

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico

Problemas Resueltos

Gonzalo Ríos
grios@dim.uchile.cl

Noviembre 2007

1 Representación Numérica y Errores

1.1 Resumen de Materia

- Representación de números enteros:** $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i b^i$ donde $b = 2, 8, 10$ y $\alpha_i \in \{0, \dots, b-1\}$
- Representación de números reales:** $x = \pm m \cdot b^z$ donde $b \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, $m \in [0, 1] \cap \mathbb{R}$
- Representación de punto flotante:** $x = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t \cdot b^z$ donde $b \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$, $z \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \{0, \dots, b-1\}$
- Representación de números reales en $[0, 1]$:** $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i 2^{-i}$ donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$
- Representación de punto flotante actual:** $x = (-1)^s 2^{(z-c)} (1 + m)$ donde $s \in \{0, 1\}$, $c = 1023$, $z \in \{0, 1, \dots, 2^{11} - 1\}$, $m = m_1 m_2 \dots m_{52}$ con $m_i \in \{0, 1\}$
- Aproximación en aritmética finita:** Sea $x = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t m_{t+1} \cdot b^z$.
 - Al redondear x para una aritmética finita de t cifras significativas se obtiene:
 - $x^* = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t \cdot b^z$ si $m_{t+1} < \frac{b}{2}$
 - $x^* = \pm 0.m_1 m_2 \dots (m_t + 1) \cdot b^z$ si $m_{t+1} \geq \frac{b}{2}$
 - Al truncar x para una aritmética finita de t cifras significativas se obtiene:
 - $x^* = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t \cdot b^z$
- Error Absoluto:** $E_A(x, x^*) = |x - x^*|$
- Error Relativo:** $E_R(x, x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x|}$
- Relación entre punto flotante y un real:** $fl(x) = x(1 + \delta)$ donde δ puede ser cero, negativo o positivo. δ es el error relativo y se cumple que $|\delta| \leq 5 \times 10^{-t}$ donde t es la cantidad de dígitos significativos. El valor $eps = 5 \times 10^{-t}$ es la precisión de la máquina.
- Propagación de errores:** $fl(x \otimes y) = (x \otimes y)(1 + \varepsilon)$ para $\otimes = +, -, *, /$
 - Error suma: $\varepsilon_s = \frac{x}{x+y} \varepsilon_x + \frac{y}{x+y} \varepsilon_y$
 - Error resta: $\varepsilon_r = \frac{x}{x-y} \varepsilon_x - \frac{y}{x-y} \varepsilon_y$
 - Error multiplicación: $\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
 - Error división: $\varepsilon_d = \varepsilon_x - \varepsilon_y$
 - Error general: $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \varepsilon_y$
- Estabilidad:** si los llamados números de condicionamiento $\mu_x = \frac{x}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ y $\mu_y = \frac{y}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ se pueden acotar por constantes, entonces la secuencia de operaciones matemáticas es estable. En caso contrario, es inestable.

1.2 Problemas

- Considere una modificación de la codificación floating point inicial de 20 bits con los siguientes parámetros: 1 bit signo, 1 bit signo exponente, 7 bits exponente y 11 bits para la mantisa.
 - De acuerdo a esta codificación floating point determine el número real representado según: 01101010111110001111
 - De acuerdo a esta codificación floating point determine la codificación del número real: 56.715
 - De acuerdo a esta codificación floating point determine el número real máximo, mínimo y más cercano a cero
 - Obtenga la codificación actual floating point del siguiente número real: 0.975421
 - Obtener el número real representado en la codificación actual floating point:
00000000111111111100000...000000
- Realice un análisis de primer orden para determinar la propagación de errores generados por las siguientes operaciones matemáticas aplicadas a dos reales x e y :
 - $\phi(x, y) = e^{xy}$
 - $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
 - $\phi(x, y) = x^2 y^2$
 - $\phi(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$
- Sea una codificación binaria floating point tipo inicial, donde el número real máximo representable es $2^{63} - 2^{54}$.
 - Explique cuantos bits son necesarios para implementar esta codificación y como se distribuyen.
 - Sea $a = a_1 a_2 \dots a_n$ donde n es el número de bits de la codificación usada y sea

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2j \vee i = 1 + 4j, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
 Obtenga el real representado por a
 - Sea $f(x) = e^{x^2}$. Para una aritmética finita de 5 cifras significativas de redondeo, se sabe que $f(0.5) = 1.2840$.
 - Calcule el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)$ en torno a $x_0 = 0$.
 - Calcule $p_4(0.5)$ con la misma aritmética.
 - Represente $f(0.5)$ y $p_4(0.5)$ según la codificación de punto flotante anterior. Calcule el error relativo y según esto concluya si $p_4(0.5)$ es o no una buena aproximación de $f(0.5)$
- Sea la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ a la suma parcial n -ésima exacta, y por Z_n la suma parcial n -ésima calculada por el computador según el algoritmo $Z_k = Z_{k-1} \oplus (1 \odot (k \odot k))$. El error absoluto está dado por $E_{abs} = |S - Z_n|$
 - Utilizando la identidad $S - Z_n = S - Z_n + S_n - S_n$, indique como el error se puede dividir en un error de truncación y en un error de redondeo. Determine su comportamiento cuando $n \rightarrow \infty$
 - Se puede demostrar que $Z_n = S_n + E_n$ donde $E_n \leq cn$, c constante. También se puede demostrar que:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

A partir de estos propuestos, determine una función $g(n)$ que acote el error $E_{abs} = |S - Z_n|$.

- (c) Encuentre un valor de n óptimo que minimice la suma de las cotas encontradas anteriormente. Estime cuantos términos de la serie se deben sumar y cuantos dígitos decimales correctos tendrá el resultado calculado si $c = 4 \times 10^{-16}$.
- (d) Sea la función $\phi(x, y) = g(x) \times g(y)$. Haga un análisis de propagación de error de la función $\phi(x, y)$. Considere $c > 0$.
5. Determinar un algoritmo para obtener la codificación binaria de un número natural, otro para obtener la codificación diádica de un número entre $[0, 1]$.
6. Usando los dos algoritmos anteriores, explique en forma algorítmica como codificar un número real cualquiera. Aplique el algoritmo con $x = 236.892$ en codificación FL de 32 bits.
7. Un grupo de ingenieros que trabajan en la NASA recibieron en su receptor atómico el siguiente código binario: 0110101011110001111. Los ingenieros, quienes obtuvieron excelentes promedios en Cálculo Numérico, creen que se trata de algún mensaje de extraterrestres, los cuales desesperados por saber que dicen, proponen la siguiente codificación de punto flotante: una modificación de la codificación floating point inicial de 19 bits con los siguientes parámetros: 1 bit signo, 1 bit signo exponente, 7 bits exponente y 11 bits para la mantisa.
- (a) Decodifique el mensaje de los extraterrestes
- (b) Los ingenieros creen saber lo que dicen, por lo que deciden mandan un mensaje utilizando la codificación anterior. El mensaje es 56.715, que es la respuesta a la pregunta fundamental del Universo. Los ingenieros desean saber cual es la pregunta fundamental del Universo. Codifique el mensaje.
- (c) Luego de esperar un rato, y sin obtener respuesta alguna, uno de los ingenieros, el más superticioso de todos, cree que si manda algunos mensajes claves, los extraterrestes los tomarán en cuenta. Deciden mandar los mensajes más importantes de su codificación: el máximo, el mínimo y el más cercano a cero. Uno de los físicos del lugar no sabía cuales eran estos números. Digale porfavor al físico cuales son aquellos números.
- (d) Nuevamente sin respuesta, los ingenieros deciden ocupar la codificación actual floating point para mandar el siguiente mensaje: 0.97542, que corresponde al cociente entre el día solar y el día sideral. (Cualquier coincidencia con la realidad, es solo coincidencia). Codifique el mensaje para ser enviado.
- (e) A los 32 segundos de ser enviado el mensaje, se obtiene respuesta de los extraterrestes. El mensaje obtenido es el siguiente: 000000010001110101110001001100...00. Decodifique el mensaje
- (f) Al analizar el mensaje mandado por los extraterrestes, los ingenieros llegan a la conclusión que fue un mensaje de guerra. Suponiendo que el mensaje fue recibido por los extraterrestes, y enviado inmediatamente de vuelta, y sabiendo que la velocidad de las ondas electromagnéticas es de $c = 300000 \left[\frac{km}{seg} \right]$.

8. Representación Numerica

- (a) Considere una representación floating point tipo inicial, donde el número real más cercano a cero es 2^{-23} . Se sabe que la cantidad de bits de la mantisa es el doble que el número de bits usados en el exponente.
- i) Explique cuantos bits son necesarios para implementar esta codificación y como se distribuyen.
- ii) Sea $x = a_1 a_2 \dots a_n$ la representación floating point de un número real, donde n es el número de bits utilizados por la codificación y:

$$a_1 = 1, \quad a_k = (a_{k-1} + k) \bmod 2, \quad k = 2 \dots n$$

Determine el real representado por x .

- iii) Calcule el real máximo representable en esta codificación.

- (b) Considere la codificación floating point actual de 32 bits de la forma:

$$fl(x) = (-1)^s 2^z (1 + m)$$

donde s el bit de signo, $z \in [-126, 127]$ el exponente y m la mantisa de 23 bits.

Suponga que se redondea un número $x > 0$ para llegar a su codificación floating point.

- i. Demuestre que:

$$-2^{z-n} \leq x - fl(x) \leq 2^{z-n}$$

donde n es la cantidad de bits de la mantisa.

- ii. Demuestre que $x \geq 2^z$ y que por lo tanto:

$$\frac{|x - fl(x)|}{x} \leq 2^{-n}$$

9. Aproximación y Errores

- (a) Determine la propagación de errores de las siguientes operaciones matemáticas:

i. $\phi(x, y) = 1 + \sin(x^2 + y^2), \quad x, y \in [0, 1]$

ii. $\phi(x, y, z) = \sqrt{xyz}$

Cuáles de ellas son estables/inestables? Fundamente su respuesta.

- (b) Considere las siguientes aproximaciones numéricas de la derivada de una función a variable real $f(x)$ en un punto x_0 : (para $h \approx 0$)

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

- i. Haga un análisis de propagación de error de la primera fórmula con $\varepsilon_h = 0$.

Obs: Si aparece $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, aproxímelo por $f'(x)$.

- ii. Para una aritmética finita de 5 cifras significativas con redondeo, aproxime la derivada de $f(x) = x \ln x$ en el punto $x_0 = 10.125$, usando la segunda fórmula con $h = 0.001$. Compare este valor aproximado con el valor exacto de la derivada. Calcule el error absoluto y relativo.

10. Dado que $fl(x) = x(1 + \delta)$, analice el error entre un real x y su aproximación por redondeo y demuestre que $|\delta| \leq \frac{b}{2} \times b^{-t}$ donde t es la cantidad de dígitos significativos.

11. Un grupo de científicos empezaron desde ya a prepararse para combatir una invasión extraterrestre. Para esto, compraron un misil atómico nuclear radioactivo, pero su costo fue de 10^∞ , por lo cual el gobierno de los Estados Unidos solo pudo comprar uno. Como tienen una única oportunidad de destruir al enemigo, necesitan dispararlo con el menor error posible. Para esto construyen una máquina que, al ingresar la posición del enemigo en coordenadas x, y , esta dispara automáticamente el misil en esa coordenada. El equipo está discutiendo sobre el tipo de función que tenga esta máquina para disminuir el error:

- (a) El físico, por lo que sabe de matemáticas, siempre ha sabido que la exponencial siempre se porta bien, por lo que propone: $\phi(x, y) = e^{xy}$

- (b) Uno de los ingenieros, al ver el resultado anterior, propone: $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

- (c) Después de ver esto, el ingeniero con el mejor promedio de Cálculo Numérico de su generación, propone dos funciones que asegura que funcionaran de forma similar:

i. $\phi(x, y) = x^2 y^2$

ii. $\phi(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$

- (d) ¿Cuál de las dos funciones anteriores usaría usted? Explique

12. Sea $\phi(x, y) = \frac{(x+y)^2 - 2xy - y^2}{x^2}$. Usando una aritmética finita de 6 cifras significativas con redondeo, calcule $\phi(x, y)$ en $x = 0.000001$, $y = 1000$
13. Sea $S1$ el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 5 bits de mantisa y 9 bits de exponente. Sea $S2$ el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 6 bits de mantisa y 8 bits de exponente. Compare ambos sistemas considerando:
- (a) Número de bits de los sistemas
 - (b) Números más grandes representables por los sistemas
 - (c) Números más cercanos al cero representables por los sistemas
 - (d) Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas
 - (e) Números de representaciones redundantes del cero en los sistemas.

1.3 Respuestas

1. Codificación

(a) Hagamos una tabla para determinar el número:

Signo Mantisa	Signo Exponente	Exponente	Mantisa
0	1	1010101	11110001111

- Signo Mantisa: +
- Signo Exponente: -
- Exponente: $1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 85$
- Mantisa: $1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5} + 0 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1 \times 2^{-11} = 0.94482421875$
- Número: $+0.94482421875 \times 2^{-85} = 2.4423133625642525496 \times 10^{-26}$

(b) El número lo debemos pasar a notación científica

$$56.715 = 0.56715 \times 10^2$$

Luego observamos el exponente, y debemos buscar la potencia de 2 que más se parece, ie

$$10^2 \approx 2^k \Rightarrow k \approx \lfloor \log_2 10^2 \rfloor = \lfloor 6.6438561897747246957 \rfloor \Rightarrow k = 6$$

$$0.56715 \times 10^2 \times \frac{2^6}{2^6} = 0.56715 \times \frac{10^2}{2^6} \times 2^6 = 0.56715 \times 1.5625 \times 2^6 = 0.886171875 \times 2^6$$

- Signo Mantisa: +
- Signo Exponente: +
- Exponente: $6 = 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
- Mantisa:

Vamos restando las potencias negativas de dos, de la mayor a la menor, siempre y cuando el resultado sea positivo:

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
	1	1	1	0	0
0.886171875	0.386171875	0.136171875	0.011171875	0.011171875	0.011171875
2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
0	1	0	1	1	0
0.011171875	0.003359375	0.003359375	0.00140625	0.0004296875	0.0004296875

$\Rightarrow 11100010110$

- Signo Mantisa Signo Exponente Exponente Mantisa
0 0 0000110 11100010110

(c) Número real máximo, mínimo y más cercano a cero

- Real Máximo: $00111111111111111111 = \frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = 0.99951171875 \times 2^{127}$
- Real Mínimo: $10111111111111111111 = -\frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = -0.99951171875 \times 2^{127}$
- Real Más cercano a cero positivo: $0111111100000000001 = 2^{-11} \times 2^{-127} \Rightarrow 2^{-138} = 2.8698592549372253613 \times 10^{-42}$
- Real Más cercano a cero negativo: $1111111100000000001 = -2^{-11} \times 2^{-127} \Rightarrow -2^{-138} = -2.8698592549372253613 \times 10^{-42}$

(d) $0.975421 = 2^{z-c}(1+m)$

- Escogemos z de manera que $z - 1023 = -1 \Rightarrow z = 1022$
- Luego: $m = 2 \times 0.975421 - 1 = 0.950842$
- La codificación binaria de $z = 1022$ es: 0111111110
- La codificación binaria de $m = 0.950842$ es:
1111001101101010011000011001110110101001110010011001

(e) 00000000111111111100000...000000

- i. El número real es: $x = (-1)^s 2^{z-1023} (1+m)$
- ii. El signo es $s = 0$
- iii. El exponente es: $z = 00000001111 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$. Luego
 $z - c = 15 - 1023 = -1008$
- iv. La mantisa es:
 $m = 111111100...00 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7$
 $m = \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{127}{128} = 0.9921875$
- v. Finalmente: $x = (-1)^0 2^{-1008} (1 + 0.9921875)$

2. Análisis de primer orden

- (a) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \varepsilon_y = \frac{x}{e^{xy}} y e^{xy} \varepsilon_x + \frac{y}{e^{xy}} x e^{xy} \varepsilon_y = xy (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ inestable
- (b) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\ln(x^2+y^2)} \frac{2x}{x^2+y^2} \varepsilon_x + \frac{y}{\ln(x^2+y^2)} \frac{2y}{x^2+y^2} \varepsilon_y = 2 \frac{x^2 \varepsilon_x + y^2 \varepsilon_y}{(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)}$ inestable
- (c) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{x^2 y^2} 2xy^2 \varepsilon_x + \frac{y}{x^2 y^2} 2x^2 y \varepsilon_y = 2 (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ estable
- (d) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \frac{1}{2y\sqrt{\frac{x}{y}}} \varepsilon_x + \frac{y}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{y^2 \sqrt{\frac{x}{y}}} \right) \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$ estable

3. Codificación binaria floating point tipo inicial, donde el número real máximo representable es $2^{63} - 2^{54}$.

- (a) Como el número real máximo representable en una codificación binaria siempre es $\frac{2^m-1}{2^m} \times 2^{(2^e-1)}$, donde m es la cantidad de bits de la mantisa, y e la cantidad de bits del exponente, esto equivale a $2^{2^e-1} - 2^{(2^e-1)-m}$, queda un sistema:

$$2^{63} - 2^{54} = 2^{2^e-1} - 2^{(2^e-1)-m} \implies \begin{matrix} 2^e - 1 = 63 \\ (2^e - 1) - m = 54 \end{matrix} \implies \begin{matrix} e = 6 \\ m = 9 \end{matrix}$$

Sumando el bit para el signo de la mantisa y el bit del signo del exponente, la codificación necesita $2 + 6 + 9 = 17$ bits.

(b) Como son 17 bits, entonces

- i. Numero en codificación binaria: $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_{17} = 11011101110111011$
- ii. Número real:
 - A. Signo Mantisa: $-$
 - B. Signo Exponente: $-$
 - C. Exponente: $0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 29$
 - D. Mantisa:
$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{443}{512} = 0.865234375$$
 - E. Numero: $a = -\frac{443}{512} \times 2^{-29} = -443 \times 2^{-38} = -1.6116246115416288376 \times 10^{-9}$

(c) Polinomio de Taylor

- i. $p_4(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$
- ii. Se debe calcular con la aritmética finita de 5 cifras con redondeo, entonces
 $\frac{0.0625}{2} = 0.03125$, cumple la aritmética. Luego
 $p_4(0.5) = 1 + (0.5)^2 + \frac{1}{2}(0.5)^4 = 1 + 0.25 + \frac{0.0625}{2} = 1.25 + 0.03125 = 1.28125$,
reduciendo a 5 cifras con redondeo, queda $p_4(0.5) = 1.2813$

iii. En representación de punto flotante quedan:

A. $\boxed{f(0.5)}$ $1.2840 = 0.642 \times 2^1$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0.642	0.142		0.017			0.001375			

$f(0.5) = 00\ 000001\ 101001000$

B. $\boxed{p_4(0.5)}$ $1.2813 = 0.64065 \times 2^1$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0.64065	0.14065		0.01565			0.000025			

$p_4(0.5) = 00\ 000001\ 101001000$

C. $E_{rel} = \frac{|f(0.5) - p_4(0.5)|}{|f(0.5)|} = \frac{0.0027}{1.2840} = 2.102\ 803\ 738\ 317\ 757\ 009\ 3 \times 10^{-3}$

La representación de $f(0.5)$ y de $p_4(0.5)$ en esta decodificación es exactamente la misma, por lo que quiere decir que la aproximación, en términos del punto flotante, es muy buena.

4. $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

(a) $E_{abs} = |S - Z_n| = |S - Z_n + S_n - S_n| = |S - S_n + S_n - Z_n| \leq |S - S_n| + |S_n - Z_n|$

El primer término corresponde al error de truncación que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ ya que la suma parcial tiende a la serie. El segundo término corresponde al error de redondeo, que aumenta cuando $n \rightarrow \infty$, ya que al aumentar el número de operaciones, se cometen más errores de redondeo.

(b) $E_{abs} = |S - Z_n| \leq |S - S_n| + |S_n - Z_n| \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx + C \cdot n = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} + C \cdot n = \frac{1}{n} + C \cdot n = g(n)$

(c) $\min g(n) = \frac{1}{n} + C \cdot n \iff \frac{dg}{dn}(\bar{n}) = 0 \wedge \frac{d^2g}{dn^2}(\bar{n}) > 0$

$$\frac{dg}{dn} = -\frac{1}{n^2} + C = 0 \implies \bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{C}} \wedge \bar{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{C}}$$

$$\frac{d^2g}{dn^2} = 2\frac{1}{n^3} > 0 \implies \boxed{\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{C}}}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-16}}} = 5 \times 10^7$$

$$E_{abs} \leq \frac{1}{n} + C \cdot n = \sqrt{C} + \frac{C}{\sqrt{C}} = 2\sqrt{C} = 2\sqrt{4 \times 10^{-16}} = 4 \times 10^{-8}$$

$$E_{rel} \leq \frac{4 \times 10^{-8}}{\frac{\pi^2}{6}} \leq \frac{4 \times 10^{-8}}{\frac{3^2}{6}} = \frac{24}{9} \times 10^{-8} \leq \frac{10}{2} \times 10^{-8}$$

Lo que implica que tendrá 8 dígitos decimales correctos.

(d) $\phi(x, y) = g(x) \times g(y) = \left(\frac{1}{x} + cx\right) \left(\frac{1}{y} + cy\right) = \frac{1}{xy} + c^2xy + c\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{x}{\phi(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\phi(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varepsilon_y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-1}{x^2y} + c^2y + c\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)$$

$$\phi(x, y) = \frac{c^2x^2y^2 + c(x^2 + y^2) + 1}{xy}$$

$$\frac{x}{\phi(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{c^2x^2y^2 + c(x^2 - y^2) - 1}{c^2x^2y^2 + c(x^2 + y^2) + 1} = 1 - \frac{2}{c^2x^2y^2 + c(x^2 + y^2) + 1} - 2\frac{1}{c^2x^2 + c\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}}$$

entonces $\frac{2}{c^2x^2y^2 + c(x^2 + y^2) + 1}$ es acotada, ya que $c > 0$ lo que implica que $c^2x^2y^2 + c(x^2 + y^2) + 1 > 0 \forall x, y$.

