{h_3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.2164 \\ -3.1344 \\ -2.2164 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3h_0}(c_1-c_0) \\ \frac{1}{3h_1}(c_2-c_1) \\ \frac{1}{3h_2}(c_3-c_2) \\ \frac{1}{3h_3}(c_4-c_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0281 \\ 4.8963 \\ 4.8963 \\ 2.0281 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema presenta un estimación del error de la spline cúbica sujeta:

Teorema: Sea $f \in C^4[a,b]$ con $\max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right| = M$. Si S es la spline sujeta determinada en los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, entonces:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} \max_{0 \le j \le (n-1)} (x_{j+1} - x_j)^4 \tag{9}$$

Un último teorema, que establece la suavidad de la spline es el siguiente:

Teorema: Sea $g \in C^2[a,b]$ cualquier función que satisface las condiciones de interpolación sujetas en los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ para una función f:

$$\begin{aligned} g(x_k) &= f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, ..., n \\ g'(x_0) &= f'(x_0), g'(x_n) = f'(x_n) \end{aligned}$$

Entonces, si S es la spline sujeta determinada en esos mismos puntos:

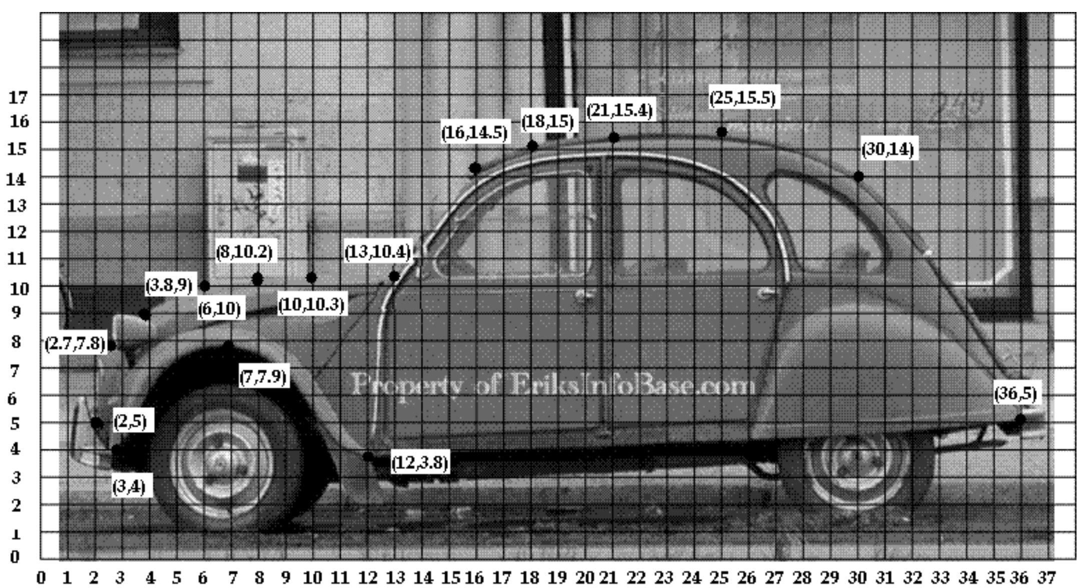
$$\int_b^a |S(x)|^2\,dx \le \int_b^a |g(x)|^2\,dx \tag{10}$$

Estos 2 resultados justifican el uso de splines. El primer teorema da una cota del error y el segundo establece una propiedad de optimalidad: la spline sujeta S es la que oscila menos de todas las funciones "suaves" que interpolan a f.

3 Un ejemplo de la Vida Real:

Construyamos mediante splines cúbicas el contorno de la citroneta de la fotografía:

1) Primero, se realiza la toma de datos usando una malla cuadriculada sobre la fotografía:



2) Luego, los datos se tabulan. Los datos sel contorno superior son

$$:\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ x_k & 2 & 2.7 & 3.8 & 6 & 8 & 10 & 13 & 16 & 18 & 21 & 25 & 30 & 36 \\ y_k & 5 & 7.8 & 9 & 10 & 10.2 & 10.3 & 10.4 & 14.5 & 15 & 15.4 & 15.5 & 14 & 5 \end{bmatrix}$$