Ahora si $\frac{1}{c^2x^2 + c\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}}$ no fuera acotada, entonces $\exists x, y$ tal que $c^2x^2 + c\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2} = 0$, pero

$c^2x^2 \geq 0$, $c\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right) \geq 0$ y $\frac{1}{y^2} \geq 0$, entonces la única opción sería que las tres fueran igual a cero, y eligiendo $x = 0$ para que se cumpla la primera igualdad, la segunda se convierte en c , que por enunciado es > 0 . Esto implica que $\frac{1}{c^2x^2 + c\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2}}$ es acotada, y la suma de expresiones acotadas es acotada, luego

se puede acotar $\frac{x}{\phi(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial x}$. De forma análoga se acota $\frac{y}{\phi(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Luego, es estable.

5. Algoritmos

(a) Binaria(int x)

```
for k=0 To n
  if (x es par){
    a[k]=0;
    x=x/2;
  } else{
    a[k]=1;
    x=(x-1)/2;
  }
end k
```

(b) Diádica(float x)

```
x=(int)x*(2^n);
for k=n To 1
  if (x es par){
    a[k]=0;
    x=x/2;
  } else{
    a[k]=1;
    x=(x-1)/2;
  }
end k
```

6. Codificación número real

(a) Algoritmo

- i. Determinar la notación científica con la mantisa normalizada, es decir, $m \in [0, 1]$
- ii. Cambiar base 10 a base 2 dividiendo por potencia de 2 más cercana a la potencia de 10. Esta es $\lceil \log_2(10^z) \rceil$
- iii. Recalcular la mantisa como $m^* = m * \frac{10^z}{2^{\lceil \log_2(10^z) \rceil}}$. Si $m^* < 0.5$, entonces le restamos uno al exponente y doblamos la mantisa, es decir,
 $\lceil \log_2(10^z) \rceil = \lceil \log_2(10^z) \rceil - 1$
 $m^* = 2 \times m^*$
- iv. Determinar codificación binaria para el exponente y codificación diádica para la mantisa.

(b) Aplicando el algoritmo a $x = 236.892$

- i. $x = 236.892 = x = 0.236892 \times 10^3$
- ii. $\lceil \log_2(10^3) \rceil = \lceil 9.9657842846620870436 \rceil = 10 \implies x = 0.236892 \times \frac{10^3}{2^{10}} \times 2^{10}$
- iii. $m^* = 0.236892 \times \frac{10^3}{2^{10}} = 0.23133984375 < 0.5$
 $\implies m^* = 2 \times 0.23133984375 = 0.4626796875 < 0.5$
 $\implies m^* = 2 \times 0.4626796875 = 0.925359375$
 $e = 8$

(c) Codificación binaria

- i. Exponente: $e = 8 \implies 0001000$
- ii. Mantisa: $m = 0.925359375$
 $\implies m * 2^{23} = 0.925359375 * 2^{23} = 7762477.056 \implies 7762477$

iii. Codificar la mantisa

$\frac{7762477}{2} = 3881238$	$\frac{3881238}{2} = 1940619$	$\frac{1940619-1}{2} = 970309$	$\frac{970309-1}{2} = 485154$
impar	par	impar	par
1	0	1	0

$\frac{485154}{2} = 242577$	$\frac{242577-1}{2} = 121288$	$\frac{121288}{2} = 60644$	$\frac{60644}{2} = 30322$	$\frac{30322}{2} = 15161$
impar	par	par	par	impar
1	0	0	0	1

$\frac{15161-1}{2} = 7580$	$\frac{7580}{2} = 3790$	$\frac{3790}{2} = 1895$	$\frac{1895-1}{2} = 947$	$\frac{947-1}{2} = 473$	$\frac{473-1}{2} = 236$
par	par	impar	impar	impar	par
0	0	1	1	1	0

$\frac{236}{2} = 118$	$\frac{118}{2} = 59$	$\frac{59-1}{2} = 29$	$\frac{29-1}{2} = 14$	$\frac{14}{2} = 7$	$\frac{7-1}{2} = 3$	$\frac{3-1}{2} = 1$
par	impar	impar	par	impar	impar	impar
0	1	1	0	1	1	1

iv. Codificación: 0 0 0001000 11101100111001000101101

v. Mantisa:

$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 0 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1 \times 2^{-11} + 0 \times 2^{-12} + 0 \times 2^{-13} + 1 \times 2^{-14} + 0 \times 2^{-15} + 0 \times 2^{-16} + 0 \times 2^{-17} + 1 \times 2^{-18} + 0 \times 2^{-19} + 1 \times 2^{-20} + 1 \times 2^{-21} + 0 \times 2^{-22} + 1 \times 2^{-23} = 0.92535936832427978516$$

vi. $fl(x) = 0.92535936832427978516 \times 2^8 = 236.89199829101562$

7. Floating point

(a) 01101010111110001111

Signo	Mantisa	Signo Exponente	Exponente	Mantisa
0		1	1010101	11110001111

ii. Signo Mantisa: +

iii. Signo Exponente: -

iv. Exponente: $1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 85$

v. Mantisa: $1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5} + 0 \times 2^{-6} + 0 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-10} + 1 \times 2^{-11} = 0.94482421875$

vi. Número: $+0.94482421875 \times 2^{-85} = 2.4423133625642525496 \times 10^{-26}$

(b) $56.715 = 0.56715 \times 10^2 = 0.56715 \times 10^2 \times \frac{2^6}{2^6} = 0.56715 \times \frac{10^2}{2^6} \times 2^6 = 0.56715 \times 1.5625 \times 2^6 = 0.886171875 \times 2^6$

i. Signo Mantisa: +

ii. Signo Exponente: +

iii. Exponente: $6 = 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

iv. Mantisa:

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
	1	1	1	0	0
0.886171875	0.386171875	0.136171875	0.011171875	0.011171875	0.011171875
2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
0	1	0	1	1	0
0.011171875	0.003359375	0.003359375	0.00140625	0.0004296875	0.0004296875

Signo	Mantisa	Signo Exponente	Exponente	Mantisa
0		0	0000110	11100010110

(c) Maximos y Minimos

- i. Real Máximo: $0\ 0\ 1111111\ 11111111111 = \frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = 0.999\ 511\ 718\ 75 \times 2^{127}$
- ii. Real Mínimo: $1\ 0\ 1111111\ 11111111111 = -\frac{2^{11}-1}{2^{11}} \times 2^{127} = -0.999\ 511\ 718\ 75 \times 2^{127}$
- iii. Real Más cercano a cero positivo: $0\ 1\ 1111111\ 00000000001 = 2^{-11} \times 2^{-127} = 2^{-138} = 2.869\ 859\ 254\ 937\ 225\ 361\ 3 \times 10^{-42}$
- iv. Real Más cercano a cero negativo: $1\ 1\ 1111111\ 00000000001 = -2^{-11} \times 2^{-127} = -2^{-138} = -2.869\ 859\ 254\ 937\ 225\ 361\ 3 \times 10^{-42}$

(d) $0.975421 = 2^{z-c}(1+m)$

- i. Escogemos z de manera que $z - 1023 = -1 \Rightarrow z = 1022$
- ii. Luego: $m = 2 \times 0.975421 - 1 = 0.950842$
- iii. La codificación binaria de $z = 1022$ es: 0111111110
- iv. La codificación diádica de $m = 0.950842$ es: $1111001101101010011000011001110110101001110010011001$

(e) Decodificar $0\ 0000001000\ 1110101110001001100...00$

- i. El número real es: $x = (-1)^s 2^{z-1023}(1+m)$
- ii. El signo es $s = 0$
- iii. El exponente es: $z = 00000001000 = 2^3 = 8$. Luego $z - c = 8 - 1023 = -1015$
- iv. La mantisa es: $m = 1110101110001001100...00 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{16} + \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = 0.920\ 066\ 833\ 496\ 093\ 75$
- v. Finalmente: $x = (-1)^0 2^{-1015}(1 + 0.92006)$

8. codificación binaria

(a) representación floating point tipo inicial

- i. Como el número real más cercano a cero representable en una codificación binaria siempre es $2^{-m} \times 2^{-(2^e-1)}$, donde m es la cantidad de bits de la mantisa, y e la cantidad de bits del exponente, esto equivale a $2^{-(2^e-1)-m}$, y como $m = 2e$ queda un sistema:

$$2^{-(2^e-1)-m} = 2^{-23} \Rightarrow \begin{matrix} 2^e - 1 + m = 23 \\ m = 2e \end{matrix} \Rightarrow 2^e + 2e = 24 \Rightarrow \begin{matrix} e = 4 \\ m = 2e = 8 \end{matrix}$$

Sumando el bit para el signo de la mantisa y el bit del signo del exponente, la codificación necesita $2 + 4 + 8 = 14$ bits.

- ii. Como son 14 bits, entonces

$$\begin{array}{ll} a_1 & 1 \\ a_2 & (1+2) \bmod 2 = 1 \\ a_3 & (1+3) \bmod 2 = 0 \\ a_4 & (0+4) \bmod 2 = 0 \\ a_5 & (0+5) \bmod 2 = 1 \\ a_6 & (1+6) \bmod 2 = 1 \\ a_7 & (1+7) \bmod 2 = 0 \\ a_8 & (0+8) \bmod 2 = 0 \\ a_9 & (0+9) \bmod 2 = 1 \\ a_{10} & (1+10) \bmod 2 = 1 \\ a_{11} & (1+11) \bmod 2 = 0 \\ a_{12} & (0+12) \bmod 2 = 0 \\ a_{13} & (0+13) \bmod 2 = 1 \\ a_{14} & (1+14) \bmod 2 = 1 \end{array}$$

Número real: $x = 1\ 1\ 0011\ 00110011$

- A. Signo Mantis: -
 B. Signo Exponente: -
 C. Exponente: $0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$
 D. Mantis: $0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5} + 0 \times 2^{-6} + 1 \times 2^{-7} + 1 \times 2^{-8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{32+16+2+1}{256} = \frac{51}{256}$
 E. Numero: $x = -\frac{51}{256} \times 2^{-3} = -\frac{51}{256} \times \frac{1}{8} = -\frac{51}{2048} = -0.02490234375$
 iii. El número real máximo representable en una codificación binario tipo inicial es de la forma $M = (1 - 2^{-m}) \times 2^{(2^e-1)}$. Como $m = 8$ y $e = 4$, entonces
 $M = (1 - 2^{-8}) \times 2^{(2^4-1)} = 2^{15} - 2^7 = 32640$
 (b) codificación floating point actual

- i. Dado un real $x > 0$, ese se pasa a base binaria, con una mantisa entre 1 y 2, es decir

$$x = 2^z(1 + m^*), \text{ con } m^* \in [0, 1).$$

Ahora, al aproximar queda de la forma $fl(x) = 2^z(1 + m)$

Entonces, se puede hacer una transformación de codificación tipo actual a tipo inicial tomando

$$x = 2^{z+1}\left(\frac{1 + m^*}{2}\right), \Rightarrow fl(x) = 2^{z+1}\left(\frac{1 + m}{2}\right)$$

en donde se cumple que la nueva mantisa es mayor que $\frac{1}{2}$ y menor que 1, y ahora tiene $n + 1$ cifras significativas. Se sabe que en la codificación tipo inicial se tiene que

$$E_{rel}(x, fl(x)) \leq \frac{b}{2} \times b^{-t}$$

donde b es la base y t es la cantidad de cifras significativas de la mantisa. Entones en nuestro caso

$$\begin{aligned} E_{rel}(x, fl(x)) &\leq 2^{-(n+1)} \Rightarrow \frac{|x - fl(x)|}{x} \leq 2^{-(n+1)} \Rightarrow |x - fl(x)| \leq x 2^{-(n+1)} \\ \Rightarrow |x - fl(x)| &\leq x 2^{-(n+1)} = 2^{z+1}\left(\frac{1+m^*}{2}\right) \times 2^{-(n+1)} \leq 2^{z+1-n-1} = 2^{z-n} \\ \Rightarrow -2^{z-n} &\leq x - fl(x) \leq 2^{z-n} \end{aligned}$$

- ii. Como $x = 2^z(1 + m^*)$, con $m^* \in [0, 1] \Rightarrow (1 + m^*) \geq 1 \Rightarrow x = 2^z(1 + m^*) \geq 2^z$
 $\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2^z}$

$$\text{Entonces, } E_{rel}(x, fl(x)) = \frac{|x - fl(x)|}{x} \leq \frac{2^{z-n}}{x} \leq \frac{2^{z-n}}{2^z} \leq 2^{-n}$$

9. Errores

- (a) Estabilidad: $\varepsilon_\phi = \frac{x}{\phi(x,y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\phi(x,y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varepsilon_y$

- i. $\phi(x, y) = 1 + \sin(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2) 2x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cos(x^2 + y^2) 2y$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{x}{\phi(x,y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\phi(x,y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varepsilon_y = \frac{\cos(x^2 + y^2) 2x^2}{1 + \sin(x^2 + y^2)} \varepsilon_x + \frac{\cos(x^2 + y^2) 2y^2}{1 + \sin(x^2 + y^2)} \varepsilon_y$$

Como $x, y \in [0, 1]$, entonces el errores se podría acotar por su mayor valor que tome en ese intervalo, siempre y cuando exista. La única forma en que se indetermina es en el caso que $1 + \sin(x^2 + y^2) = 0$, que solo podría suceder si $\sin(x^2 + y^2) = -1$, que sería cuando $x^2 + y^2 = \frac{3\pi}{2}$, pero como $x, y \in [0, 1]$, $\max(x^2 + y^2) = 2 < \frac{3\pi}{2}$, lo cual es estable.

- ii. $\phi(x, y, z) = \sqrt{xyz}$; $\varepsilon_\phi = \frac{x}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varepsilon_y + \frac{z}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \varepsilon_z$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{yz}{x}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xz}{y}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{z}}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{x}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varepsilon_y + \frac{z}{\phi(x,y,z)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \varepsilon_z = \frac{x}{\sqrt{xyz}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{yz}{x}} \varepsilon_x + \frac{y}{\sqrt{xyz}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xz}{y}} \varepsilon_y + \frac{z}{\sqrt{xyz}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{z}} \varepsilon_z$$

$$\Rightarrow \varepsilon_\phi = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \text{ estable}$$

(b) $\frac{df(x_0)}{dx} \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

i. $f'(x) = \phi(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\phi_0(x) = f(x)$

$\varepsilon_0 = x \frac{f'(x)}{f(x)} \varepsilon_x$

$\phi_1(x, h) = f(x+h)$

$\varepsilon_1 = x \frac{f'(x+h)}{f(x+h)} \varepsilon_x + h \frac{f'(x+h)}{f(x+h)} \varepsilon_h = x \frac{f'(x+h)}{f(x+h)} \varepsilon_x$

$\phi_2(f(x+h), f(x)) = f(x+h) - f(x)$

$\varepsilon_2 = \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)} \varepsilon_1 - \frac{f(x)}{f(x+h)-f(x)} \varepsilon_0 = \frac{f(x+h)}{f(x+h)-f(x)} x \frac{f'(x+h)}{f(x+h)} \varepsilon_x - \frac{f(x)}{f(x+h)-f(x)} x \frac{f'(x)}{f(x)} \varepsilon_x$

$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{f'(x+h)-f'(x)}{f(x+h)-f(x)} x \varepsilon_x$

$f'(x, h) = \frac{\phi_2}{2h}$

$\varepsilon_{f'} = \varepsilon_2 - \varepsilon_h = \varepsilon_2 = \frac{f'(x+h)-f'(x)}{f(x+h)-f(x)} x \varepsilon_x = \frac{\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} x \varepsilon_x = \frac{f''(x)}{f'(x)} x \varepsilon_x$

Obs: Si se toma $\phi(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, entonces

$\varepsilon_\phi = \frac{x}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \varepsilon_x = \frac{x}{f'(x)} f''(x) \varepsilon_x = \frac{f''(x)}{f'(x)} x \varepsilon_x$,

llegando al mismo resultado.

ii. $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 10.125$, $h = 0.001$

$\frac{df(x_0)}{dx} \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

A. $fl(x_0) = 10.125$

$fl(h) = 0.001$

$fl(x_0+h) = fl(10.126) = 10.126$

$fl(\ln(10.126)) = fl(2.3151063735477174296) = 2.3151$

$fl(10.126 \times 2.3151) = fl(23.4427026) = 23.443$

$fl(x_0-h) = fl(10.124) = 10.124$

$fl(\ln(10.124)) = fl(2.3149088426828776198) = 2.3149$

$fl(10.124 \times 2.3149) = fl(23.4360476) = 23.436$

$fl(23.443 - 23.436) = fl(0.007) = 0.007$

$fl(2 \times 0.001) = fl(0.002) = 0.002$

$fl(\frac{0.007}{0.002}) = fl(3.5) = 3.5$

B. $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(10.125) = \ln 10.125 + 1 = 3.3150076129926028373$

$\Rightarrow fl(f'(10.125)) = 3.315$

$E_{abs} = |3.315 - 3.5| = 0.185$

$E_{rel} = \frac{|3.315-3.5|}{|3.315|} = 0.05580693815987933635 < 5 \times 10^{-1} = \frac{b}{2} \times 10^{-t}$

\Rightarrow tiene $t=1$ cifra significativa

10. Sea $x = \pm 0.m_1m_2...m_tm_{t+1} \cdot b^z$. Luego $fl(x) = \begin{cases} a_i = \pm 0.m_1m_2...m_t \cdot b^z & \text{si } m_{t+1} < \frac{b}{2} \\ a_{i+1} = \pm 0.m_1m_2...(m_t+1) \cdot b^z & \text{si } m_{t+1} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$

$E_R(x, a_i) = \frac{|x-a_i|}{|x|} = 1 - \frac{a_i}{x}$

$E_R(x, a_{i+1}) = \frac{|x-a_{i+1}|}{|x|} = \frac{a_{i+1}}{x} - 1$

$E_R(x, a_i) = E_R(x, a_{i+1}) \Rightarrow x = \frac{a_i+a_{i+1}}{2} = \pm 0.m_1m_2...m_t \cdot b^z + \frac{b^{-t}}{2} \cdot b^z = \pm 0.m_1m_2...m_t(\frac{b}{2})_{t+1} \cdot b^z$

$E_R(x, fl(x)) = \frac{|x-x(1+\delta)|}{|x|} = |\delta| \leq \frac{\frac{b}{2} \times b^{-(t+1)} \cdot b^z}{0.m_1m_2...m_t(\frac{b}{2})_{t+1} \cdot b^z} \leq \frac{\frac{b}{2} \times b^{-(t+1)}}{b^{-1}} = \frac{b}{2} \times b^{-t}$

11. Propagación de errores

(a) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{y}{\Phi(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \varepsilon_y = \frac{x}{e^{xy}} y e^{xy} \varepsilon_x + \frac{y}{e^{xy}} x e^{xy} \varepsilon_y = xy(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ inestable

(b) $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\ln(x^2+y^2)} \frac{2x}{x^2+y^2} \varepsilon_x + \frac{y}{\ln(x^2+y^2)} \frac{2y}{x^2+y^2} \varepsilon_y = 2 \frac{x^2 \varepsilon_x + y^2 \varepsilon_y}{(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)}$ inestable

(c) Funciones estables

i. $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{x^2 y^2} 2xy^2 \varepsilon_x + \frac{y}{x^2 y^2} 2x^2 y \varepsilon_y = 2(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ estable

ii. $\varepsilon_\Phi = \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \frac{1}{2y\sqrt{\frac{x}{y}}} \varepsilon_x + \frac{y}{\sqrt{\frac{x}{y}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{y^2 \sqrt{\frac{x}{y}}} \right) \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$ estable

- (d) Si se puede asegurar que x, y tengan el mismo signo se puede ocupar la segunda, siempre y cuando la coordenada y no sea muy cercana a cero. En cambio, la primera fórmula siempre andará bien, por lo que la mejor elección sería $\phi(x, y) = x^2 y^2$

12. $\phi(x, y) = \frac{(x+y)^2 - y^2 - 2xy}{x^2}$. $x = 0.000001$, $y = 1000$

(a) $x + y = 1000.000001 \Rightarrow fl(x + y) = 1000$

(b) $(x + y)^2 = 1000000$

(c) $xy = 0.001 \Rightarrow fl(xy) = 0.001$

(d) $y^2 = 1000000$

(e) $x^2 = 0.000000000001$

(f) Primera forma

i. $((x + y)^2 - y^2) - 2xy = (1000000 - 1000000) - 0.002 = -0.002$

ii. $\frac{((x+y)^2 - y^2) - 2xy}{x^2} = \frac{-0.002}{0.000000000001} = -2000000000.0$

(g) Segunda forma

i. $((x + y)^2 - 2xy) - y^2 = (1000000 - 0.002) - 1000000 = 1000000 - 1000000 = 0$

ii. $\frac{((x+y)^2 - 2xy) - y^2}{x^2} = \frac{0}{0.000000000001} = 0$

13. Codificación

(a) Número de bits de los sistemas

- i. Para S_1 : 5 bits de mantisa
9 bits de exponente
1 bit de signo del exponente
1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $5 + 9 + 2 = 16$ bits

- ii. Para S_2 : 6 bits de mantisa
8 bits de exponente
1 bit de signo del exponente
1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $6 + 8 + 2 = 16$ bits

- iii. $\Rightarrow S_1$ y S_2 ocupan la misma cantidad de bits para codificar

(b) Números más grandes representables por los sistemas

i. Para S_1 :
 $x_{1\max} = (1 - 2^{-5}) \times 2^{2^9 - 1} = \frac{31}{32} \times 2^{511} = 6.494\,406\,966\,065\,945\,470\,106\,168\,358\,5 \times 10^{153}$

ii. Para S_2 :
 $x_{2\max} = (1 - 2^{-6}) \times 2^{2^8 - 1} = \frac{63}{64} \times 2^{255} = 5.699\,141\,892\,149\,156\,493\,503\,884\,418\,4 \times 10^{76}$

- iii. $\Rightarrow S_1$ tiene un mayor rango que S_2 , ya que el mayor numero representable en S_1 es mayor que el de S_2

(c) Números más cercanos al cero representables por los sistemas

- i. Para S_1 :
 $x_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$
- ii. Para S_2 :
 $x_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$
- iii. $\Rightarrow S_1$ puede representar números mucho más pequeños que S_2
- (d) Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas
- i. Para S_1 :
 $x = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \ m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$
 $x_{\text{consecutivo}} = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \ m_1 m_2 m_3 m_4 (m_5 + 1)$
 $\Delta = |x_{\text{consecutivo}} - x| = 0 \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \ 00001$
 $\Rightarrow \Delta = 2^{-5} \times 2^{\pm e}$, donde $e = \sum_{k=0}^8 e_k 2^k$
 Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$
 $\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$
- ii. Para S_2 :
 $x = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \ m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6$
 $x_{\text{consecutivo}} = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \ m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 (m_6 + 1)$
 $\Delta = |x_{\text{consecutivo}} - x| = 0 \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \ 000001$
 $\Rightarrow \Delta = 2^{-6} \times 2^{\pm e}$, donde $e = \sum_{k=0}^7 e_k 2^k$
 Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$
 $\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$
- iii. \Rightarrow La menor diferencia entre un número y su consecutivo de S_1 es menor que de S_2
- (e) Representaciones redundantes del cero en los sistemas
- El número que tiene redundancia en cualquier sistema tipo inicial es el 0, ya que si $m = 0$, entonces para cualquier valor de s, se y e el número codificado es el cero.
- i. Para S_1 :
 $0_1 = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 \ 00000 \ \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \in \{0, 1\}$
 \Rightarrow hay $2^{11} = 2048$ representaciones redundantes en el sistema
- ii. Para S_2 :
 $0_2 = s \text{ se } e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 \ 000000 \ \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \in \{0, 1\}$
 \Rightarrow hay $2^{10} = 1024$ representaciones redundantes en el sistema
- iii. $\Rightarrow S_1$ tiene una mayor cantidad de representaciones redundantes que S_2

2 Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1 Resumen de Materia

1. **Sist. de Ecs. Lineales:** $A\vec{x} = \vec{b}$ donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es incógnita
2. **Proposición:** Dado un SEL cuadrado con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) A es invertible
 - (b) $\det(A) \neq 0$
 - (c) $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única
3. **Norma:** La norma de $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es $\|C\| = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$
4. **Error al perturbar un SEL:**
 - (a) Perturbar A: $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
 - (b) Perturbar b: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
5. **Número de condicionamiento:** dada la matriz A , $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ y se cumple que $\text{cond}(A) \geq 1$
6. **Ops:** Es el número de operaciones aritméticas de un algoritmo, y sirve para medir la eficiencia del algoritmo.
7. **Método de Gauss:** descomposición LU, donde L es matriz triangular inferior invertible y U es matriz triangular superior

(a) Se forma la matriz aumentada: $AA^{(1)} = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 & \vdots & a_{1(n+1)}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \ddots & \vdots & \vdots & a_{2(n+1)}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 & \vdots & a_{n(n+1)}^1 \end{bmatrix}$

(b) Se multiplica por $E^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}^1}{a_{11}^1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ y se forma $AA^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 & \vdots & a_{1(n+1)}^2 \\ 0 & a_{22}^2 & \ddots & \vdots & \vdots & a_{2(n+1)}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^2 & \dots & a_{nn}^2 & \vdots & a_{n(n+1)}^2 \end{bmatrix}$

(c) Se multiplica por $E^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^2}{a_{22}^2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{a_{n2}^2}{a_{22}^2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ y se forma $AA^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1n}^3 & \vdots & a_{1(n+1)}^3 \\ 0 & a_{22}^3 & a_{23}^3 & \vdots & \vdots & \vdots & a_{2(n+1)}^3 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^3 & \vdots & a_{n(n+1)}^3 \end{bmatrix}$

(d) Se repite de forma análoga $n - 1$ veces, se obtiene $U_A = AA^{(n)} = E^{(n-1)}E^{(n-2)}E^{(n-3)} \dots E^{(2)}E^{(1)}AA^{(1)}$

(e) Luego, $U_A = \begin{bmatrix} U & u_{n+1} \end{bmatrix}$ y $E^{(n-1)}E^{(n-2)}E^{(n-3)} \dots E^{(2)}E^{(1)} = L^{-1}$ y se tiene $A = LU$

- (f) Finalmente, para despejar \vec{x} , ya tenemos el sistema $U \vec{x} = L^{-1} \vec{b}$, y como U es triangular superior, se tiene un algoritmo de inducción en reversa:

$$\begin{aligned} \text{i. } x_n &= \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}} \\ \text{ii. } x_k &= \frac{1}{u_{kk}} \left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right) \quad k = (n-1), \dots, 1 \end{aligned}$$

- (g) También se puede resolver de la forma: $Ax = b \iff LUx = b \iff Ly = b$ donde $y = Ux \implies Ux = L^{-1}b \implies x = U^{-1}L^{-1}b$

8. Algoritmo de Gauss:

```

For j=1 To (n-1) // los n-1 pivotes
  For i=(j+1) To n // restar a todas las filas debajo del pivote
    For k=j To (n+1) // desde el pivote hasta el final de la fila, incluyendo al b=a[* ,n+1]
      a[i,k]=a[i,k]-(a[i,j]/a[j,j])*a[j,k]
    End For k
  End For i
End For j
x[n]=a[n,n+1]/a[n,n] // el elemento inicial
For k=(n-1) To 1 // la induccion en reversa
  For j=(k+1) To n
    a[k,n+1]=a[k,n+1]-a[k,j]*x[j]
  End For j
  x[k]=a[k,n+1]/a[k,k]
End For k

```

9. **Estrategias de pivoteo:** En cada etapa de los dos métodos anteriores se supone el elemento pivote $a_{kk}^k \neq 0$. Ahora, si $a_{kk}^k = 0$, entonces esto puede ser solucionado cambiando la fila correspondiente. Puede ocurrir también que el elemento pivote sea no nulo, pero cercano a cero, de tal manera que usando este elemento como pivote se introduzcan errores que se propaguen a través de los cálculos. Para salvar este inconveniente introducimos el pivoteo parcial y completo.

- (a) Pivoteo parcial: se permuta la ecuación k con la ecuación m de mayor pivote en módulo, $|a_{mk}^k| \geq |a_{jk}^k| \forall j = k+1, \dots, n$
- (b) Pivoteo completo: el elemento pivote es buscado entre las filas y las columnas superiores a k , y por lo tanto deben cambiarse la fila m y la columna l a la posición k correspondiente. Notemos que cuando cambiamos una columna, cambia el orden de las incógnitas, luego al terminar el proceso, debe tenerse en cuenta este cambio: $|a_{ml}^k| \geq |a_{ij}^k| \forall i, j = k+1, \dots, n$

10. **Matriz de permutación:** Sea $P(i, j), i \neq j$ la matriz identidad permutando su fila (o columna) i por la

$$\text{fila (o columna) } j., \text{ es decir } P(i, j) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_j \\ \vdots \\ \vec{e}_i \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fila } 1 \\ \vdots \\ \text{fila } i \\ \vdots \\ \text{fila } j \\ \vdots \\ \text{fila } n \end{matrix}, \text{ en donde } \vec{e}_k = [0_1 \quad \dots \quad 0_{k-1} \quad 1_k \quad 0_{k+1} \quad \dots \quad 0_n].$$

Entonces, para toda matriz $A_{n \times n}$ se cumple que $P(i, j) \cdot A$ es la matriz A permutando la fila i por la fila j , y $A \cdot P(i, j)$ es la matriz A permutando la columna i por la columna j .

11. **Método de Gauss-Jordan:** consiste en aplicar 2 veces la primera parte del método de Gauss, es decir: triangularizar superior e inferiormente la matriz A: $A \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow U \vec{x} = L^{-1} \vec{b} \Rightarrow D \vec{x} = \vec{b}$ donde D es una matriz diagonal y \vec{b} es la columna resultante de la matriz aumentada.

12. **Algoritmo de Gauss-Jordan:**

```

For j=1 To (n-1) // los n-1 pivotes
  For i=(j+1) To n // restar a todas las filas debajo del pivote
    For k=j To (n+1) // desde el pivote hasta el final de la fila, incluyendo al b=a[* ,n+1]
      a[i,k]=a[i,k]-(a[i,j]/a[j,j])*a[j,k]
    End For k
  End For i
End For j
For j=(n-1) To 1 // los n-1 pivotes de forma inversa
  For i=(j+1) To 1 // restar a todas las filas arriba del pivote
    For k=(n+1) To j // desde el final de la fila, incluyendo al b=a[* ,n+1], hasta el pivote
      a[i,k]=a[i,k]-(a[i,j]/a[j,j])*a[j,k]
    End For k
  End For i
End For j
For k=n To 1 // solo queda la diagonal
  x[k]=a[k,n+1]/a[k,k]
End For k

```

13. **Matriz Inversa:**

- (a) Se aplica el método de Gauss – Jordan al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad
- (b) Se aplica el método de Gauss al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad

14. **Determinante:**

- (a) Fórmula recursiva de Laplace: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \forall i, A_{ij} : \text{Matriz cofactor } ij \text{ de } A$, se obtiene eliminando fila i y columna j
- (b) Si todos los coeficientes de una fila o columna de A son ceros $\Rightarrow \det(A) = 0$
- (c) Si dos o más filas o columnas de A son linealmente dependientes $\Rightarrow \det(A) = 0$
- (d) Si se reemplaza la fila i por la fila j donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow \det(A') = -\det(A)$
- (e) Si se reemplaza la fila i (Fi) por ($Fi + \lambda Fj$) donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow \det(A') = \det(A)$
- (f) Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- (g) $\det(A^t) = \det(A)$
- (h) Si A es invertible: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

- (i) Si A es una matriz triangular inferior, superior o diagonal: $\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$

15. **Método de Gauss para la determinante:** $\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^n u_{kk}$

2.2 Problemas

1. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine la descomposición $A = LU$ a través del método de Gauss.
 - (b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ utilizando la factorización $A = LU$.
 - (c) Calcule el $\det(A)$. Si $\det(A) \neq 0$ calcule A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan.
 - (d) Calcule $\text{cond}(A)$. ¿La matriz A está bien o mal condicionada? Qué efecto tiene el condicionamiento sobre la resolución de otro SEL similar al definido en este problema.
2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, usando las estrategias de pivoteo completo y parcial, usando una aritmética finita de 4 cifras significativas con redondeo. Calcule el error relativo. Calcule $\text{cond}(A)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.125 \\ -0.375 \\ 1.375 \end{bmatrix}$$

3. Programe un algoritmo para obtener la descomposición LU.
4. Programe un algoritmo que calcule la determinante usando el método de Gauss
5. Cuente el número de operaciones del algoritmo anterior y el de Laplace para calcular la determinante, y compare.
6. Encuentre la determinante de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

mediante la fórmula recursiva de Laplace y la factorización LU.

7. Considere el SEL:

$$\begin{aligned} \epsilon x + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

donde $\epsilon \approx 0$ en comparación con los reales b, c, d, e, f .

- (a) Resuelva el SEL (*) mediante el método de Gauss exacto. Determine primero y bajo el supuesto $\epsilon \approx 0$ y luego el valor de x .
- (b) Suponga ahora que:

$$\begin{aligned} f &= d + e \\ c &= \epsilon + b \end{aligned}$$

Resuelva el sistema pivoteando en forma parcial mediante el método de Gauss exacto.

- (c) Por qué las soluciones del SEL son tan diferentes? Explique en detalle.
- (d) Repita los cálculos de la parte ii) asignando valores a los parámetros ϵ, b, c, d, e, f . Resuelva ahora su SEL sin pivotar y con aritmética finita de 3 cifras significativas con redondeo. Qué observa? Explique los resultados que obtuvo en detalle.

8. Cuente el número de operaciones de Gauss y Gauss-Jordan

9. Sea la matriz de Hilbert definida como $H_n = [\frac{1}{i+j+1}]_{i,j=0,1,\dots,n-1}$.

(a) Resuelva el sistema $H_3 \vec{x} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$

(b) Resuelva el sistema anterior, pero cambiando la primera componente del lado derecho por 1.01

(c) Calcule $Cond(H_3)$

2.3 Respuestas

1. SEL

(a) Descomposición $A = LU$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -1 \quad m_{31} = 1 \quad m_{41} = -1; \quad m_{32} = -2 \quad m_{42} = 2; \quad m_{43} = \frac{4}{7}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$Ly = b \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}} \iff x_4 = 1$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right) \quad k = (n-1), \dots, 1$$

$$\text{i. } k = 3 \iff x_3 = \frac{1}{u_{33}} (y_3 - [u_{34}x_4]) = \frac{1}{7} (2 - [2 \times 1]) = 0$$

$$\text{ii. } k = 2 \iff x_2 = \frac{1}{u_{22}} (y_2 - [u_{23}x_3 + u_{24}x_4]) = \frac{1}{1} (0 - [(-2) \times 0 + 1 \times 1]) = -1$$

$$\text{iii. } k = 1 \iff x_1 = \frac{1}{u_{11}} (y_1 - [u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4]) = \frac{1}{1} (1 - [(-1) \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1]) = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \det(A) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times u_{44} = 1 \times 1 \times 7 \times \frac{8}{7} = 8$$

$$\begin{aligned} i. \quad [A : I]^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [A : I]^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [A : I]^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [A : I]^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [A : I]^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \\ A^{-1} = I^4 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{13}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(d) \text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \max\{4, 6, 7, 4\} \cdot \max\left\{\frac{6}{4}, \frac{34}{8}, \frac{6}{4}, \frac{26}{8}\right\} = 7 \cdot \frac{34}{8} = \frac{119}{4} = 29.75 \gg 1$$

En consecuencia, la matriz A está mal condicionada. Como la matriz está mal condicionada, al perturbar levemente sus coeficientes, se genera una gran alteración de los resultados al resolver sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea esta.

2. Gauss - Tecnicas de pivoteo

(a) Pivoteo Completo

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 1 & 3 & \mathbf{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{6} \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 3 & 1 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 3 & 1 \\ 0.1 & 2 & -0.1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1.95 & -0.1167 \\ 0 & 0.5 & -0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.667 \times 10^{-2} \\ 0.8333 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 6.0 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1.95} & -0.1167 \\ 0 & 0.5 & -0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.667 \times 10^{-2} \\ 0.8333 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 6.0 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1.95} & -0.1167 \\ 0 & 0 & -0.1368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.01667 \\ 0.8376 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & x = \frac{0.8376}{-0.1368} = -6.123 \\
 \Rightarrow & y = \frac{-0.01667 - 0.1167 \times 6.123}{1.95} = -0.375 \\
 \Rightarrow & z = \frac{1 + 3 \times 0.375 + 6.123}{6} = 1.375 \\
 E_{rel} &= \frac{0.002}{6.123} = 3.266 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

(b) Pivoteo parcial

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ \mathbf{1} & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 6 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \mathbf{2.3} & 0.7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.1 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \mathbf{2.3} & 0.7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.1 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 & 6.0 \\ 0.0 & 2.3 & 0.7 \\ 0.0 & 0 & 0.6957 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.1 \\ 0.9565 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow z &= \frac{0.9565}{0.6957} = 1.375 \\ \Rightarrow y &= \frac{0.1 - 1.375 \times 0.7}{2.3} = -0.375 \\ \Rightarrow x &= 1 + 3 \times 0.375 - 6 \times 1.375 = -6.125 \\ E_{rel} &= 0\end{aligned}$$

(c) $\text{cond}(A)$

$$\begin{aligned}\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \right\| &= \max\{2, 2.2, 10\} = 10 \\ \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.1 & 2 & 0.1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \right\| &= \left\| \begin{bmatrix} -7.3125 & 1.875 & 1.1875 \\ -0.4375 & 0.625 & 0.0625 \\ 1.4375 & -0.625 & -0.0625 \end{bmatrix} \right\| = 10.375 \\ \text{cond}(A) &= 10 \times 10.375 = 103.75 \gg 1\end{aligned}$$

3. Algoritmo LU

```
For j=1 To (n-1) // los n-1 pivotes
  For i=(j+1) To n // restar a todas las filas debajo del pivote
    For k=j To n // desde el pivote hasta el final de la fila
      a[i,k]=a[i,k]-(a[i,j]/a[j,j])*a[j,k]
    End For k
    L[i,j]=a[i,j]/a[j,j] // copiar a la matriz L
  End For i
  For m=j To n // copiar a la matriz U
    U[j,m]=a[j,m]
  End For m
End For j
```

4. Determinante

```
det=a[1,1]
For j=1 To (n-1) // los n-1 pivotes
  For i=(j+1) To n // restar a todas las filas debajo del pivote
    For k=j To n // desde el pivote hasta el final de la fila
      a[i,k]=a[i,k]-(a[i,j]/a[j,j])*a[j,k]
    End For k
  End For i
  det=det*a[j+1,j+1]
End For j
```

5. Operaciones

$$\begin{aligned}\text{(a) Gauss: } \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j}^n 3 &= 3 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (n-j+1) = 3 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(n-j+1) \\ &= 3 \sum_{j=1}^{n-1} n - j(1+2n) + j^2 + n^2 = 3 \left[(n-1)n - (1+2n)\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + (n-1)n^2 \right] = n^3 - n \\ &\Rightarrow O(n^3)\end{aligned}$$

- (b) Laplace: $D(n) = n(2 + D(n-1))$ con la condición inicial $D(1) = 0$

$$D(n) = 2n + nD(n-1) \quad | \quad \times \frac{1}{n^n}$$

$$\frac{D(n)}{n^n} = \frac{2}{n^{n-1}} + \frac{D(n-1)}{n^{n-1}} \quad \Big| \quad \text{se define } Y(n) = \frac{D(n)}{n^n}$$

$$Y(n) = \frac{2}{n^{n-1}} + Y(n-1) \implies Y(n) = Y(1) + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^{k-1}}$$

$$\frac{D(n)}{n^n} = \frac{D(1)}{1^1} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^{k-1}} = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^{k-1}} \implies D(n) = n^n \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^{k-1}}$$

$$\implies O(n^n)$$

- (c) Claramente la diferencia es extremadamente mucha, ya que el algoritmo de Gauss es de orden $O(n^3)$, mientras que el algoritmo de Laplace es de orden $O(n^n)$. Claro que para el caso $n = 2$, el algoritmo de Laplace es más rápido que el algoritmo de Gauss, pero para $n \geq 3$, es más eficiente el algoritmo de Gauss.

6. Calculemos el determinante primero por la formula de Laplace:

$$\det(B) = 1 \cdot \det(B^{11}) - 1 \cdot \det(B^{12}) + 1 \cdot \det(B^{13}) = 1(2 \cdot 6 - 3 \cdot 3) - 1(1 \cdot 6 - 3 \cdot 1) + 1(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 3 - 3 + 1 = 1$$

Encontremos ahora la descomposicion LU:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces, } \det(B) = \det(U) = \prod_{i=1}^3 u_{ii} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

7. SEL y errores

$$(a) \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & b & c \\ d & e & f \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & b & c \\ 0 & e - \frac{d}{\varepsilon}b & f - \frac{d}{\varepsilon}c \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{f - \frac{d}{\varepsilon}c}{e - \frac{d}{\varepsilon}b} = \frac{\varepsilon f - dc}{e\varepsilon - db} \quad \text{como } \varepsilon \approx 0 \Rightarrow y = \frac{c}{b}$$

Luego, de la primera ecuación:

$$\Rightarrow \varepsilon x + by = c \Rightarrow x = \frac{c - by}{\varepsilon} \approx \frac{c - b\frac{c}{b}}{\varepsilon} = 0$$

Por lo tanto, la solución de SEL es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$$

Notar que esta solución es válida $\forall b, c, d, e, f, \varepsilon$ que cumplan que $\varepsilon \approx 0$ en comparación con los otros reales.

(b) En particular, escojamos:

$$\begin{aligned} f &= d + e \\ c &= \varepsilon + b \end{aligned}$$

y resolvamos el SEL con pivoteo parcial, i.e. permutando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d & e & | & f \\ \varepsilon & b & | & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d & e & | & d + e \\ \varepsilon & b & | & \varepsilon + b \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} d & e & | & d + e \\ 0 & b - \frac{\varepsilon}{d}e & | & (\varepsilon + b) - \frac{\varepsilon}{d}(d + e) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d & e & | & d + e \\ 0 & b - \frac{\varepsilon}{d}e & | & b - \frac{\varepsilon}{d}e \end{bmatrix} \\ \Rightarrow y = \frac{b - \frac{\varepsilon}{d}e}{b - \frac{\varepsilon}{d}e} &= 1 \end{aligned}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$\Rightarrow dx + ey = d + e \Rightarrow x = \frac{d+e-\varepsilon}{d} = 1$$

Por lo tanto, la solución del SEL (+) es :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Al calcular la solución del SEL (*) tomamos como pivote un número muy pequeño, lo que causa mucha disparidad en las magnitudes c y $f - \frac{d}{\varepsilon}c$ introduciendo un error de redondeo que se propaga al despejar y . Este error no se considera en el SEL (+) ya que tomamos como pivote el mayor número de la columna.