3) Ahora se calculan los elementos de la matriz, considerando las definiciones:

$$\begin{aligned} h_k &= x_{k+1} - x_k \\ \lambda_k &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \\ \mu_k &= 3\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ h_k & 0.7 & 1.1 & 2.2 & 2 \\ \lambda_k & \frac{2.8}{0.7} = 4 & \frac{1.2}{1.1} = \frac{12}{11} & \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} & \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10} \\ \mu_k & & 3 \times (\frac{12}{11} - 4) = -\frac{96}{11} & 3 \times (\frac{5}{11} - \frac{12}{11}) = -\frac{21}{11} & 3 \times (\frac{1}{10} - \frac{5}{11}) = -\frac{117}{110} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 4 & 5 & 6 & 7 \\ h_k & 2 & 3 & 3 & 2 \\ \lambda_k & \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} & \frac{0.1}{3} = \frac{1}{30} & \frac{4.1}{3} = \frac{41}{30} & \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{1}{20} - \frac{1}{10}) = -\frac{3}{20} & 3 \times (\frac{1}{30} - \frac{1}{20}) = -\frac{1}{20} & 3 \times (\frac{41}{30} - \frac{1}{30}) = 4 & 3 \times (\frac{1}{4} - \frac{41}{30}) = -\frac{67}{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 8 & 9 & 10 & 11 \\ h_k & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \lambda_k & \frac{0.4}{3} = \frac{2}{15} & \frac{0.1}{4} = \frac{1}{40} & -\frac{1.5}{5} = -\frac{3}{10} & -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{2}{15} - \frac{1}{4}) = -\frac{7}{20} & 3 \times (\frac{1}{40} - \frac{2}{15}) = -\frac{13}{40} & 3 \times (-\frac{3}{10} - \frac{1}{40}) = -\frac{39}{40} & 3 \times (-\frac{3}{2} + \frac{3}{10}) = -\frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

4) Usando las condiciones de borde de spline natural: $S^{''}(x_0) = 0,\ S^{''}(x_n) = 0,$ y reemplazando valores, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{18}{5} & \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & \frac{33}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{42}{5} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 14 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 22 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{96}{11} \\ -\frac{21}{11} \\ -\frac{117}{110} \\ -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{20} \\ 4 \\ -\frac{67}{20} \\ -\frac{7}{20} \\ -\frac{13}{40} \\ -\frac{39}{40} \\ -\frac{18}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

5) Se resuelve el sistema aproximando con 4 cifras significativas con redondeo:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2.482 \\ 0.1888 \\ -0.1932 \\ 0.07197 \\ -0.1697 \\ 0.5009 \\ -0.5007 \\ 0.07707 \\ -0.03977 \\ 0.0001334 \\ -0.1637 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) Se construye la spline natural, $\forall k = 0, 1, ..., 11$

$$\begin{aligned} S_k(x) &= a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \\ a_k &= y_k \\ b_k &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k\,(2c_k + c_{k+1})}{3} \\ d_k &= \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_k & 2 & 2.7 & 3.8 & 6 & 8 & 10 & 13 \\ y_k & 5 & 7.8 & 9 & 10 & 10.2 & 10.3 & 10.4 \\ h_k & 0.7 & 1.1 & 2.2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} & 4 & 1.091 & 0.4545 & 0.1 & 0.05 & 0.03333 & 1.367 \\ c_k & 0 & -2.482 & 0.1888 & -0.1932 & 0.07197 & -0.1697 & 0.5009 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ x_k & 16 & 18 & 21 & 25 & 30 & 36 \\ y_k & 14.5 & 15 & 15.4 & 15.5 & 14 & 5 \\ h_k & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} & 0.25 & 0.1333 & 0.025 & -0.3 & -1.5 & \\ c_k & -0.5007 & 0.07707 & -0.03977 & 0.0001334 & -0.1637 & 0 \end{bmatrix}$$

i) $k = 0$

$S_0(x) = 5 + \left(4 - \frac{0.7\times(2\times 0 - 2.482)}{3}\right) \times (x-2) + 0 \times (x-2)^2 + \frac{-2.482 - 0}{3\times 0.7} \times (x-2)^3$