(d) Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} 0.003x + 59.1y &= 59.103 \\ 5.29x + 6.1y &= 11.3 \end{aligned}$$

Para repetir los calculos realizados en la parte (ii) antes de empezar a pivotear debemos permutar las ecuaciones, obteniendo la siguiente matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 5.29 & 6.1 & | & 11.3 \\ 0.003 & 59.1 & | & 59.103 \end{bmatrix}$$

Nos damos cuenta que la solución del sistema es :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si permutamos las filas y comenzamos a pivotear como en la parte (a) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0.003 & 59.1 & | & 59.103 \\ 5.29 & 6.1 & | & 11.3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.003 & 59.1 & | & 59.103 \\ 0 & 6.1 - \frac{5.29}{0.003}59.1 & | & 11.3 - \frac{5.29}{0.003}59.103 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.003 & 59.1 & | & 59.103 \\ 0 & -104000 & | & -104000 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow y = \frac{-104000}{-104000} &= 1 \end{aligned}$$

Luego, de la primera ecuación:

$$\Rightarrow 0.003x + 59.1y = 59.103 \Rightarrow x = \frac{59.103 - 59.1}{0.003} = 0$$

Por lo tanto, la solución de SEL es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Numero de Operaciones

(a) Gauss

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j}^{n+1} (D, M, R) + (D) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^n (R, M) + (D) \right) \\
 &= (D, M, R) \sum_{j=1}^{n-1} ((n-j-1+1) + (n+1-j+1)) + (D) + \sum_{k=1}^{n-1} ((R, M) (n-k-1+1) + (D)) \\
 &= (D, M, R) 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j+1) + (D) + (R, M) \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) + (D)(n-1) \\
 &= (D, M, R) 2(n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)) + (D) + (R, M)(n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2}) + (D)(n-1) \\
 &= (D, M, R)(n(n-1) + 2(n-1)) + (D)n + (R, M)\frac{n(n-1)}{2} \\
 &D = n(n-1) + 2(n-1) + n = n^2 + 2n - 2 \\
 &M = n(n-1) + 2(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2 \\
 &R = n(n-1) + 2(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2
 \end{aligned}$$

(b) Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j}^{n+1} (D, M, R) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j}^{n+1} (D, M, R) + \sum_{k=1}^n (D) \\
 &= 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \sum_{k=j}^{n+1} (D, M, R) + (D)n \\
 &= (D, M, R) 2(n(n-1) + 2(n-1)) + (D)n \\
 &D = 2(n(n-1) + 2(n-1)) + n = 2n^2 + 3n - 4 \\
 &M = 2(n(n-1) + 2(n-1)) = 2n^2 + 2n - 4 \\
 &R = 2(n(n-1) + 2(n-1)) = 2n^2 + 2n - 4
 \end{aligned}$$

(c) Contando el número total de operaciones:

- i. Gauss: $D + M + R = n^2 + 2n - 2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2 = 4n^2 + 3n - 6$
- ii. Gauss-Jordan: $D + M + R = 2n^2 + 3n - 4 + 2n^2 + 2n - 4 + 2n^2 + 2n - 4 = 6n^2 + 7n - 12$

(d) Se ve claramente que el algoritmo de Gauss es más eficiente que el algoritmo de Gauss-Jordan, pero ambos algoritmos son de orden $O(n^2)$

9. Matriz de Hilbert

(a) Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{0+0+1} & \frac{1}{0+1+1} & \frac{1}{0+2+1} \\ \frac{1}{1+0+1} & \frac{1}{1+1+1} & \frac{1}{1+2+1} \\ \frac{1}{2+0+1} & \frac{1}{2+1+1} & \frac{1}{2+2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \vdots & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(b) El sistema queda de la forma

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \vdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \vdots & 0.495 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & 0.663333 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 12 \times 0.495 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \vdots & 0.663333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5.94 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \vdots & 0.168333 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \vdots & 1.01 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5.94 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 180 \times 0.168\,333 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9.09 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24.36 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30.3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -9.09 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24.36 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30.3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3.09 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -24.36 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30.3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \vec{x} &= \begin{bmatrix} 3.09 \\ -24.36 \\ 30.3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Calculemos el número de condicionamiento

$$\begin{aligned} Cond(H_3) &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right| |36 + 192 + 180| = 748 \end{aligned}$$

3 Complementos de Sistemas de Ecuaciones

3.1 Resumen de Materia

1. **Matriz tridiagonal:** Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarias.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. **Método de Crout para matrices tridiagonales:** Una matriz tridiagonal puede ser factorizada $A = LU$ como:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Condición Inicial

- i. $l_{11} = a_{11}$
- ii. $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$

(b) Para $i = 2, \dots, n-1$

- i. $l_{i(i-1)} = a_{i(i-1)}$
- ii. $l_{ii} = a_{ii} - l_{i(i-1)}u_{(i-1)i}$
- iii. $u_{i(i+1)} = \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}$

(c) Para $i = n$

- i. $l_{n(n-1)} = a_{n(n-1)}$
- ii. $l_{nn} = a_{nn} - l_{n(n-1)}u_{(n-1)n}$

3. Algoritmo de Crout

```
L[1,1]=a[1,1]
U[1,2]=a[1,1]/ L[1,1]
For k=2 To (n-1)
    L[k,k-1]=a[k,k-1]
    L[k,k]=a[k,k]-L[k,k-1]*U[k-1,k]
    U[k,k+1]=a[k,k+1]/L[k,k]
End For k
L[n,n-1]=a[n,n-1]
L[n,n]=a[n,n]-L[n,n-1]*U[n-1,n]
```

4. Matriz Definida Positiva:

- (a) Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $\vec{x}^t A \vec{x} > 0 \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- (b) Teorema: Si A es definida positiva, entonces se cumple:
- $\det(A) \neq 0$
 - $a_{kk} > 0 \forall k = 1, \dots, n$
 - $\max_{1 \leq j, k \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_{kk}|$
 - $(a_{ij})^2 \leq a_{ii} a_{jj} \forall i \neq j$
- (c) Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $\det(A_{kk}) > 0 \forall k = 1, \dots, n$ donde
- $$A_{kk} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$
- (d) Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^t$ donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} > 0 \forall i = 1, \dots, n$.

5. Método de Cholesky:

- (a) $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- (b) Para $j = 2, \dots, n$ $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$
- (c) Para $i = 2, \dots, n-1$ y $j = (i+1), \dots, n$
- $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2}$
 - $l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}$
- (d) $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} (l_{nk})^2}$

6. Algoritmo de Cholesky:

```

L[1,1]=sqrt(a[1,1])
For j=2 To n
    L[j,1]=a[j,1]/L[1,1]
End For j
For k=2 To (n-1)
    sum=0
    For m=1 To (k-1)
        sum=sum+L[k,m]*L[k,m]
    End For m
    L[k,k]=sqrt(a[k,k]-sum)
    For i=k+1 To n
        sum=0
        For m=1 To (k-1)
            sum=sum+L[i,m]*L[k,m]
        End For m
        L[i,k]=(a[i,k]-sum)/L[k,k]
    End For i
End For k

```


7. Método Iterativo:

- La idea es empezar con una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ a la solución \vec{x} del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, y generar una sucesión de vectores $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a \vec{x} .
- La forma de los elementos de la sucesión es $\vec{x}^{(k+1)} = f(\vec{x}^{(k)})$
- Los métodos más utilizados son del tipo $f(\vec{x}^{(k)}) = B\vec{x}^{(k)} + \vec{h}$ donde $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

8. Construyendo un Método Iterativo:

- Sean M y $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que: M es invertible y $A = M - N$
- $Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$
- $B = M^{-1}N$ y $h = M^{-1}b$
- Se puede descomponer A como $A = \text{diag}(A) + \text{low}(A) + \text{up}(A)$ donde

- $\text{diag}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases}$ matriz diagonal
- $\text{low}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \ i > j \\ 0 & si \ i \leq j \end{cases}$ matriz triangular inferior
- $\text{up}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \ i < j \\ 0 & si \ i \geq j \end{cases}$ matriz triangular superior

9. Método de Jacobi:

- se define M y N
 - $M = \text{diag}(A)$
 - $N = -[\text{low}(A) + \text{up}(A)]$
 - $B = -\text{diag}(A)^{-1}[\text{low}(A) + \text{up}(A)]$
 - $h = \text{diag}(A)^{-1}b$
- El vector de la iteración k del método de Jacobi satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3, \dots$$

10. Método de Gauss - Seidel:

- se define M y N
 - $M = [\text{diag}(A) + \text{low}(A)]$
 - $N = -\text{up}(A)$
 - $B = -[\text{diag}(A) + \text{low}(A)]^{-1}[\text{up}(A)]$
 - $h = [\text{diag}(A) + \text{low}(A)]^{-1}b$
- El vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3, \dots$$

11. Análisis de Error de los Métodos Iterativos: Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y $Ax = b$:

$$\frac{\|x - x^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|}$$

12. Polinomio característico de A : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

13. Valores propios de A : Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces las n raíces de $p(\lambda)$ son los valores propios de A .

14. Vectores propios de A : Si λ es un valor propio de A , y $\vec{x} \neq \vec{0}$ cumple la propiedad que $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, entonces \vec{x} es un vector propio de A asociado al valor propio λ .

15. Radio espectral de A:

- (a) $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$ donde λ_i es un valor propio de A
- (b) Proposiciones:
- i. $\|A\|_2 = \rho(A^t A)^{\frac{1}{2}}$
 - ii. $\rho(A) \leq \|A\|$

16. Matriz convergente:

- (a) Una matriz A es convergente si: $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{ij} = 0 \forall i, j = 1, \dots, n$
- (b) Las siguientes proposiciones son equivalente:
- i. A es una matriz convergente
 - ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$
 - iii. $\rho(A) < 1$
 - iv. $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

17. Relación entre métodos iterativos y valores propios:

si x^k es la iteración k de $x^{k+1} = Bx^k + h$ y $Ax = b$ entonces

$$\text{Para } k \rightarrow \infty, \|x^k - x\| \approx \rho(B)^k \|x^0 - x\|$$

Obs: Si los métodos anteriores convergen, entonces se cumple que $0 \leq \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$

18. Método de la potencia:

Sea la matriz A con los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y los vectores propios $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(n)}$. Supongamos que $|\lambda_1| > |\lambda_j| \ j = 2, 3, \dots, n$. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces existen β_1, \dots, β_n tal que $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{v}^{(j)}$. Si multiplicamos por A, obtenemos $A\vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j A\vec{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \vec{v}^{(j)}$. Si repetimos k veces obtenemos $A^k \vec{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k \vec{v}^{(j)}$. Si factorizamos por λ_1 obtenemos $A^k \vec{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \vec{v}^{(j)}$. Como $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0 \forall j = 2, \dots, n$ lo que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \beta_1 \vec{v}^{(1)}$. El problema de esto es que si $|\lambda_1| < 1$ converge a cero, y si $|\lambda_1| > 1$ diverge. Para evitar esto, se utiliza un proceso de escalamiento.

19. Escalamiento en el método de la potencia:

- (a) Primero se selecciona \vec{x} como un vector unitario $\vec{x}^{(0)}$ en relación con $\|\cdot\|_\infty$, y una componente $x_{p_0}^{(0)}$ tal que $|x_{p_0}^{(0)}| = 1 = \|\vec{x}^{(0)}\|_\infty$, de modo que $\beta_1 \neq 0$.
- (b) Se define $\vec{y}^{(1)} = A\vec{x}^{(0)}$ y $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1 \lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \frac{\lambda_j}{\lambda_1} v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}} \right]$
- (c) Sea p_1 el menor entero tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|\vec{y}^{(1)}\|_\infty$. Se define $\vec{x}^{(1)} = \frac{\vec{y}^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}}$ y se tiene que $|x_{p_1}^{(1)}| = 1 = \|\vec{x}^{(1)}\|_\infty$
- (d) Se define $\vec{y}^{(2)} = A\vec{x}^{(1)}$ y $\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{[\beta_1 \lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}] / y_{p_1}^{(1)}}{[\beta_1 \lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j v_{p_1}^{(j)}] / y_{p_1}^{(1)}} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) v_{p_1}^{(j)}} \right]$
- (e) Sea p_2 el menor entero tal que $|y_{p_2}^{(2)}| = \|\vec{y}^{(2)}\|_\infty$
- (f) Se define $\vec{x}^{(2)} = \frac{\vec{y}^{(2)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{A\vec{x}^{(1)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{A^2 \vec{x}^{(0)}}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}}$ y se tiene que $|x_{p_2}^{(2)}| = 2 = \|\vec{x}^{(2)}\|_\infty$

(g) De modo semejante se definen las sucesiones $\{\vec{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{\vec{y}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ mediante:

i. $\vec{y}^{(m)} = A\vec{x}^{(m-1)}$

ii. $\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^m v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{m-1} v_{p_{m-1}}^{(j)}} \right]$

iii. p_m el menor entero tal que $|y_{p_m}^{(m)}| = \|\vec{y}^{(m)}\|_{\infty}$

iv. $\vec{x}^{(m)} = \frac{\vec{y}^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}} = \frac{A^m \vec{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^m y_{p_k}^{(k)}}$

(h) Se tiene que $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}^{(m)} = \vec{v}^{(1)}$ donde $\|\vec{v}^{(1)}\| = 1$.

3.2 Problemas

1. Dada la matriz tridiagonal A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine su descomposición LU
- (b) Para $b = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^t$ resuelva el SEL (A, b) mediante el Método de Crout.
- (c) Es la matriz A definida positiva ? Si lo es determine su descomposición de Cholesky.

2. Sea la matriz de Pascal:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine si es definida positiva
- (b) Si lo es, determine su descomposición de Cholesky.

3. Sea el SEL definido por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Resuelva el SEL mediante el método de iterativo de Jacobi (5 iteraciones)
- (b) Resuelva el SEL mediante el método iterativo de Gauss-Seidel (5 iteraciones)
- (c) Compare las soluciones entregadas por los método iterativos con respecto a la solución entregada por el

método de Gauss: $x = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.272727272727 \\ 0.181818181818 \\ 0.181818181818 \\ 0.272727272727 \end{bmatrix}$

Obs: ocupe $\bar{x}^0 = \vec{0}$

4. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Métodos Directos:
 - i) Determine su descomposición $A = LU$ y resuelva el SEL utilizando esta factorización.
 - iii) Es A definida positiva ? Si lo es, determine su factorización de Cholesky y resuelva el SEL utilizando esta factorización.
- (b) Métodos Iterativos:
 - i) Resuelva el SEL mediante el método Gauss-Seidel.
 - ii) Para el método SOR aplicado a matrices definidas positivas y tridiagonales, el valor óptimo de ω está dado por:

$$\bar{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_G)}}$$

Donde $\rho(T_G)$ es el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel T_G .
Calcule $\bar{\omega}$ y resuelva el SEL mediante el método SOR para $\bar{\omega}$.

5. Encuentre la factorización de Crout de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Analice la complejidad del algoritmo de Crout.
7. Analice la complejidad del algoritmo de Cholesky.
8. Sea la matriz A y el vector $\vec{x}^{(0)}$ dados, obtenga el mayor valor propio de A a través del método de la potencia.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obs: 6, 3, 2 son valores propios de A .

9. Coincidere un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ de $n \times n$, con A definida positiva y tridiagonal.
- (a) Calcule el número de operaciones al aplicar al sistema el método de Gauss-Seidel, si se hicieron k_{GS} iteraciones.
Hint: Para esto, calcule de forma separa el número de operaciones para calcular $[diag(A) + low(A)]^{-1}$, B , \vec{h} , y de cada iteración. Se cumple que $[diag(A) + low(A)]^{-1}$ es una matriz triangular inferior, $up(A)$ tiene $n - 1$ elementos distintos de cero y B tiene la forma de una matriz triangular inferior, pero quitando la última columna y agregando como columna 0 una columna compuesta por puros ceros.
 - (b) Calcule el número de operaciones al aplicar el método de la potencia para calcular $\rho(T_G)$ el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel T_G con A definida positiva y tridiagonal, suponiendo que fueron necesarias k_p iteraciones.
 - (c) Encuentre el número máximo de iteraciones k_{SOR} del método SOR aplicado al sistema, tomando $\bar{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_G)}}$ y calculando $\rho(T_G)$ con el método de la potencia usando k_p iteraciones, tal que el método SOR sea más eficiente que el método de Gauss-Seidel con k_{GS} iteraciones.

3.3 Respuestas

1. Matriz tridiagonal

(a) Descomposición LU

i. $i = 1$

A. $l_{11} = a_{11} = 1$

B. $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{2}$

ii. $i = 2$

A. $l_{21} = a_{21} = \frac{1}{2}$

B. $l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

C. $u_{23} = \frac{a_{23}}{l_{22}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

iii. $i = 3$

A. $l_{32} = a_{32} = \frac{1}{2}$

B. $l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

C. $u_{34} = \frac{a_{34}}{l_{33}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

iv. $i = 4$

A. $l_{43} = a_{43} = \frac{1}{2}$

B. $l_{44} = a_{44} - l_{43}u_{34} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

v. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Método de Crout

i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

A. $y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = 1$

B. $y_2 = \frac{b_2 - y_1 l_{21}}{l_{22}} = -\frac{2}{3}$

C. $y_3 = \frac{b_3 - y_2 l_{32}}{l_{33}} = \frac{1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 2$

D. $y_4 = \frac{b_4 - y_3 l_{43}}{l_{44}} = \frac{-2 \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = -\frac{8}{5}$

ii. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 2 \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$

A. $x_4 = y_4 = -\frac{8}{5}$

B. $x_3 = y_3 - x_4 u_{34} = 2 - \left(-\frac{8}{5}\right) \frac{3}{4} = \frac{16}{5}$

C. $x_2 = y_2 - x_3 u_{23} = -\frac{2}{3} - \frac{16}{5} \times \frac{2}{3} = -\frac{14}{5}$

D. $x_1 = y_1 - x_2 u_{12} = 1 - \left(-\frac{14}{5}\right) \frac{1}{2} = \frac{12}{5}$

(c) Descomposición de Cholesky

i. $\det(A_{11}) = |1| = 1 > 0$

$\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$

$\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$

$\det(A_{44}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{16} > 0$

La matriz es definida positiva

ii. Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{l_{11}} & \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} (l_{2k})^2} & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{l_{11}} & \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{3k} l_{2k}}{l_{22}} & \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1} (l_{3k})^2} & 0 \\ \frac{a_{41}}{l_{11}} & \frac{a_{42} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{4k} l_{2k}}{l_{22}} & \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^{3-1} l_{4k} l_{3k}}{l_{33}} & \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^{4-1} (l_{4k})^2} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{1}{2}-0}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} & \sqrt{1 - \left[0 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}\right)^2\right]} & 0 \\ 0 & \frac{0-0}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} & \frac{\frac{1}{2}-0-0}{\sqrt{1-\left[(0)+(\frac{1}{2})^2\right]}} & \sqrt{1 - \left[0 + 0 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}\right)^2\right]} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

2. Matriz de Pascal

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Definida positiva

i. $\det(P_{11}) = |6| > 0$

ii. $\det(P_{22}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0$

iii. $\det(P_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0$

iv. La matriz de Pascal es definida positiva

(b) Descomposición de Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1}} & \sqrt{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1}} & \frac{3 - \frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2}} & \sqrt{6 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2 - \left(\frac{3 - \frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2}}\right)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Métodos Iterativos

(a) Jacobi

$$M = -D^{-1}(L + U) = - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x^{k+1} = Mx^k + N \quad \vee \quad \begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - x_2^k) & x_3^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - [x_2^k + x_4^k]) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - [x_1^k + x_3^k]) & x_4^{k+1} &= \frac{1}{3}(1 - x_3^k) \end{aligned}$$

$$\text{i. } x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii. } x^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } x^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{iv. } x^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix}$$

$$\text{v. } x^4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{7}{27} \end{bmatrix}$$

$$\text{vi. } x^5 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} \\ \frac{7}{27} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{243}{47} \\ \frac{243}{47} \\ \frac{243}{68} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^5 = \begin{bmatrix} 0.27984 \\ 0.19342 \\ 0.19342 \\ 0.27984 \end{bmatrix}$$

(b) Método de Gauss-Seidel

$$\text{i. } M = -(D + L)^{-1}U = - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{ii. } N = (D + L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } x^{k+1} = Mx^k + N$$

$$\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_2^k + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9}x_2^k - \frac{1}{3}x_3^k + \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{27}x_2^k + \frac{1}{9}x_3^k - \frac{1}{3}x_4^k + \frac{7}{27} \\ \frac{1}{81}x_2^k - \frac{1}{27}x_3^k + \frac{1}{9}x_4^k + \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - x_2^k) \\ \frac{1}{9}(x_2^k - 3x_3^k + 2) \\ \frac{1}{27}(7 - x_2^k + 3x_3^k - 9x_4^k) \\ \frac{1}{81}(x_2^k - 3x_3^k + 9x_4^k + 20) \end{bmatrix}$$

$$\text{A. } x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{B. } x^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix}$$

$$\text{C. } x^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{18} \\ \frac{81}{16} \\ \frac{65}{243} \end{bmatrix}$$

$$\text{D. } x^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{13}{18} \\ \frac{81}{16} \\ \frac{65}{243} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{243}{127} \\ \frac{729}{407} \\ \frac{2187}{1780} \end{bmatrix}$$

$$\text{E. } x^4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{243}{127} \\ \frac{729}{407} \\ \frac{2187}{1780} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{602}{19683} \\ \frac{2187}{1178} \\ \frac{6561}{1201} \\ \frac{6561}{5360} \end{bmatrix}$$

$$\text{F. } x^5 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{602}{19683} \\ \frac{2187}{1178} \\ \frac{6561}{1201} \\ \frac{6561}{5360} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5383}{19683} \\ \frac{10697}{59049} \\ \frac{32272}{177147} \\ \frac{144875}{531441} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.27348 \\ 0.18115 \\ 0.18218 \\ 0.27261 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c) } E_{rel}(x_{GJ}^5) = \frac{\|x_J - x_{GJ}^5\|_\infty}{\|x_J\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{68}{243} \\ \frac{243}{47} \\ \frac{243}{47} \\ \frac{243}{68} \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix} \right\|_\infty} = \frac{\frac{31}{2673}}{\frac{31}{11}} = \frac{31}{729} = 4.2524 \times 10^{-2}$$

$$E_{rel}(x_{GS}^5) = \frac{\|x_J - x_{GS}^5\|_\infty}{\|x_J\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5383}{19683} \\ \frac{19683}{10697} \\ \frac{59049}{32272} \\ \frac{177147}{144875} \\ \frac{531441}{531441} \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \right\|_\infty} = \frac{164}{59049} = 2.7774 \times 10^{-3}$$

En consecuencia, puesto que el Error Relativo para la quinta iteración, al aplicar el Método de Gauss-Jacobi es casi un orden de magnitud mayor que si aplicamos Gauss-Seidel, podemos decir que la mejor solución es la entregada por este último método.

4. SEL

(a) Métodos Directos

$$\text{i. } A^0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{0}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Definiendo $U\vec{x} = \vec{y}$ el sistema queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Resolviendo $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ii. Es definida positiva si sus subdeterminantes son positivas

$$|4| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = 32 > 0 \Rightarrow \text{es definida positiva}$$

Entonces su factorización de Cholesky es

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(b) **Métodos Iterativos**

i. Gauss-Seidel

$$M = -(D + L)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = (D + L)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{k+1} = M\vec{x}^k + \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{15}{64} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{1}{64} \\ \frac{31}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234375 \\ 0.015625 \\ 0.2421875 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^5 = \begin{bmatrix} \frac{31}{128} \\ \frac{1}{128} \\ \frac{63}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2421875 \\ 0.0078125 \\ 0.24609375 \end{bmatrix}$$

ii. $\rho(T_G) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$ donde λ_i es un valor propio de T_G

$$\det(T_G - I\lambda) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 = \frac{1}{2} \implies \rho(T_G) = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_G)}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1} = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2}) = 1.1715728752538099024$$

iii. Sor

$$\vec{x}^{k+1} = (1 - \bar{\omega})\vec{x}^k + \bar{\omega}(M\vec{x}^k + \vec{N})$$

$$\vec{x}^{k+1} = (1 - 1.1715)\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + 1.1715\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{k+1} = -0.1715\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + 1.1715\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x_2^k - \frac{1}{2}x_3^k + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{k+1} = \begin{bmatrix} -0.1715x_1^k - 0.58575x_2^k + 0.292875 \\ 0.121375x_2^k - 0.58575x_3^k + 0.1464375 \\ -0.1464375x_2^k + 0.121375x_3^k + 0.21965625 \end{bmatrix}$$

Iterando:

$$\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^1 = (1 - 1.1715) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.1715 \left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{x}^1 = 1.1715 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.292875 \\ 0.1464375 \\ 0.21965625 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^2 = -0.1715 \begin{bmatrix} 0.292875 \\ 0.1464375 \\ 0.21965625 \end{bmatrix} + 1.1715 \left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.292875 \\ 0.1464375 \\ 0.21965625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.156871171875 \\ 0.035547703125 \\ 0.2248730859375 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^3 = -0.1715 \begin{bmatrix} 0.156871171875 \\ 0.035547703125 \\ 0.2248730859375 \end{bmatrix} + 1.1715 \left[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.156871171875 \\ 0.035547703125 \\ 0.2248730859375 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.24514952691796875 \\ 0.01903269237890625 \\ 0.241744704029296875 \end{bmatrix}$$

Hasta acá es necesario, es decir, 3 iteraciones

5. Crout

(a) Paso1: $l_{11} = a_{11} = 5$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{5}$$

Paso2: $l_{21} = a_{21} = -2$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 5 - (-2)\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{21}{5}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23}}{l_{22}} = \frac{-2}{\frac{21}{5}} = \frac{-10}{21}$$

$$l_{32} = a_{32} = -2$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 5 - (-2)\left(\frac{-10}{21}\right) = \frac{85}{21}$$

$$u_{34} = \frac{a_{34}}{l_{33}} = \frac{-2}{\frac{85}{21}} = \frac{-42}{85}$$

Paso3: $l_{34} = a_{34} = -2$

$$l_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 5 - (-2)\left(\frac{-42}{85}\right) = \frac{341}{85}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{21}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{85}{21} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{341}{85} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-42}{85} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Analisis de Crout

$$ops = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 3 + 2 = 3(n-2) + 3 = 3(n-1)$$

$$\Rightarrow O(n) \text{ lineal}$$

7. Analisis de Cholesky

$$\begin{aligned}
 Ops &= \sqrt{} + \sum_{j=2}^n D + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\sum_{m=1}^{k-1} (M, S) + (\sqrt{}, R) + \sum_{i=k+1}^n \left(\sum_{l=1}^{k-1} (S, M) + (R, D) \right) \right] \\
 &= \sqrt{} + (n-1)D + \sum_{k=2}^{n-1} \left[(k-1)(M, S) + (\sqrt{}, R) + \sum_{i=k+1}^n ((k-1)(S, M) + (R, D)) \right] \\
 &= \sqrt{} + (n-1)D + (M, S) \sum_{k=2}^{n-1} (k-1) + (\sqrt{}, R) (n-2) + (S, M) \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (k-1) + (R, D) \sum_{k=2}^{n-1} (n-k) \\
 &= \sqrt{} + (n-1)D + (M, S) \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (\sqrt{}, R) (n-2) + (S, M) \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)(n-k) + (R, D) \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
 &= \sqrt{}(n-1) + D(n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}) + R(n-2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}) + (S, M) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} ((n+1)k - n - k^2) \right) \\
 &= \sqrt{}(n-1) + D \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + R \left(\frac{n(n-1)-2}{2} \right) + (S, M) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n+1) \frac{(n-2)(n+1)}{2} - n(n-2) - \frac{(2n-1)(n-1)n}{6} + 1 \right) \\
 &= \sqrt{}(n-1) + D \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + R \left(\frac{n(n-1)-2}{2} \right) + (S, M) \left(\frac{1}{6}n^3 - \frac{7}{6}n + 1 \right) / \text{tomando todas las operaciones} \\
 &= (n-1) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + \left(\frac{n(n-1)-2}{2} \right) + \left(\frac{1}{6}n^3 - \frac{7}{6}n + 1 \right) = \frac{n^3 + 6n^2 - 7n - 6}{6} \\
 &\Rightarrow O(n^3) \text{ cúbico}
 \end{aligned}$$

8. Método de la Potencia

m	$(\vec{y}^{(m)})^t = (A\vec{x}^{(m-1)})^t$	$\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)}$	p_m	$(\vec{x}^{(m)})^t = \frac{(\vec{y}^{(m)})^t}{y_{p_m}^{(m)}}$
0			1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	10	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 7.2 & 5.4 & -0.8 \end{bmatrix}$	7.2	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & -0.111111 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 6.5 & 4.75 & -1.222222 \end{bmatrix}$	6.5	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.730769 & -0.188034 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 6.230766 & 4.499997 & -1.376068 \end{bmatrix}$	6.230766	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.722222 & -0.220850 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 6.111108 & 4.388886 & -1.4417 \end{bmatrix}$	6.111108	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.718182 & -0.235915 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 6.054548 & 4.336366 & -1.47183 \end{bmatrix}$	6.054548	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.716216 & -0.243095 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 6.027024 & 4.310808 & -1.48619 \end{bmatrix}$	6.027024	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.715247 & -0.2465878 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 6.013458 & 4.298211 & -1.4931756 \end{bmatrix}$	6.013458	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.714765 & -0.248306 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 6.00671 & 4.291945 & -1.496612 \end{bmatrix}$	6.00671	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.714525 & -0.249157 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 6.00335 & 4.288825 & -1.498314 \end{bmatrix}$	6.00335	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.714405 & -0.249580 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 6.00167 & 4.287265 & -1.49916 \end{bmatrix}$	6.00167	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.714345 & -0.249790 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 6.00083 & 4.286485 & -1.49958 \end{bmatrix}$	6.00083	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.714315 & -0.249895 \end{bmatrix}$

Valor propio: $6.00083 \approx 6$

Vector propio: $\begin{bmatrix} 1 & 0.714315 & -0.249895 \end{bmatrix}$

9. Análisis de los métodos iterativos

(a) Gauss-Seidel

- i. Calcular $[diag(A) + low(A)]^{-1}$

$$diag(A) + low(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

primera fila: $0 \times 1 + 1$ ops

segunda fila: $1 \times 1 + 2$ ops

tercera fila: $2 \times 1 + 3$ ops

cuarta fila: $3 \times 1 + 4$ ops

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n ((k-1) + k) = n^2$$

- ii. calcular $B = -[diag(A) + low(A)]^{-1} [up(A)] \Rightarrow \sum_{k=2}^n k = \frac{n(n+1)-2}{2}$

- iii. calcular $h = [diag(A) + low(A)]^{-1} b \Rightarrow \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

- iv. iterar una vez $x^{k+1} = Bx^k + h \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + n = n^2 - n + 1$

- v. método con k_{GS} iteraciones $\Rightarrow n^2 + \frac{n(n+1)-2}{2} + n^2 + k_{GS} (n^2 - n + 1) = \frac{n(1+5n)-2}{2} + k_{GS} (n^2 - n + 1)$

(b) método de la potencia

- i. $y^m = T_G x^{(m-1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

- ii. $x^m = \frac{y^m}{y_{p_m}^m} \Rightarrow n$

- iii. con k_p iteraciones $\Rightarrow k_p \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) = k_p \frac{n(n+1)}{2}$

(c) Sor

- i. plantear sistema $\Rightarrow n^2 + \frac{n(n+1)-2}{2} + n^2 + k_p \frac{n(n+1)}{2} + 5 = \frac{n(1+5n)+2}{2} + k_p \frac{n(n+1)}{2}$

- ii. iterar $\Rightarrow n + n^2 - 2 + n + n + n = n^2 + 4n - 2$

- iii. con k_{SOR} iteraciones $\Rightarrow \frac{n(1+5n)+2}{2} + k_p \frac{n(n+1)}{2} + k_{SOR}(4n + n^2 - 2)$

- iv. comparar con Gauss-Seidel

$$\frac{n(1+5n)+2}{2} + k_p \frac{n(n+1)}{2} + k_{SOR}(4n + n^2 - 2) \leq \frac{n(1+5n)-2}{2} + k_{GS} (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow k_{SOR} \leq \frac{\frac{n(1+5n)-2}{2} + k_{GS} (n^2 - n + 1) - \frac{n(1+5n)+2}{2} - k_p \frac{n(n+1)}{2}}{(4n + n^2 - 2)} = \frac{k_{GS} (n^2 - n + 1) - k_p \frac{n(n+1)}{2} - 2}{(4n + n^2 - 2)}$$

4 Polinomios de Interpolación

4.1 Resumen de Materia

1. **Teorema de Weistrass:** Sea $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. $\forall \varepsilon > 0 \exists p$ polinomio tal que $\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$
2. **Polinomio de Taylor:** $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
3. **Error de Taylor:** $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ donde $\xi \in [x, x_0]$
4. **Polinomio de Lagrange:** $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{n,i}(x)$ donde $L_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$
5. **Error de Lagrange:** $E_n(x) = \Pi_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ donde $\xi \in [a, b]$
6. **Cota de Error de Lagrange:** $|f(x) - P_n(x)| \leq M h^{n+1}$ donde $M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ y $h = \max_{i \geq 0} |x_{i+1} - x_i|$
7. **Polinomio Osculante:** Dados x_0, x_1, \dots, x_n ($n+1$) reales distintos en $[a, b]$, m_0, m_1, \dots, m^n (enteros no negativos). El polinomio osculante es el polinomio de menor grado tal que $\frac{d^k p}{dx^k}(x_i) = \frac{d^k f}{dx^k}(x_i) \forall k = 0 \dots m_i, \forall i = 0 \dots n$. El grado de este polinomio osculante es a lo más $M = \sum_{i=0}^n m_i + n$
8. **Polinomio de Hermite:** $H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) H_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \hat{H}_{n,i}(x)$ donde
 - (a) $H_{n,i}(x) = (1 - 2(x - x_i) L'_{n,i}(x)) L_{n,i}^2(x)$ $\hat{H}_{n,i}(x) = (x - x_i) L_{n,i}^2(x)$
 - (b) $\forall i, k = 0, 1 \dots n$ $H_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}$ $H'_{n,i}(x_k) = 0$ $\hat{H}_{n,i}(x_k) = 0$ $\hat{H}'_{n,i}(x_k) = \delta_{ik}$
9. **Error de Hermite:** $E_{2n+1}(x) = \Pi_{i=0}^n (x - x_i)^2 \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$ donde $\xi \in [a, b]$
10. **Polinomio de Newton:** $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i N_i(x)$ donde $N_i(x) = \Pi_{k=0}^i (x - x_k)$ y $a_i = \sum_{k=0}^i \frac{f(x_k)}{\Pi_{j=0, j \neq k}^i (x_k - x_j)}$
Obs: Si se agrega un punto x_{n+1} se cumple que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1} N_{n+1}(x)$
11. **Diferencias Divididas:** $f[x_k \dots x_m] = \sum_{i=k}^m \frac{f(x_i)}{\Pi_{j=k, j \neq i}^m (x_i - x_j)}$ con $f[x_i] = f(x_i)$ y se cumple $f[x_k \dots x_m] = \frac{f[x_{k+1} \dots x_m] - f[x_k \dots x_{m-1}]}{x_m - x_k}$
 - (a) $P_n(x) = f[x_n] + (x - x_n) f[x_{n-1}, x_n] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \dots + \Pi_{j=0}^n (x - x_j) f[x_0 \dots x_n]$
 $= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + \Pi_{j=0}^n (x - x_j) f[x_0 \dots x_n]$
 - (b) $f[\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n+1 \text{ veces}}] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

4.2 Problemas

1. Interpola la función $\text{sen}(\pi x)$ dentro del intervalo $[-1, 1]$ utilizando Lagrange en los puntos $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$. Acote el error de lagrange. Grafique $\text{sen}(\pi x)$, $L_4(x)$ y $T_5(x)$ (polinomio de Taylor)

2. Encuentre el polinomio de newton con los siguientes datos, y vea a que función se parece

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
2	1	2
3	2	4
4	4	16

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$, encuentre el polinomio de newton que interpole a f y a su derivada f' en los puntos 0, 1, 3.

4. Una fábrica de mermeladas de membrillo desea expandir su mercado, por lo que decide envasar la mermelada en frascos que contengan 1 kilo de mermelada a temperatura ambiente (15°). Al preparar la mermelada, esta puede alcanzar temperaturas cerca de las $80^\circ C$, por lo que aumenta su volumen, y luego al enfriar la mermelada, esta disminuye su volumen, y el proceso de sellado obliga a la fábrica a envasar la mermelada calentita a 50° . La fábrica produce una mermelada normal y una dietética, con 40% y 15% de concentración de azucar respectivamente, las cuales la empresa ya conoce sus propiedades para el envasado. El cocinero jefe ha creado una mermelada semi dietética con un 25% de concentración de azucar. La fábrica desea conocer el volumen que tendrá la mermelada al momento de envasado, para diseñar el tamaño y la forma de los frascos, y que volumen tendrá a temperatura ambiente, para ver el material del frasco, para que soporte la diferencia de presión. Para esto, se tienen los datos de las mermeladas normal y dietética, con 1 kilo cada una:

$\% \backslash T^\circ$	5°	10°	20°	40°	80°
15	880 cc	950 cc	1030 cc	1080 cc	1250 cc
40	900 cc	1010 cc	1090 cc	1150 cc	1280 cc

5. La empresa Ferrari realiza pruebas de su nuevo modelo "Relampago McQueen", por lo que se han tomado los siguientes datos:

$Tiempo [s]$	0	3	5
$Velocidad [\frac{km}{h}]$	0	63	108

- (a) Calcule la velocidad en función del tiempo.
 - (b) Aproxime la distancia en función del tiempo integrando el polinomio anterior.
 - (c) Se midió la distancia de "Relampago McQueen" en $t = 7$, y se agregó el dato que ha recorrido $\frac{10567}{72} m$. Determine el polinomio de Hermite que interpola distancia y velocidad del automovil,
 - (d) Calcule la velocidad en $t = 7$.
6. Un automóvil realiza un recorrido por una carretera aproximadamente recta, cronometrándose su velocidad en varios instantes, según lo que se muestra en la tabla:

Tiempo [s]	0	5	10	15	20
Velocidad $[\frac{km}{h}]$	30	60	50	70	40

- (a) Determine el polinomio de Lagrange que interpola la velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.
- (b) Aproxime la distancia que ha recorrido el automóvil integrando el polinomio de Lagrange que interpola la velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.
- (c) Utilizando los cálculos realizados en (a) y (b), determine el polinomio de Hermite que interpola distancia y velocidad del automóvil en $t \in [0, 20]$.

7. Se desea interpolar la función de dos variables $f(x, y) = \sin(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2))$ y su gradiente $\nabla f(x, y)$, usando los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Para esto, siga los siguientes pasos:

- Calcule el polinomio $p_0(x)$ que interpola la función $f(x, 0)$ y a $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x}$.
- Calcule el polinomio $p_1(x)$ que interpola la función $f(x, 1)$ y a $\frac{\partial f(x, 1)}{\partial x}$.
- Calcule el polinomio $q_0(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y}$.
- Calcule el polinomio $q_1(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x, 1)}{\partial y}$.
- Calcule los polinomios $L_0(y)$ y $L_1(y)$ para los puntos $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. A partir de $L_0(y)$ y $L_1(y)$, encuentre los polinomios de Hermite $H_0(y)$, $\hat{H}_0(y)$, $H_1(y)$ y $\hat{H}_1(y)$. ¿Cuáles son sus propiedades?
- Encuentre el polinomio $p(x, y)$, que interpola a $f(x, y)$ y su gradiente $\nabla f(x, y)$ en los puntos dados, es decir, $p(x, y) = f(x, y)$ y $\nabla p(x, y) = \nabla f(x, y)$, $\forall x = x_0, x_1, x_2 \forall y = y_0, y_1$.