$\Longrightarrow S_0(x) = 7.091\,x^2 - 9.604x - 1.182x^3 + 5.297$

ii) $k = 1$

$S_1(x) = 7.8 + \left(1.091 - \frac{1.1\times(2\times(-2.482)+0.1888)}{3}\right) \times (x-2.7) - 2.482 \times (x-2.7)^2 + \frac{0.1888+2.482}{3\times 1.1} \times (x-2.7)^3$

$\Longrightarrow S_1(x) = 33.94x - 9.038x^2 + 0.8093x^3 - 33.9$

iii) $k = 2$

$S_2(x) = 9 + \left(0.4545 - \frac{2.2\times(2\times 0.1888 - 0.1932)}{3}\right) \times (x-3.8) + 0.1888 \times (x-3.8)^2 + \frac{-0.1932-0.1888}{3\times 2.2} \times (x-3.8)^3$

$\Longrightarrow S_2(x) = 0.8486x^2 - 3.623x - 0.05788x^3 + 13.69$

iv) $k=3$

$S_3(x)=10+\left(0.1-\frac{2\times(2\times(-0.193\,2)+0.071\,97)}{3}\right)\times(x-6)-0.193\,2\times(x-6)^2+\frac{0.071\,97+0.193\,2}{3\times2}\times(x-6)^3$

$\Longrightarrow S_3(x)=7.401x-0.988\,7x^2+0.044\,2\,x^3-8.359$

v) $k=4$

$S_4(x)=10.2+\left(0.05-\frac{2\times(2\times0.071\,97-0.169\,7)}{3}\right)\times(x-8)+0.071\,97\times(x-8)^2+\frac{-0.169\,7-0.071\,97}{3\times2}\times(x-8)^3$

$\Longrightarrow S_4(x)=1.039x^2-8.818x-0.04028x^3+34.89$

vi) $k=5$

$S_5(x)=10.3+\left(0.033\,33-\frac{3\times(2\times(-0.169\,7)+0.500\,9)}{3}\right)\times(x-10)-0.169\,7\times(x-10)^2+\frac{0.500\,9+0.169\,7}{3\times3}\times(x-10)^3$

$\Longrightarrow S_5(x)=25.62x-2.405x^2+0.07451x^3-79.9$

vii) $k=6$

$S_6(x)=10.4+\left(1.367-\frac{3\times(2\times0.500\,9-0.500\,7)}{3}\right)\times(x-13)+0.500\,9\times(x-13)^2+\frac{-0.500\,7-0.500\,9}{3\times3}\times(x-13)^3$

$\Longrightarrow S_6(x)=4.841\,x^2-68.58x-0.111\,3x^3+328.3$

viii) $k=7$

$S_7(x)=14.5+\left(0.25-\frac{2\times(2\times(-0.500\,7)+0.077\,07)}{3}\right)\times(x-16)-0.500\,7\times(x-16)^2+\frac{0.077\,07+0.500\,7}{3\times2}\times(x-16)^3$

$\Longrightarrow S_7(x)=90.84x-5.123x^2+0.096\,3\,x^3-522$

ix) $k=8$

$S_8(x)=15+\left(0.1333-\frac{3\times(2\times0.077\,07-0.039\,77)}{3}\right)\times(x-18)+0.077\,07\times(x-18)^2+\frac{-0.039\,77-0.077\,07}{3\times3}\times(x-18)^3$

$\Longrightarrow S_8(x)=0.778\,1x^2-15.37x-0.01298x^3+115.3$

x) $k=9$

$S_9(x)=15.4+\left(0.025-\frac{4\times(2\times(-0.039\,77)+0.000\,133\,4)}{3}\right)\times(x-21)-0.039\,77\times(x-21)^2+\frac{0.000\,133\,4+0.039\,77}{3\times4}\times(x-21)^3$

$\Longrightarrow S_9(x)=6.201x-0.249\,3x^2+0.003325\,x^3-35.68$

xi) $k=10$

$S_{10}(x)=15.5+\left(-0.3-\frac{5\times(2\times(0.000\,133\,4)-0.163\,7)}{3}\right)\times(x-25)+0.000\,133\,4\times(x-25)^2+\frac{-0.163\,7-0.000\,133\,4}{3\times5}\times(x-25)^3$