Hint: Suponga que $p(x, y) = \sum_{i=1}^n v(x)u(y)$, usando $p_j(x)$, $q_j(x)$, $H_j(y)$ y $\hat{H}_j(y)$, $j = 0, 1$

4.3 Respuestas

1. Lagrange

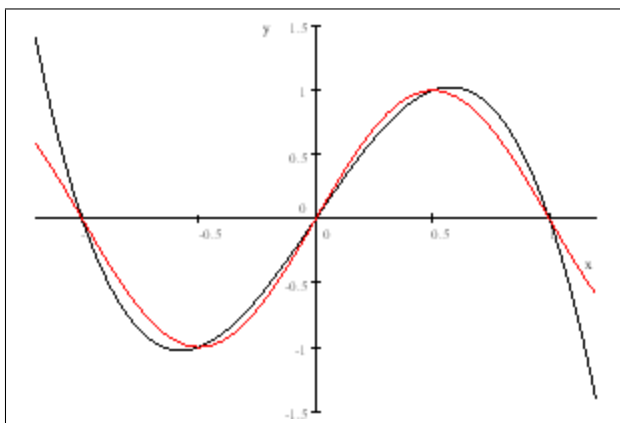
$$\begin{bmatrix} i & x_i & f(x_i) & L_{4,i}(x) \\ 0 & -1 & 0 & \frac{(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(-1+\frac{1}{2})(-1-\frac{1}{2})(-1-1)} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(1)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(-1)} \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-1)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)} \\ 4 & 1 & 0 & \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})}{(1+1)(1+\frac{1}{2})1(1-\frac{1}{2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{4,i}(x) \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \\ -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 \\ 5x^2 - 4x^4 - 1 \\ \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \end{bmatrix}$$

$$P_4(x) = 0 \times L_{4,0}(x) + (-1) \times \left(-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4\right) + 0 \times L_{4,2}(x) + 1 \times \left(\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4\right) + 0 \times L_{4,4}(x)$$

$$P_4(x) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^4 = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$$

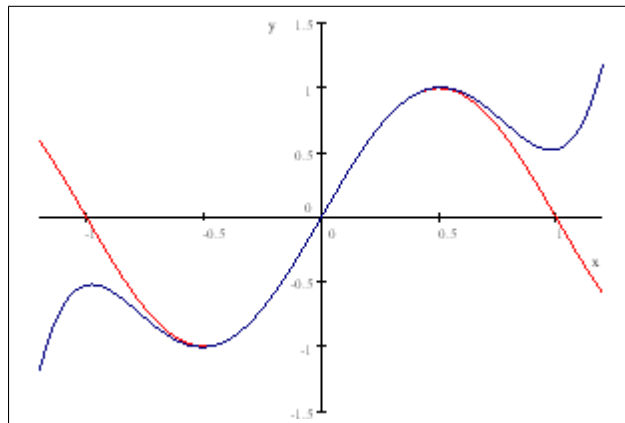
$$E_4(x) = \Pi_{i=0}^4 (x - x_i) \frac{f^{(5)}(\xi)}{(5)!} = (x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})(x-1) \frac{\pi^5 \cos(\pi\xi)}{120!} \leq \pi^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\pi^5 \simeq 9.563$$

$$T_5(x) = \pi x - \frac{1}{6}\pi^3 x^3 + \frac{1}{120}\pi^5 x^5$$



Rojo: $\text{Sen}(\pi x)$

Negro: Lagrange $\frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$



Rojo: $\text{Sen}(\pi x)$

Azul: Taylor $\pi x - \frac{1}{6}\pi^3 x^3 + \frac{1}{120}\pi^5 x^5$

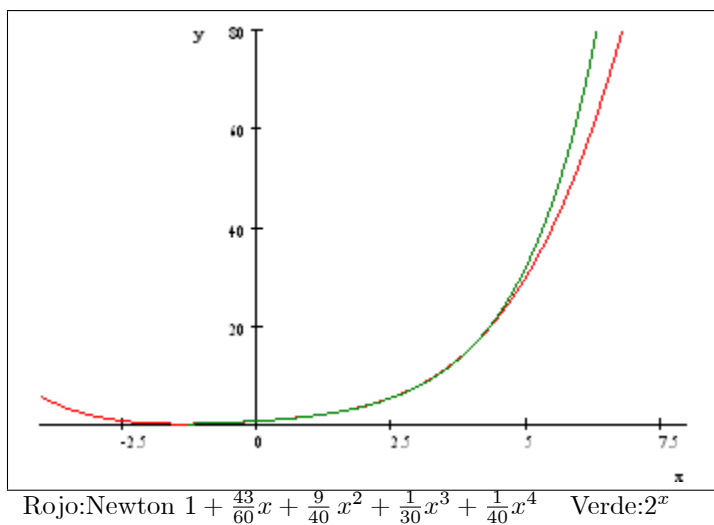
2. Newton

$$\begin{bmatrix} x_i & f(x_i) & f[x_i, x_{i+1}] & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}] \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1-\frac{1}{2}}{0+1} = 0.5 & \frac{1-0.5}{1+1} = 0.25 & \frac{0.5-0.25}{2+1} = \frac{1}{12} & \frac{\frac{5}{24}-\frac{1}{12}}{4+1} = \frac{1}{40} \\ 0 & 1 & \frac{2-1}{1-0} = 1 & \frac{2-1}{2-0} = 0.5 & \frac{\frac{4}{3}-0.5}{4-0} = \frac{5}{24} & \\ 1 & 2 & \frac{4-2}{2-1} = 2 & \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} & & \\ 2 & 4 & \frac{16-4}{4-2} = 6 & & & \\ 4 & 16 & & & & \end{bmatrix}$$

$$P_4(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + \Pi_{j=0}^n (x - x_j) f[x_0 \dots x_n]$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2} + (x+1)0.5 + (x+1)x0.25 + (x+1)x(x-1)\frac{1}{12} + (x+1)x(x-1)(x-2)\frac{1}{40}$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{43}{60}x + \frac{9}{40}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{40}x^4$$



3. Newton con derivadas

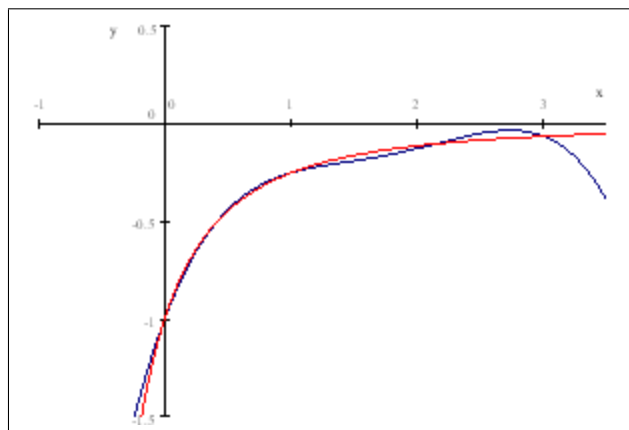
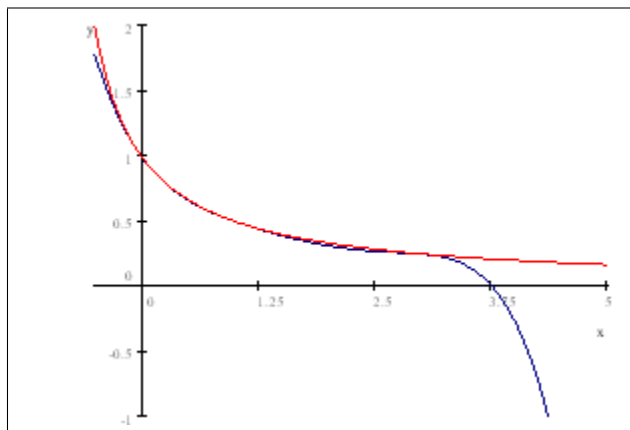
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+5}]$
0	1	$f'(0) = -1$	$\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-0} = -\frac{1}{4}$	$\frac{-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}{3-0} = \frac{1}{16}$	$\frac{\frac{1}{64}-\frac{1}{16}}{3-0} = -\frac{1}{64}$
0	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-0} = \frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{3-0} = -\frac{1}{16}$	$\frac{-\frac{1}{64}+\frac{1}{16}}{3-0} = \frac{1}{64}$	
1	$\frac{1}{2}$	$f'(1) = -\frac{1}{4}$	$\frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}{3-1} = \frac{1}{16}$	$\frac{\frac{1}{32}-\frac{1}{16}}{3-1} = -\frac{1}{64}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{3-1} = -\frac{1}{8}$	$\frac{-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}{3-1} = \frac{1}{32}$			
3	$\frac{1}{4}$	$f'(3) = -\frac{1}{16}$				
3	$\frac{1}{4}$					

$$P_5(x) = 1 + x(-1) + x^2 \frac{1}{2} + x^2(x-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + x^2(x-1)^2 \frac{1}{16} + x^2(x-1)^2(x-3)\left(-\frac{1}{64}\right)$$

$$P_5(x) = 1 - x + \frac{55}{64}x^2 - \frac{31}{64}x^3 + \frac{9}{64}x^4 - \frac{1}{64}x^5$$

$$\frac{\partial P_5(x)}{\partial x} = \frac{55}{32}x - \frac{93}{64}x^2 + \frac{9}{16}x^3 - \frac{5}{64}x^4 - 1$$



4. Newton

(a) Volumen en función de la temperatura

i. 15% *Lagrange* :

$$\begin{bmatrix} i & t_i & V(t_i) & L_{4,i}(t) \\ 0 & 5 & 880 & \frac{(t-10)(t-20)(t-40)(t-80)}{(5-10)(5-20)(5-40)(5-80)} \\ 1 & 10 & 950 & \frac{(t-5)(t-20)(t-40)(t-80)}{(10-5)(10-20)(10-40)(10-80)} \\ 2 & 20 & 1030 & \frac{(t-5)(t-10)(t-40)(t-80)}{(20-5)(20-10)(20-40)(20-80)} \\ 3 & 40 & 1080 & \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-80)}{(40-5)(40-10)(40-20)(40-80)} \\ 4 & 80 & 1250 & \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-40)}{(80-5)(80-10)(80-20)(80-40)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{15}(t) &= \sum_{i=0}^4 V(t_i) L_{4,i}(t) \\ &= 880 \frac{(t-10)(t-20)(t-40)(t-80)}{(5-10)(5-20)(5-40)(5-80)} + 950 \frac{(t-5)(t-20)(t-40)(t-80)}{(10-5)(10-20)(10-40)(10-80)} \\ &\quad + 1030 \frac{(t-5)(t-10)(t-40)(t-80)}{(20-5)(20-10)(20-40)(20-80)} + 1080 \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-80)}{(40-5)(40-10)(40-20)(40-80)} \\ &\quad + 1250 \frac{(t-5)(t-10)(t-20)(t-40)}{(80-5)(80-10)(80-20)(80-40)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{15}(t) = \frac{49274}{63} + \frac{1915}{84}t - \frac{497}{720}t^2 + \frac{157}{16800}t^3 - \frac{53}{1260000}t^4$$

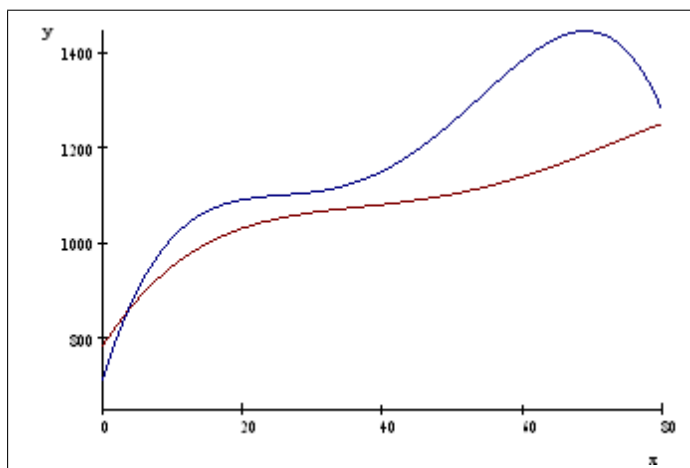
ii. 40% *Newton* :

$$\begin{bmatrix} t_i & V(t_i) & V[t_i, t_{i+1}] & V[t_i \dots t_{i+2}] & V[t_i \dots t_{i+3}] & V[t_i \dots t_{i+4}] \\ 5 & 900 & \frac{1010-900}{10-5} = 22 & \frac{8-22}{20-5} = -\frac{14}{15} & \frac{-\frac{1}{6} + \frac{14}{15}}{40-5} = \frac{23}{1050} & \frac{\frac{41}{16800} - \frac{23}{1050}}{80-5} = -\frac{109}{420000} \\ 10 & 1010 & \frac{1090-1010}{20-10} = 8 & \frac{3-8}{40-10} = -\frac{1}{6} & \frac{\frac{1}{240} + \frac{1}{6}}{80-10} = \frac{41}{16800} \\ 20 & 1090 & \frac{1150-1090}{40-20} = 3 & \frac{\frac{13}{4} - 3}{80-20} = \frac{1}{240} \\ 40 & 1150 & \frac{1280-1150}{80-40} = \frac{13}{4} \\ 80 & 1280 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{40}(t) &= 900 + 22(t-5) - \frac{14}{15}(t-5)(t-10) \\ &\quad + \frac{23}{1050}(t-5)(t-10)(t-20) - \frac{109}{420000}(t-5)(t-10)(t-20)(t-40) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{40}(t) = \frac{14932}{21} + \frac{3995}{84}t - \frac{517}{240}t^2 + \frac{139}{3360}t^3 - \frac{109}{420000}t^4$$

iii. Gráfico:



$$\begin{aligned} \text{Rojo : } P_{15}(t) &= \frac{49274}{63} + \frac{1915}{84}t - \frac{497}{720}t^2 + \frac{157}{16800}t^3 - \frac{53}{1260000}t^4 \\ \text{Azul : } P_{40}(t) &= \frac{14932}{21} + \frac{3995}{84}t - \frac{517}{240}t^2 + \frac{139}{3360}t^3 - \frac{109}{420000}t^4 \end{aligned}$$

(b) Volumen en función de la concentración a 15°

- i.
$$\begin{bmatrix} \% & V(\%) & L_{2,i} \\ 15 & P_{15}(15) = \frac{1006175}{1008} \frac{c-40}{15-40} & \frac{c-40}{15-40} \\ 40 & P_{40}(15) = \frac{358255}{336} \frac{c-15}{40-15} & \frac{c-15}{40-15} \end{bmatrix}$$
- ii.
$$V_{15}(c) = \frac{1006175}{1008} \frac{c-40}{15-40} + \frac{358255}{336} \frac{c-15}{40-15} = \frac{6859}{2520}c + \frac{965021}{1008}$$

$$\Rightarrow V_{15}(c) = \frac{965021}{1008} + \frac{6859}{2520}c$$
- iii.
$$V_{15}(25) = \frac{344537}{336} = 1025.4077380952380952$$
- iv. La mermelada tendrá un volumen de 1025.4 cc a temperatura ambiente

(c) Volumen en función de la concentración a 50°

- i.
$$\begin{bmatrix} \% & V(\%) & V[\%_i, \%_{i+1}] \\ 15 & P_{15}(50) = \frac{7711}{7} & \frac{\frac{8769}{7} - \frac{7711}{7}}{40-15} = \frac{1058}{175} \\ 40 & P_{40}(50) = \frac{8769}{7} & \end{bmatrix}$$
- ii.
$$V_{50}(c) = \frac{7711}{7} + \frac{1058}{175}(c-15) = \frac{1058}{175}c + \frac{35381}{35}$$

$$\Rightarrow V_{50}(c) = \frac{35381}{35} + \frac{1058}{175}c$$
- iii.
$$V_{50}(25) = \frac{40671}{35} = 1162.0285714285714286$$
- iv. La mermelada calentita tendrá un volumen de 1162 cc en el envasado.

5. Hermite por Newton

(a) Velocidad

$$\begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 \\ \text{Velocidad } [\frac{km}{h}] & 0 & 63 & 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 \\ \text{Velocidad } [\frac{m}{s}] & 0 & \frac{63000}{3600} = \frac{35}{2} & \frac{108000}{3600} = 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_i & v(t_i) & v[t_i, t_{i+1}] & v[t_i, \dots, t_{i+2}] \\ 0 & 0 & \frac{\frac{35}{2} - 0}{3-0} = \frac{35}{6} & \frac{\frac{25}{4} - \frac{35}{6}}{5-0} = \frac{1}{12} \\ 3 & \frac{35}{2} & \frac{30 - \frac{35}{2}}{5-3} = \frac{25}{4} & \\ 5 & 30 & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v(t) = 0 + \frac{35}{6}t + \frac{1}{12}t(t-3) = \frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2$$

(b) Distancia

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (\frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2) = \frac{67}{24}t^2 + \frac{1}{36}t^3$$

$$d(0) = 0$$

$$d(3) = \frac{67}{24}3^2 + \frac{1}{36}3^3 = \frac{207}{8}$$

$$d(5) = \frac{67}{24}5^2 + \frac{1}{36}5^3 = \frac{5275}{72}$$

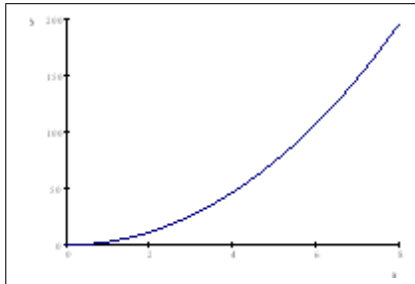
(c) Hermite

$$\begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 & 7 \\ \text{Distancia [m]} & 0 & \frac{207}{8} & \frac{5275}{72} & \frac{10567}{72} \\ \text{Velocidad } [\frac{m}{s}] & 0 & \frac{35}{2} & 30 & ? \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_i & d(t_i) & d[t_i, t_{i+1}] & d[t_i, \dots, t_{i+2}] & d[t_i, \dots, t_{i+3}] & d[t_i, \dots, t_{i+4}] & d[t_i, \dots, t_{i+5}] & d[t_i, \dots, t_{i+6}] \\ 0 & 0 & v(0) = 0 & \frac{\frac{69}{8} - 0}{3-0} = \frac{23}{8} & \frac{\frac{71}{24} - \frac{23}{8}}{3-0} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{36} - \frac{1}{36}}{5-0} = 0 & \frac{0-0}{5-0} = 0 & \frac{\frac{1}{1008} - 0}{7-0} = \frac{1}{7056} \\ 0 & 0 & \frac{\frac{207}{8} - 0}{3-0} = \frac{69}{8} & \frac{\frac{35}{2} - \frac{69}{8}}{5-3} = \frac{71}{24} & \frac{\frac{223}{72} - \frac{71}{24}}{5-0} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{36} - \frac{1}{36}}{7-3} = 0 & \frac{\frac{1}{144} - 0}{7-0} = \frac{1}{1008} \\ 3 & \frac{207}{8} & v(3) = \frac{35}{2} & \frac{\frac{853}{36} - \frac{35}{2}}{5-3} = \frac{223}{72} & \frac{\frac{227}{72} - \frac{223}{72}}{5-3} = \frac{1}{36} & \frac{\frac{1}{18} - \frac{1}{36}}{7-3} = \frac{1}{144} \\ 3 & \frac{207}{8} & \frac{\frac{5275}{72} - \frac{207}{8}}{5-3} = \frac{853}{36} & \frac{30 - \frac{853}{36}}{7-5} = \frac{227}{72} & \frac{\frac{27}{8} - \frac{227}{72}}{7-3} = \frac{1}{18} \\ 5 & \frac{5275}{72} & v(5) = 30 & \frac{\frac{147}{4} - 30}{7-5} = \frac{27}{8} \\ 5 & \frac{5275}{72} & \frac{\frac{10567}{72} - \frac{5275}{72}}{7-5} = \frac{147}{4} \\ 7 & \frac{10567}{72} & & & & & & \end{bmatrix}$$

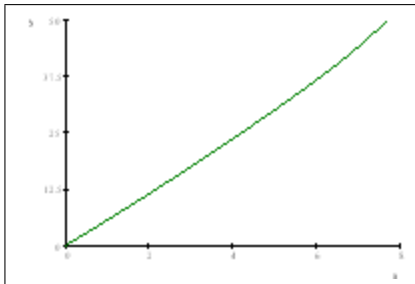
$$d(t) = \left(\frac{67}{24}t^2 + \frac{1}{36}t^3\right) + \frac{1}{7056}t^2(t-3)^2(t-5)^2$$

$$\Rightarrow d(t) = \frac{6641}{2352}t^2 - \frac{11}{1764}t^3 + \frac{47}{3528}t^4 - \frac{1}{441}t^5 + \frac{1}{7056}t^6$$



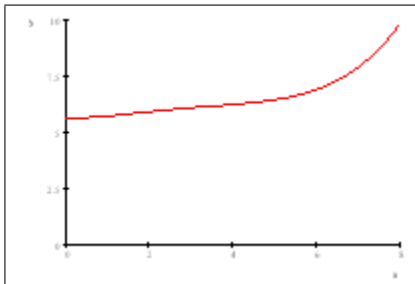
Distancia

$$\Rightarrow v(t) = \frac{6641}{1176}t - \frac{11}{588}t^2 + \frac{47}{882}t^3 - \frac{5}{441}t^4 + \frac{1}{1176}t^5$$



Velocidad

$$\Rightarrow a(t) = \frac{6641}{1176} - \frac{11}{294}t + \frac{47}{294}t^2 - \frac{20}{441}t^3 + \frac{5}{1176}t^4$$



Aceleración

(d) Estimación de la velocidad

$$v(7) = \frac{6641}{1176} \times 7 - \frac{11}{588} \times 7^2 + \frac{47}{882} \times 7^3 - \frac{5}{441} \times 7^4 + \frac{1}{1176} \times 7^5 = \frac{5539}{126} \approx 43.96$$

6. Lagrange y Hermite

(a) Velocidad:

$$\left[\frac{km}{h}\right] = \frac{1000}{3600} \left[\frac{m}{s}\right] = \frac{10}{36} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Usando Newton,

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t[s] & v[\frac{m}{s}] & & & & & \\ \hline 0 & 30 \times \frac{10}{36} = \frac{25}{3} & \frac{\frac{50}{3} - \frac{25}{3}}{\frac{5}{3} - 0} = \frac{5}{3} & \frac{-\frac{5}{9} - \frac{5}{3}}{\frac{10}{10} - 0} = -\frac{2}{9} & \frac{\frac{1}{6} + \frac{2}{9}}{\frac{15}{15} - 0} = \frac{7}{270} & \frac{-\frac{4}{135} - \frac{7}{270}}{20 - 0} = -\frac{1}{360} \\ \hline 5 & 60 \times \frac{10}{36} = \frac{50}{3} & \frac{\frac{125}{9} - \frac{50}{3}}{\frac{9}{9} - \frac{5}{3}} = -\frac{5}{9} & \frac{\frac{10}{9} + \frac{5}{9}}{\frac{15}{15} - 5} = \frac{1}{6} & \frac{-\frac{5}{18} - \frac{1}{6}}{20 - 5} = -\frac{4}{135} \\ \hline 10 & 50 \times \frac{10}{36} = \frac{125}{9} & \frac{\frac{175}{9} - \frac{125}{9}}{\frac{15}{15} - \frac{10}{9}} = \frac{10}{9} & \frac{-\frac{5}{3} - \frac{10}{9}}{20 - 10} = -\frac{5}{18} \\ \hline 15 & 70 \times \frac{10}{36} = \frac{175}{9} & \frac{\frac{100}{9} - \frac{175}{9}}{20 - 15} = -\frac{5}{3} \\ \hline 20 & 40 \times \frac{10}{36} = \frac{100}{9} \end{array} \right]$$

$$V(t) = \frac{25}{3} + \frac{5}{3}t - \frac{2}{9}t(t-5) + \frac{7}{270}t(t-5)(t-10) - \frac{1}{360}t(t-5)(t-10)(t-15)$$

$$V(t) = \frac{25}{3} + \frac{665}{108}t - \frac{11}{8}t^2 + \frac{59}{540}t^3 - \frac{1}{360}t^4$$