$\Longrightarrow S_{10}(x)=0.819\,3x^2-20.51x-0.01092\,x^3+186.9$

xii) $k=11$

$S_{11}(x)=14+\left(-1.5-\frac{6\times(2\times(-0.163\,7)+0)}{3}\right)\times(x-30)-0.163\,7\times(x-30)^2+\frac{0+0.163\,7}{3\times6}\times(x-30)^3$

$\Longrightarrow S_{11}(x)=33.53x-0.982\,2x^2+0.009094x^3-353.5$

7) Finalmente, la spline cúbica es:

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x) & \text{si} \quad x\in[2,2.7] \\ S_1(x) & \text{si} \quad x\in[2.7,3.8] \\ S_2(x) & \text{si} \quad x\in[3.8,6] \\ S_3(x) & \text{si} \quad x\in[6,8] \\ S_4(x) & \text{si} \quad x\in[8,10] \\ S_5(x) & \text{si} \quad x\in[10,13] \\ S_6(x) & \text{si} \quad x\in[13,16] \\ S_7(x) & \text{si} \quad x\in[16,18] \\ S_8(x) & \text{si} \quad x\in[18,21] \\ S_9(x) & \text{si} \quad x\in[21,25] \\ S_{10}(x) & \text{si} \quad x\in[25,30] \\ S_{11}(x) & \text{si} \quad x\in[30,36] \end{cases}$$

8) Ahora, tabulando los datos de la parte inferior del escarabajo.Dada su forma, se interpolará por trazos usando polinomios de 1° y 2° grado:

$$\begin{bmatrix} x_k & 2 & 3 & 7 & 12 & 36 \\ y_k & 5 & 4 & 7.9 & 3.8 & 5 \end{bmatrix}$$

i) $f_0(x)=5\frac{(x-3)}{2-3}+4\frac{(x-2)}{3-2}=7-x \Longrightarrow f_0(x)=7-x$

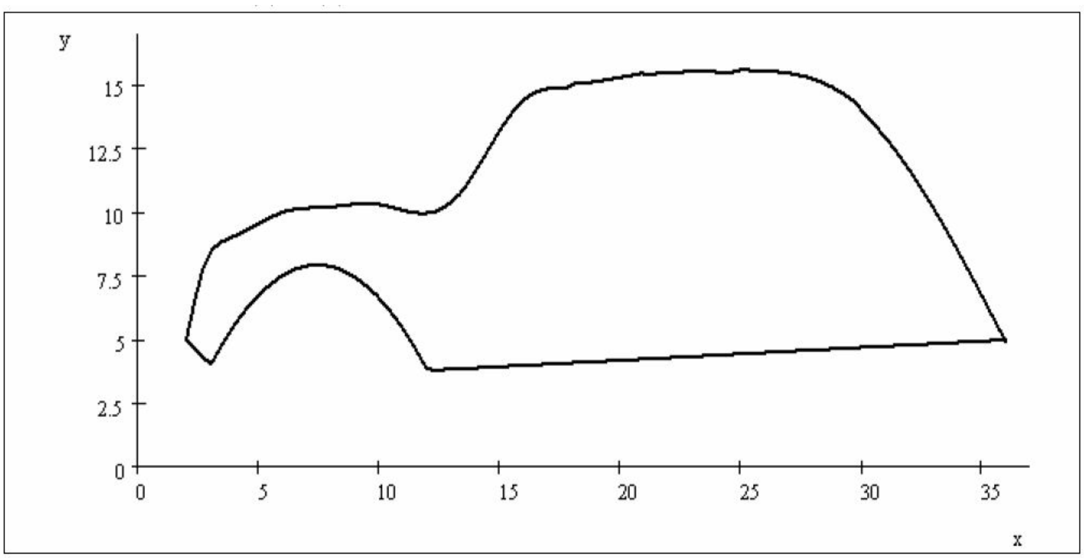
ii) $f_1(x)=4\frac{(x-7)(x-12)}{(3-7)(3-12)}+7.9\frac{(x-3)(x-12)}{(7-3)(7-12)}+3.8\frac{(x-3)(x-7)}{(12-3)(12-7)}=2.969\,x-0.199\,4x^2-3.113 \Longrightarrow f_1(x)=2.969\,x-0.199\,4x^2-3.113$

iii) $f_2(x)=3.8\frac{(x-36)}{(12-36)}+5\frac{(x-12)}{(36-12)}=0.05x+3.2 \Longrightarrow f_2(x)=0.05x+3.2$

iv) Luego, esta función por trozos queda:

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & \text{si} \quad [2,3] \\ f_1(x) & \text{si} \quad [3,12] \\ f_2(x) & \text{si} \quad [12,36] \end{cases}$$

Finalmente, el gráfico de $S(x)$ y $f(x)$ es:



4 Spline Toolbox en Matlab

Primero que todo se tienen que definir los puntos (x, y) que se utilizarán como datos para calcular las splines. Por ejemplo:

```
x=(0:0.05:6); y=x.*cos(x.^2);
plot(x,y,'-ob'); hold on;
```

Se calcula la spline sujeta para $y = x\cos(x^2)$ con $y'(0) = 1, y'(6) = 71.2801$ mediante las instrucciones:

```
pp=csape(x,[1 y 71.2801],[1 1]);
```

La estructura "pp" contiene:

- Los 121 puntos $x = 0, 0.05, 0.1, ..., 6$ denominados por Matlab como "breaks"
- Los coeficientes de la Splines: "coefs

$$\begin{array}{cccc}
d_0 & c_0 & b_0 & a_0 \\
d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\
d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_{n-2} & c_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} \\
d_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} & a_{n-1}
\end{array}$$

- La cantidad de intervalos: $l = 120$.
- El orden de las splines: $k = 4$.
- La dimensión de las splines: $d = 1$.

Para evaluar la spline "pp" en puntos distintos a los "breaks" se utilizan las instrucciones (por ejemplo):

```
xx=(0:0.01:6);
yy=fnval(pp,x);
```

Se pueden mostrar los detalles de la splines (coefs) mediante la instrucción:

```
[breaks,coefs,l,k,d] = unmkpp(pp);
```

Como también realizar operaciones sobre la estructura "pp" como por ejemplo derivarla e integrarla:

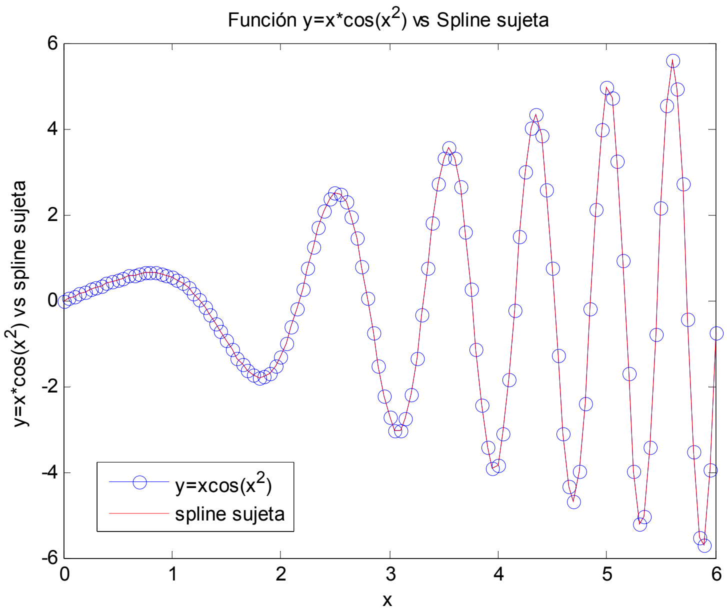
```
der_pp = fnder(pp);
der_pp = fnder(pp,dorder);
int_pp = fnint(pp);
int_pp = fnint(pp,value);
```

Las funciones "fnder" y "fint" devuelven la derivada e integral de la spline en la forma "pp".
Finalmente, podemos graficamos la spline resultante sobre el gráfico anterior, mediante:

```
plot(xx,yy,'-r'); hold on;
```

O también:

```
fnplt(pp,'-r');
```



Otros comandos del Spline Toolbox en Matlab son:

1) spline: Interpolación spline cúbica con condiciones de frontera sujeta

3) csapi: Interpolación spline cúbica con condiciones de frontera not-a-knot

4) cpapi: Interpolación spline general (lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, etc).

5) csaps: Interpolación spline cúbica suavizante.