(b) Distancia

i. $D(t) = \int_0^t V(x)dx = \frac{25}{3}t + \frac{1}{2} \frac{665}{108}t^2 - \frac{1}{3} \frac{11}{8}t^3 + \frac{1}{4} \frac{59}{540}t^4 - \frac{1}{5} \frac{1}{360}t^5$

$$D(t) = \frac{25}{3}t + \frac{665}{216}t^2 - \frac{11}{24}t^3 + \frac{59}{2160}t^4 - \frac{1}{1800}t^5$$

ii. $D(0) = 0,$

$$D(5) = \frac{33}{432} \frac{125}{25} \simeq 76.7$$

$$D(10) = \frac{81}{54} \frac{125}{25} \simeq 150$$

$$D(15) = \frac{11}{48} \frac{125}{25} \simeq 232$$

$$D(20) = \frac{87}{27} \frac{50}{25} \simeq 324$$

(c) Hermite

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} t[s] & D[m] & & & & & \\ \hline 0 & 0 & V(0) = \frac{25}{3} & \frac{15.3 - \frac{25}{3}}{\frac{5}{3} - 0} = 1.4 & \frac{0.273 - 1.4}{5 - 0} = -0.225 & \frac{-0.0666 + 0.225}{10 - 0} = 0.0158 \\ \hline 0 & 0 & \frac{76.7 - 0}{5 - 0} = 15.3 & \frac{\frac{50}{3} - 15.3}{\frac{5}{3} - 0} = 0.273 & \frac{-0.393 - 0.273}{10 - 0} = -0.0666 & \frac{0.0462 + 0.0666}{10 - 0} = 0.0113 \\ \hline 5 & 76.7 & V(5) = \frac{50}{3} & \frac{14.7 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{10} - 5} = -0.393 & \frac{-0.162 + 0.393}{10 - 5} = 0.0462 & \frac{0.0664 - 0.0462}{15 - 5} = 0.00202 \\ \hline 5 & 76.7 & \frac{150 - 76.7}{10 - 5} = 14.7 & \frac{\frac{125}{9} - 14.7}{\frac{10}{10} - 5} = -0.162 & \frac{0.502 + 0.162}{15 - 5} = 0.0664 & \frac{0.0214 - 0.0664}{15 - 5} = -0.0045 \\ \hline 10 & 150 & V(10) = \frac{125}{9} & \frac{\frac{82}{5} - \frac{125}{9}}{\frac{15}{15} - 10} = 0.502 & \frac{0.609 - 0.502}{15 - 10} = 0.0214 & \frac{-0.0818 - 0.0214}{20 - 10} = -0.0103 \\ \hline 10 & 150 & \frac{232 - 150}{15 - 10} = \frac{82}{5} & \frac{\frac{175}{9} - \frac{82}{5}}{\frac{15}{15} - 10} = 0.609 & \frac{-0.209 - 0.609}{20 - 10} = -0.0818 & \frac{-0.250 + 0.0818}{20 - 10} = -0.0168 \\ \hline 15 & 232 & V(15) = \frac{175}{9} & \frac{\frac{92}{5} - \frac{175}{9}}{\frac{20}{20} - 15} = -0.209 & \frac{-1.46 + 0.209}{20 - 15} = -0.250 \\ \hline 15 & 232 & \frac{324 - 232}{20 - 15} = \frac{92}{5} & \frac{\frac{100}{9} - \frac{92}{5}}{\frac{20}{20} - 15} = -1.46 \\ \hline 20 & 324 & V(20) = \frac{100}{9} \\ \hline 20 & 324 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \dots & & & & & & \\ \hline & \frac{0.0113 - 0.0158}{10 - 0} = -0.00045 & \frac{-0.000619 + 0.00045}{15 - 0} = -0.0000113 & \frac{-0.0000022 + 0.0000113}{15 - 0} = 6.07 \times 10^{-7} \\ \hline & \frac{0.00202 - 0.0113}{15 - 0} = -0.000619 & \frac{-0.000652 + 0.000619}{15 - 0} = -0.0000022 & \frac{0.0000177 + 0.0000022}{20 - 0} = 0.000000995 \\ \hline \dots & \frac{-0.0045 - 0.00202}{15 - 5} = -0.000652 & \frac{-0.000387 + 0.000652}{20 - 5} = 0.0000177 & \frac{-0.0000175 - 0.0000177}{20 - 5} = -2.35 \times 10^{-6} & \dots \\ \hline & \frac{-0.0103 + 0.0045}{20 - 5} = -0.000387 & \frac{-0.00065 + 0.000387}{20 - 5} = -0.0000175 \\ \hline & \frac{-0.0168 + 0.0103}{20 - 10} = -0.00065 \\ \hline \dots & \frac{0.000000995 - 6.07 \times 10^{-7}}{20 - 0} = 0.0000000194 & \frac{-0.00000016725 - 0.0000000194}{20 - 0} = -0.000000093325 \\ \hline & \frac{-2.35 \times 10^{-6} - 0.000000995}{20 - 0} = -0.00000016725 \end{array} \right]$$

$$H(t) = 0 + \frac{25}{3}t + 1.4t^2 - 0.225t^2(t-5) + 0.0158t^2(t-5)^2 - 0.00045t^2(t-5)^2(t-10) - 0.0000113t^2(t-5)^2(t-10)^2 + 6.07 \times 10^{-7}t^2(t-5)^2(t-10)^2(t-15) + 0.0000000194t^2(t-5)^2(t-10)^2(t-15)^2 - 0.000000093325t^2(t-5)^2(t-10)^2(t-15)^2(t-20)$$

7. Interpolación en dos dimensiones

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \pi x \cos \frac{1}{2} \pi (x^2 + y^2) \\ \pi y \cos \frac{1}{2} \pi (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

- (a) $p_0(x)$ interpola a $f(x, 0) = \sin(\frac{\pi}{2} x^2)$ y a $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = \pi x \cos(\frac{\pi}{2} x^2)$

$$\begin{bmatrix} x & f(x, 0) \\ -1 & 1 & 0 & \frac{-1}{0+1} = -1 & \frac{1+1}{0+1} = 2 & \frac{0-2}{1+1} = -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{0-1}{0+1} = -1 & \frac{1}{0+1} = 1 & \frac{1+1}{1+1} = 0 & \frac{-2-0}{1+1} = -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-0} = 1 & \frac{-1+1}{1-0} = -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{1-0} = -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_0(x) = 1 + 0(x+1) - 1(x+1)^2 + 2(x+1)^2x - 1(x+1)^2x^2 = 2x^2 - x^4$$

- (b) $p_1(x)$ interpola a $f(x, 1) = \sin(\frac{\pi}{2} (x^2 + 1))$ y a $\frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} = \pi x \cos \frac{1}{2} \pi (x^2 + 1)$

$$\begin{bmatrix} x & f(x, 1) \\ -1 & 0 & \pi & \frac{1-\pi}{0+1} = 1-\pi & \frac{-1-1+\pi}{0+1} = \pi-2 & \frac{2-\pi}{1+1} = 1-\frac{\pi}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1-0}{0+1} = 1 & \frac{0-1}{0+1} = -1 & \frac{-1+1}{1+1} = 0 & \frac{2-\pi}{1+1} = 1-\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1-0}{1-0} = -1 & \frac{1-\pi+1}{1-0} = 2-\pi \\ 0 & 1 & \frac{0-1}{1-0} = -1 & \frac{-\pi+1}{1-0} = 1-\pi \\ 1 & 0 & -\pi \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_1(x) = 0 + \pi(x+1) + (1-\pi)(x+1)^2 + (\pi-2)(x+1)^2x + (1-\frac{\pi}{2})(x+1)^2x^2$$

- (c) $q_0(x)$ interpola a $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \pi 0 \cos \frac{1}{2} \pi (x^2 + 0) = 0$

$$\Rightarrow q_0(x) = 0$$

- (d) $q_1(x)$ interpola a $\frac{\partial f(x, 1)}{\partial y} = \pi \cos \frac{1}{2} \pi (x^2 + 1)$

$$\begin{bmatrix} x & \frac{\partial f(x, 1)}{\partial y} \\ -1 & -\pi & \pi & \frac{-\pi-\pi}{1+1} = -\pi \\ 0 & 0 & -\pi \\ 1 & -\pi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q_1(x) = -\pi + \pi(x+1) - \pi(x+1)x$$

- (e) $L_0(y) = 1 - y$ polinomio de lagrange para $y = 0$

$$L_1(y) = y \text{ polinomio de lagrange para } y = 1$$

$$H_0(y) = (1 - 2(y-0)(-1))(1-y)^2 = (1-y)^2(2y+1)$$

$$\hat{H}_0(y) = (y-0)(1-y)^2 = y(1-y)^2$$

$$H_1(y) = (1 - 2(y-1)(1))y^2 = y^2(3-2y)$$

$$\hat{H}_1(y) = (y-1)y^2 = y^2(y-1)$$

Estos polinomios cumplen:

$$H_j(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

$$\frac{dH_j(y_i)}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \vee j \neq i \end{cases}$$

$$\hat{H}_j(y_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \vee j \neq i \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{H}_j(y_i)}{dy} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

- (f) $p(x, y) = p_0(x)H_0(y) + p_1(x)H_1(y) + q_0(x)\hat{H}_0(y) + q_1(x)\hat{H}_1(y)$

5 Spline Cúbica

5.1 Resumen de Materia

1. **Spline Cúbica:** Es una polinomio de tercer grado definida por trozos $S(x) = \{S_k(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}] \mid k \in \{0..n-1\}\}$ y cumple

- (a) Interpole: $S_k(x_k) = y_k$ n+1 restricciones
- (b) Continua: $S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k)$ n-1 restricciones
- (c) 1° Derivada Continua: $S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k)$ n-1 restricciones
- (d) 2° Derivada Continua: $S''_{k-1}(x_k) = S''_k(x_k)$ n-1 restricciones

2. **Condiciones de Borde:** Son 4n incógnitas y 4n-2 restricciones + 2 condiciones de borde

- (a) Spline Natural: $S''(x_0) = 0, S''(x_n) = 0$
- (b) Spline Extremos Constantes: $S''(x_0) = S''(x_1), S''(x_n) = S''(x_{n-1})$
- (c) Spline Valor Fijo: $S''(x_0) = \alpha, S''(x_n) = \beta$
- (d) Spline Sujeta: $S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$

3. **Construcción de la Spline:** se define $m_k = \frac{S''(x_k)}{2}$, $h_k = x_{k+1} - x_k$, $d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, $\mu_k = 3(d_k - d_{k-1})$ y se resuelve el sistema matricial de n+1 incógnitas

$$\begin{bmatrix}
 1^\circ & \text{fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & & & & \\
 h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
 N^\circ & \text{fila} & \text{condición} & \text{de} & \text{borde} & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 m_0 \\
 m_1 \\
 m_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 m_{n-1} \\
 m_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mu_0 \\
 \mu_1 \\
 \mu_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \mu_{n-1} \\
 \mu_n
 \end{bmatrix}$$

Ahora, se construye la Spline de la siguiente forma:

$$S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x - x_k) + S_{k,2}(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x - x_k)^3 \quad \text{donde}$$

$$S_{k,0} = y_k \quad S_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{3} \quad S_{k,2} = m_k \quad S_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{3h_k}$$

5.2 Problemas

- Por las fuertes lluvias que se pronostican para el mes de Mayo, se desean hacer arreglos en la carretera Camino Rural para evitar inundaciones, pero el maestro que diseñó la carretera era de la Universidad del Barrio, y perdió los planos. El gerente, desesperado, llama a un ingeniero amigo suyo, y le plantea el problema. El ingeniero sabe muy bien que hacer. Le pide al gerente una tabla de datos tomados en los Portales de Peaje que indiquen tiempo y posición de un vehículo. La tabla que el gerente le entrega es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ x & 0 & 225 & 383 & 623 & 1001 \\ y & 0 & 9 & 25 & 64 & 121 \\ y' & 0 & & & & 22 \end{bmatrix}$$

Haga lo que un ingeniero haría.

Hint: Use Spline Cúbica y Polinomio de Newton

- Dibuje con Spline Cúbica el contorno del lindo automovil rojo de la fotografía.



- La empresa Ferrari realiza pruebas de su nuevo modelo "Relampago McKing", por lo que se han tomado los siguientes datos:

$$\begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 \\ \text{Velocidad [\frac{km}{h}]} & 0 & 63 & 108 \end{bmatrix}$$

- Calcule la velocidad en función del tiempo.
- Aproxime la distancia en los puntos $t = 3$ y $t = 5$.

- Para la función:

$$f(x) = x \ln(x)$$

- Determine la spline sujeta $S_S(x)$ considerando los puntos de interpolación equi-espaciados: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.
- Cuales son los valores de extrapolación que entregan estas splines en los puntos 1.5, 2.5, 3.5. Cuál es el error relativo de la extrapolación mediante spline sujeta ?
- Aproxime $\int_1^4 f(x)dx$ mediante $\int_1^4 S_S(x)dx$. Cuál es el error relativo de esta aproximación mediante spline sujeta ?

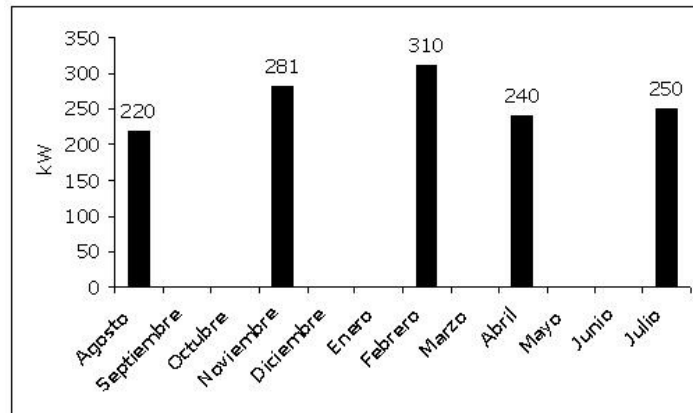
- Un spline cúbico sujeto S de la función f en el intervalo $[0, 2]$ está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + b_0x + 2x^2 - 2x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 1 + b_1(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Aplicando las condiciones para determinar el spline $S(x)$ obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

6. Interpolacion

El gasto de luz de la Sra. Raquel durante el año 2005 y 2006 está dado en el siguiente gráfico:



Ella lleva con mucho orden sus gastos anuales, pero lamentablemente se le manchó la información del año 2005 y 2006, borrándose la información de los meses de septiembre, octubre, diciembre, enero, marzo, mayo, junio.

La Sra. Raquel nos pidió que la ayudáramos a encontrar los valores borrados. Para ello:

- Plantee el SEL para calcular la Spline Cúbica que interpola los puntos en el gráfico. Resuélvalo mediante el método de Crout. Cual spline conviene utilizar en este caso ?
- Determine la Spline Cúbica que interpola los puntos que se conocen.
- Encuentre el polinomio de interpolación para los puntos del gráfico. Puede utilizar cualquiera de los 3 métodos que conoce (Vandermonde, Lagrange o Newton), pero explique su selección (considere que tiene que hacer 7 evaluaciones del polinomio encontrado).
- Compare los polinomios interpolantes calculados en las partes anteriores sumando el gasto de los 12 meses de la Sra. Raquel. El gasto real anual es de 270kW, encuentre el error absoluto y relativo de ambas interpolaciones. Comente.

7. Para interpolar una función $f(x)$ en los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ se utilizará una spline cuadrática $S(x)$ definida por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

- Determine la cantidad de ecuaciones que se necesitan para obtener en forma única un spline cuadrático que interpola los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.
Determine las condiciones que debe verificar el spline cuadrático.
- Determine las ecuaciones que debe verificar el spline cuadrático y construya un único sistema lineal para todos los coeficientes a_j, b_j, c_j para $j = 0, 1$.
- Calcule el spline cuadrático definido por los puntos $(0, 1), (1, 2), (2, 0)$. Para esto, construya la función de Gauss-Seidel para resolver el sistema. Determine si el método converge. Resuelva el sistema lineal mediante el método de Gauss-Seidel.
- Como puede calcular el error del spline cuadrático ? Explique en detalle.
- Compare el spline cuadrático calculado en (c) con el polinomio de interpolación de Lagrange considerando:
 - Complejidad de construcción
 - Errores de punto flotante
 - Aproximación de $\int_0^2 f(x)dx$ y $\frac{df}{dx}(x)$ en los puntos 0, 1, 2. Compare los resultados si

$$f(x) = 1 + \sin \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x}{2}(x - 1)$$

Obs: $\int_0^2 \sin \frac{\pi x^2}{2} dx \approx 0.343\,415\,678\,363\,698\,242\,20$

5.3 Respuestas

1. Primero se construye un Spline cúbico $S_x(t)$ el cual depende de $S_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, donde

$$S_x(t) = \begin{cases} S_0(t) = S_{0,0} + S_{0,1}(t-0) + S_{0,2}(t-0)^2 + S_{0,3}(t-0)^3 & t \in [0, 3] \\ S_1(t) = S_{1,0} + S_{1,1}(t-3) + S_{1,2}(t-3)^2 + S_{1,3}(t-3)^3 & t \in [3, 5] \\ S_2(t) = S_{2,0} + S_{2,1}(t-5) + S_{2,2}(t-5)^2 + S_{2,3}(t-5)^3 & t \in [5, 8] \\ S_3(t) = S_{3,0} + S_{3,1}(t-8) + S_{3,2}(t-8)^2 + S_{3,3}(t-8)^3 & t \in [8, 10] \end{cases}$$

La matriz es

$$\begin{bmatrix} 1^\circ & \text{Condicion} & \text{de} & \text{borde} & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 2^\circ & \text{Condicion} & \text{de} & \text{borde} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 = 3(d_1 - d_0) \\ \mu_2 = 3(d_2 - d_1) \\ \mu_3 = 3(d_3 - d_2) \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes son

$$\begin{aligned} h_0 &= 3 - 0 = 3 & d_0 &= \frac{225-0}{3} = 75 \\ h_1 &= 5 - 3 = 2 & d_1 &= \frac{383-225}{2} = 79 \\ h_2 &= 8 - 5 = 3 & d_2 &= \frac{623-383}{3} = 80 \\ h_3 &= 11 - 8 = 3 & d_3 &= \frac{1001-623}{3} = 126 \end{aligned}$$

Reemplazando en la matriz es

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 12 \\ 3 \\ 138 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

C.B: Spline Natural

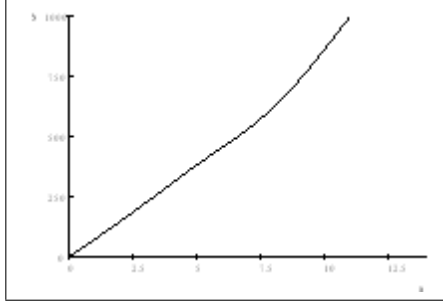
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \\ 138 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{116}{59} \\ -\frac{226}{59} \\ \frac{735}{59} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{k,0} = y_k \quad S_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{3} \quad S_{k,2} = m_k \quad S_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{3h_k}$$

$$S_x(t) = \begin{cases} S_0(t) = 0 + \left(75 - \frac{3(2 \times 0 + \frac{116}{59})}{3}\right)(t-0) + 0 \times (t-0)^2 + \frac{\frac{116}{59} - 0}{3 \times 3}(t-0)^3 & t \in [0, 3] \\ S_1(t) = 225 + \left(79 - \frac{2(2 \times \frac{116}{59} - \frac{226}{59})}{3}\right)(t-3) + \frac{116}{59}(t-3)^2 + \frac{-\frac{226}{59} - \frac{116}{59}}{3 \times 2}(t-3)^3 & t \in [3, 5] \\ S_2(t) = 383 + \left(80 - \frac{3(2 \times (-\frac{226}{59}) + \frac{735}{59})}{3}\right)(t-5) + \left(-\frac{226}{59}\right)(t-5)^2 + \frac{\frac{735}{59} + \frac{226}{59}}{3 \times 3}(t-5)^3 & t \in [5, 8] \\ S_3(t) = 623 + \left(126 - \frac{3(2 \times \frac{735}{59} + 0)}{3}\right)(t-8) + \frac{735}{59} \times (t-8)^2 + \frac{0 - \frac{735}{59}}{3 \times 3}(t-8)^3 & t \in [8, 11] \end{cases}$$

$$S_x(t) = \begin{cases} \frac{4309}{59}t + \frac{116}{531}t^3 & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 \\ \frac{2422}{59}t + \frac{629}{59}t^2 - \frac{57}{59}t^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 \\ \frac{44}{177}t - \frac{5483}{177}t^2 + \frac{961}{59}t^3 - \frac{167267}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 \\ \frac{2695}{59}t^2 - 364t - \frac{245}{177}t^3 + \frac{233695}{177} & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 \end{cases}$$

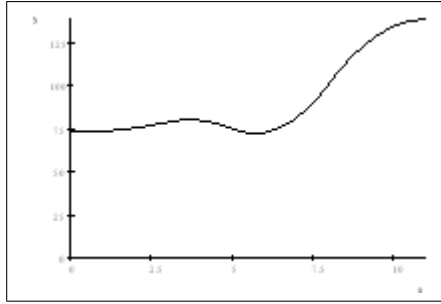
$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(3) &= 225 \\ S(5) &= 383 \\ S(8) &= 623 \\ S(11) &= 1001 \end{aligned}$$



$S_x(t)$

$$D_x(t) = \begin{cases} \frac{116}{177}t^2 + \frac{4309}{59} & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 \\ \frac{1258}{59}t - \frac{171}{59}t^2 + \frac{2422}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 \\ -\frac{10966}{177}t + \frac{961}{177}t^2 + \frac{44116}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 \\ \frac{5390}{59}t - \frac{245}{59}t^2 - 364 & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 \end{cases}$$

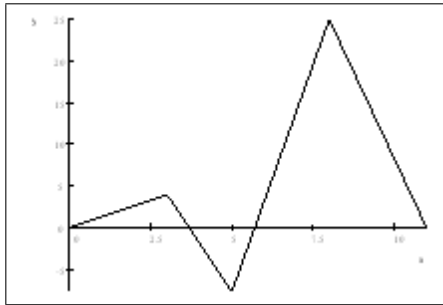
$$\begin{aligned} D(0) &= \frac{17807}{241} \approx 73.888 \\ D(3) &= \frac{18611}{241} \approx 77.224 \\ D(5) &= \frac{19359}{241} \approx 80.328 \\ D(8) &= \frac{18804}{241} \approx 78.025 \\ D(11) &= \frac{87909}{1205} \approx 72.954 \end{aligned}$$



$D_x(t) = \frac{dS_x(t)}{dt}$

$$F_x(t) = \begin{cases} \frac{232}{177}t & \text{if } 0 \leq t \wedge t \leq 3 \\ -\frac{342}{59}t + \frac{1258}{59} & \text{if } 3 \leq t \wedge t \leq 5 \\ \frac{1922}{177}t - \frac{10966}{177} & \text{if } 5 \leq t \wedge t \leq 8 \\ -\frac{490}{59}t + \frac{5390}{59} & \text{if } 8 \leq t \wedge t \leq 11 \end{cases}$$

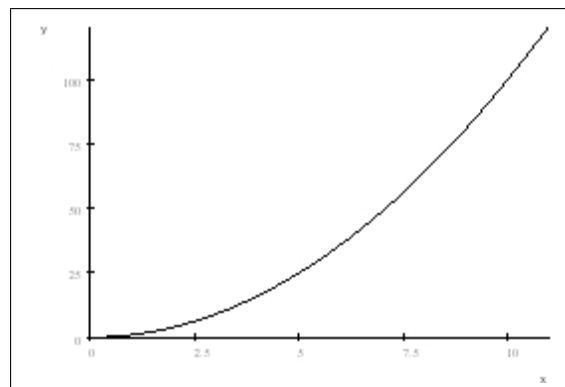
$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(3) &= \frac{232}{59} \approx 3.9322 \\ F(5) &= -\frac{452}{59} \approx -7.661 \\ F(8) &= \frac{1470}{59} \approx 24.915 \\ F(11) &= 0 \end{aligned}$$



$F_x(t) = \frac{d^2S_x(t)}{dt^2}$

Luego, para la coordenada y hacemos una interpolación de Newton

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & y'(0) = 0 & \frac{3-0}{3-0} = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9-0}{3-0} = 3 & \frac{5-0}{5-0} = 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 9 & \frac{25-9}{5-3} = 8 & \frac{13-8}{8-3} = 1 & 0 & 0 & & \\ 5 & 25 & \frac{64-25}{8-5} = 13 & \frac{19-13}{11-5} = 1 & 0 & & & \\ 8 & 64 & \frac{121-64}{11-8} = 19 & \frac{22-19}{11-8} = 1 & & & & \\ 11 & 121 & y'(11) = 22 & & & & & \\ 11 & 121 & & & & & & \end{bmatrix}$$



$$y(t) = 0 + 0 \times t + 1t^2 + 0 = t^2$$

despejando $t \Rightarrow t = \sqrt{y}$

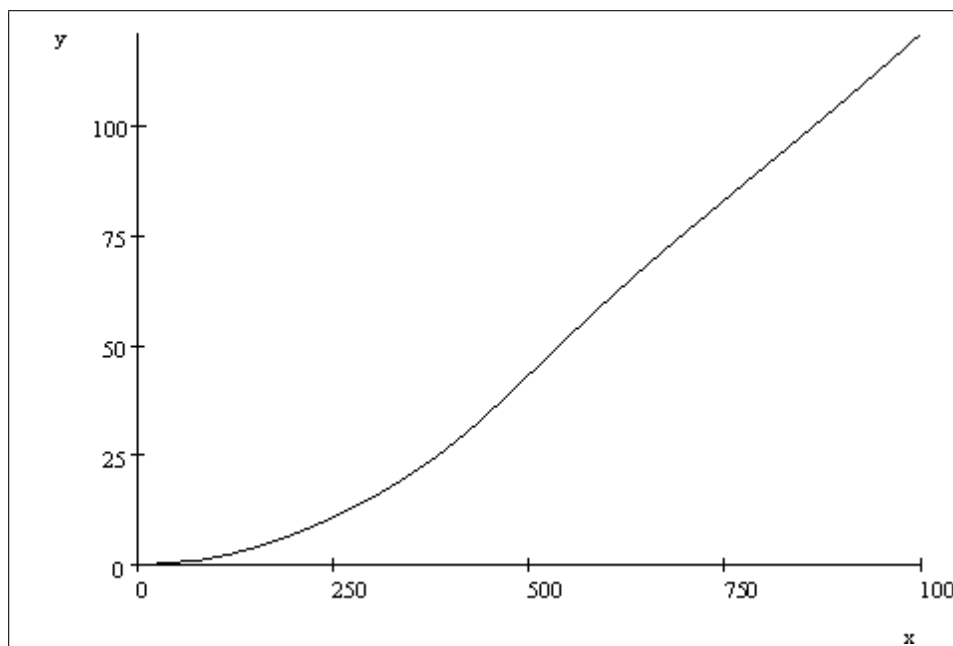
reemplazando en $S_x(t)$

$$S_x(t) = S_x(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{4309}{59}\sqrt{y} + \frac{116}{531}\sqrt{y}^3 & \text{if } 0 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 3 \\ \frac{2422}{59}\sqrt{y} + \frac{629}{59}\sqrt{y}^2 - \frac{57}{59}\sqrt{y}^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 3 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 5 \\ \frac{44116}{177}\sqrt{y} - \frac{5483}{177}\sqrt{y}^2 + \frac{961}{531}\sqrt{y}^3 - \frac{167267}{531} & \text{if } 5 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 8 \\ \frac{2695}{59}\sqrt{y}^2 - 364\sqrt{y} - \frac{245}{177}\sqrt{y}^3 + \frac{233695}{177} & \text{if } 8 \leq \sqrt{y} \wedge \sqrt{y} \leq 11 \end{cases}$$

transformando en una función que depende de y :

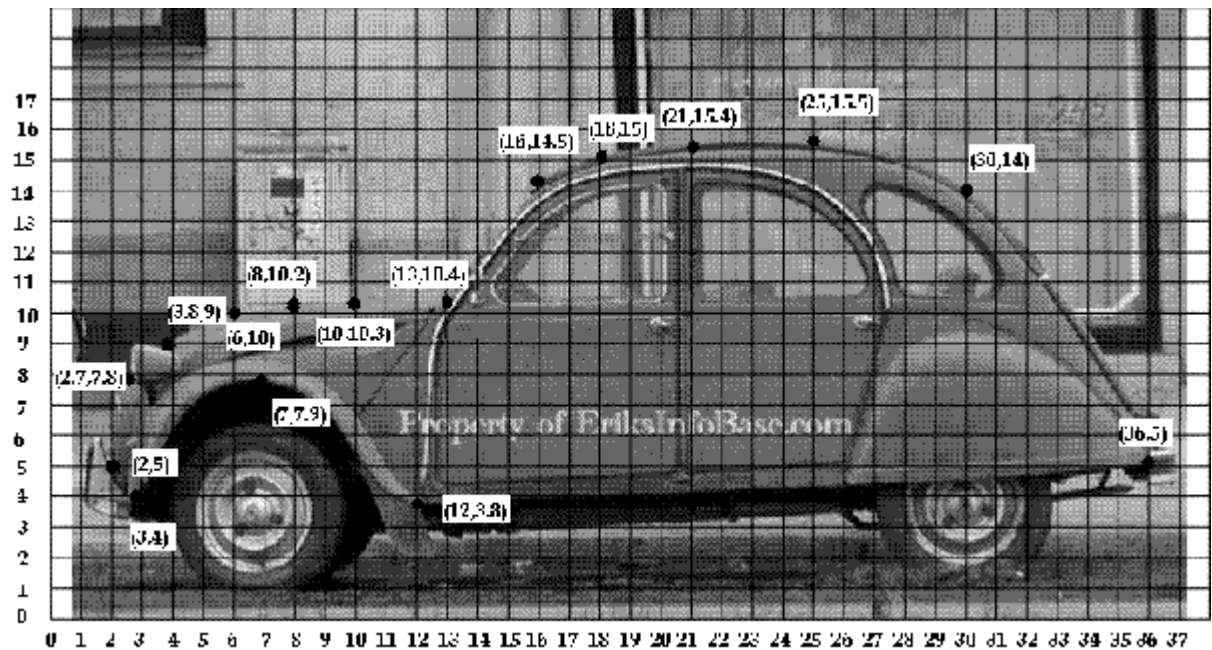
$$\Rightarrow S_x(y) = \begin{cases} \frac{4309}{59}\sqrt{y} + \frac{116}{531}\sqrt{y}^3 & \text{if } 0 \leq y \wedge y \leq 9 \\ \frac{2422}{59}\sqrt{y} + \frac{629}{59}y - \frac{57}{59}\sqrt{y}^3 + \frac{1887}{59} & \text{if } 9 \leq y \wedge y \leq 25 \\ \frac{44116}{177}\sqrt{y} - \frac{5483}{177}y + \frac{961}{531}\sqrt{y}^3 - \frac{167267}{531} & \text{if } 25 \leq y \wedge y \leq 64 \\ \frac{2695}{59}y - 364\sqrt{y} - \frac{245}{177}\sqrt{y}^3 + \frac{233695}{177} & \text{if } 64 \leq y \wedge y \leq 121 \end{cases}$$

Graficando en un plano xy se obtiene el plano pedido.



2. Spline Cúbica

(a) Primero, la toma de datos se realiza usando una grilla cuadrículada sobre la fotografía:



(b) Luego, los datos se tabulan. Tabulemos los datos del contorno superior

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	2	2.7	3.8	6	8	10	13	16	18	21	25	30	36
y	5	7.8	9	10	10.2	10.3	10.4	14.5	15	15.4	15.5	14	5

(c) Ahora se calculan los elementos de la matriz:

$$h_k = x_{k+1} - x_k, d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}, \mu_k = 3(d_k - d_{k-1})$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ h_k & 0.7 & 1.1 & 2.2 & 2 \\ d_k & \frac{2.8}{0.7} = 4 & \frac{1.2}{1.1} = \frac{12}{11} & \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} & \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10} \\ \mu_k & & 3 \times (\frac{12}{11} - 4) = -\frac{96}{11} & 3 \times (\frac{5}{11} - \frac{12}{11}) = -\frac{21}{11} & 3 \times (\frac{1}{10} - \frac{5}{11}) = -\frac{117}{110} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 4 & 5 & 6 & 7 \\ h_k & 2 & 3 & 3 & 2 \\ d_k & \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20} & \frac{0.1}{3} = \frac{1}{30} & \frac{4.1}{3} = \frac{41}{30} & \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{1}{20} - \frac{1}{10}) = -\frac{3}{20} & 3 \times (\frac{1}{30} - \frac{1}{20}) = -\frac{1}{20} & 3 \times (\frac{41}{30} - \frac{1}{30}) = 4 & 3 \times (\frac{1}{4} - \frac{41}{30}) = -\frac{67}{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & 8 & 9 & 10 & 11 \\ h_k & 3 & 4 & 5 & 6 \\ d_k & \frac{0.4}{3} = \frac{2}{15} & \frac{0.1}{4} = \frac{1}{40} & -\frac{1.5}{5} = -\frac{3}{10} & -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \\ \mu_k & 3 \times (\frac{2}{15} - \frac{1}{4}) = -\frac{7}{20} & 3 \times (\frac{1}{40} - \frac{2}{15}) = -\frac{13}{40} & 3 \times (-\frac{3}{10} - \frac{1}{40}) = -\frac{39}{40} & 3 \times (-\frac{3}{2} + \frac{3}{10}) = -\frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

- (d) Usando las condiciones de borde de la Spline Natural, ie, $S''(x_0) = 0$, $S''(x_n) = 0$, y reemplazando valores, el sistema queda:

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{18}{5} & \frac{11}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & \frac{33}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{42}{5} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 14 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 22 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{96}{11} \\ -\frac{21}{11} \\ -\frac{11}{11} \\ -\frac{117}{110} \\ -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{20} \\ 4 \\ -\frac{67}{20} \\ -\frac{7}{20} \\ -\frac{13}{20} \\ -\frac{40}{39} \\ -\frac{40}{18} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (f) Reesolviendo el sistema, y luego aproximando con 4 cifras significativas con redondeo

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{110884705363}{44676774692} \\ \frac{23196354987}{122861130403} \\ -\frac{189901004815}{982889043224} \\ \frac{70738032441}{982889043224} \\ -\frac{416919507977}{2457222608060} \\ \frac{167847444871}{335075810190} \\ -\frac{3690926192477}{7371667824180} \\ \frac{1136243352281}{14743335648360} \\ -\frac{146574685819}{3685833912090} \\ \frac{89412083}{670151620380} \\ -\frac{2412992893783}{14743335648360} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2.482 \\ 0.1888 \\ -0.1932 \\ 0.07197 \\ -0.1697 \\ 0.5009 \\ -0.5007 \\ 0.07707 \\ -0.03977 \\ 0.0001334 \\ -0.1637 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (g) Construyendo la Spline:

$$S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x - x_k) + S_{k,2}(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x - x_k)^3$$

$$S_{k,0} = y_k \quad S_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{3} \quad S_{k,2} = m_k \quad S_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{3 \times h_k}$$

k	0	1	2	3	4	5	6
x	2	2.7	3.8	6	8	10	13
y	5	7.8	9	10	10.2	10.3	10.4
h_k	0.7	1.1	2.2	2	2	3	3
d_k	4	1.091	0.4545	0.1	0.05	0.03333	1.367
m_k	0	-2.482	0.1888	-0.1932	0.07197	-0.1697	0.5009

k	7	8	9	10	11	12
x	16	18	21	25	30	36
y	14.5	15	15.4	15.5	14	5
h_k	2	3	4	5	6	
d_k	0.25	0.1333	0.025	-0.3	-1.5	
m_k	-0.5007	0.07707	-0.03977	0.0001334	-0.1637	0

- i. $k = 0$

$$S_0(x) = 5 + \left(4 - \frac{0.7 \times (2 \times 0 - 2.482)}{3}\right) \times (x - 2) + 0 \times (x - 2)^2 + \frac{-2.482 - 0}{3 \times 0.7} \times (x - 2)^3$$

$$\Rightarrow S_0(x) = 7.091x^2 - 9.604x - 1.182x^3 + 5.297$$
- ii. $k = 1$

$$S_1(x) = 7.8 + \left(1.091 - \frac{1.1 \times (2 \times (-2.482) + 0.1888)}{3}\right) \times (x - 2.7) - 2.482 \times (x - 2.7)^2 + \frac{0.1888 + 2.482}{3 \times 1.1} \times (x - 2.7)^3$$

$$\Rightarrow S_1(x) = 33.94x - 9.038x^2 + 0.8093x^3 - 33.9$$
- iii. $k = 2$

$$S_2(x) = 9 + \left(0.4545 - \frac{2.2 \times (2 \times 0.1888 - 0.1932)}{3}\right) \times (x - 3.8) + 0.1888 \times (x - 3.8)^2 + \frac{-0.1932 - 0.1888}{3 \times 2.2} \times (x - 3.8)^3$$

$$\Rightarrow S_2(x) = 0.8486x^2 - 3.623x - 0.05788x^3 + 13.69$$
- iv. $k = 3$

$$S_3(x) = 10 + \left(0.1 - \frac{2 \times (2 \times (-0.1932) + 0.07197)}{3}\right) \times (x - 6) - 0.1932 \times (x - 6)^2 + \frac{0.07197 + 0.1932}{3 \times 2} \times (x - 6)^3$$

$$\Rightarrow S_3(x) = 7.401x - 0.9887x^2 + 0.0442x^3 - 8.359$$
- v. $k = 4$

$$S_4(x) = 10.2 + \left(0.05 - \frac{2 \times (2 \times 0.07197 - 0.1697)}{3}\right) \times (x - 8) + 0.07197 \times (x - 8)^2 + \frac{-0.1697 - 0.07197}{3 \times 2} \times (x - 8)^3$$

$$\Rightarrow S_4(x) = 1.039x^2 - 8.818x - 0.04028x^3 + 34.89$$
- vi. $k = 5$

$$S_5(x) = 10.3 + \left(0.03333 - \frac{3 \times (2 \times (-0.1697) + 0.5009)}{3}\right) \times (x - 10) - 0.1697 \times (x - 10)^2 + \frac{0.5009 + 0.1697}{3 \times 3} \times (x - 10)^3$$

$$\Rightarrow S_5(x) = 25.62x - 2.405x^2 + 0.07451x^3 - 79.9$$
- vii. $k = 6$

$$S_6(x) = 10.4 + \left(1.367 - \frac{3 \times (2 \times 0.5009 - 0.5007)}{3}\right) \times (x - 13) + 0.5009 \times (x - 13)^2 + \frac{-0.5007 - 0.5009}{3 \times 3} \times (x - 13)^3$$

$$\Rightarrow S_6(x) = 4.841x^2 - 68.58x - 0.1113x^3 + 328.3$$
- viii. $k = 7$

$$S_7(x) = 14.5 + \left(0.25 - \frac{2 \times (2 \times (-0.5007) + 0.07707)}{3}\right) \times (x - 16) - 0.5007 \times (x - 16)^2 + \frac{0.07707 + 0.5007}{3 \times 2} \times (x - 16)^3$$

$$\Rightarrow S_7(x) = 90.84x - 5.123x^2 + 0.0963x^3 - 522$$
- ix. $k = 8$

$$S_8(x) = 15 + \left(0.1333 - \frac{3 \times (2 \times 0.07707 - 0.03977)}{3}\right) \times (x - 18) + 0.07707 \times (x - 18)^2 + \frac{-0.03977 - 0.07707}{3 \times 3} \times (x - 18)^3$$

$$\Rightarrow S_8(x) = 0.7781x^2 - 15.37x - 0.01298x^3 + 115.3$$
- x. $k = 9$

$$S_9(x) = 15.4 + \left(0.025 - \frac{4 \times (2 \times (-0.03977) + 0.0001334)}{3}\right) \times (x - 21) - 0.03977 \times (x - 21)^2 + \frac{0.0001334 + 0.03977}{3 \times 4} \times (x - 21)^3$$

$$\Rightarrow S_9(x) = 6.201x - 0.2493x^2 + 0.003325x^3 - 35.68$$
- xi. $k = 10$

$$S_{10}(x) = 15.5 + \left(-0.3 - \frac{5 \times (2 \times (0.0001334) - 0.1637)}{3}\right) \times (x - 25) + 0.0001334 \times (x - 25)^2 + \frac{-0.1637 - 0.0001334}{3 \times 5} \times (x - 25)^3$$

$$\Rightarrow S_{10}(x) = 0.8193x^2 - 20.51x - 0.01092x^3 + 186.9$$
- xii. $k = 11$

$$S_{11}(x) = 14 + \left(-1.5 - \frac{6 \times (2 \times (-0.1637) + 0)}{3}\right) \times (x - 30) - 0.1637 \times (x - 30)^2 + \frac{0 + 0.1637}{3 \times 6} \times (x - 30)^3$$

$$\Rightarrow S_{11}(x) = 33.53x - 0.9822x^2 + 0.009094x^3 - 353.5$$

(h) Luego, la Spline Cúbica es

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{if } 2 \leq x \wedge x \leq 2.7 \\ S_1(x) & \text{if } 2.7 \leq x \wedge x \leq 3.8 \\ S_2(x) & \text{if } 3.8 \leq x \wedge x \leq 6 \\ S_3(x) & \text{if } 6 \leq x \wedge x \leq 8 \\ S_4(x) & \text{if } 8 \leq x \wedge x \leq 10 \\ S_5(x) & \text{if } 10 \leq x \wedge x \leq 13 \\ S_6(x) & \text{if } 13 \leq x \wedge x \leq 16 \\ S_7(x) & \text{if } 16 \leq x \wedge x \leq 18 \\ S_8(x) & \text{if } 18 \leq x \wedge x \leq 21 \\ S_9(x) & \text{if } 21 \leq x \wedge x \leq 25 \\ S_{10}(x) & \text{if } 25 \leq x \wedge x \leq 30 \\ S_{11}(x) & \text{if } 30 \leq x \wedge x \leq 36 \end{cases}$$

(i) Ahora, tabulando los datos de la parte inferior del escarabajo, interpolamos por trazos usando polinomios de 1° y 2° grado:

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 3 & 7 & 12 & 36 \\ y & 5 & 4 & 7.9 & 3.8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(j) f_0(x) = 5 \frac{(x-3)}{2-3} + 4 \frac{(x-2)}{3-2} = 7 - x \\ \Rightarrow f_0(x) = 7 - x$$

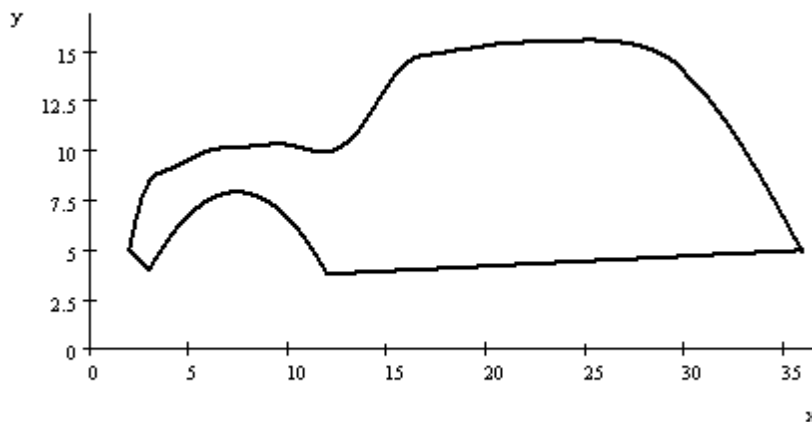
$$(k) f_1(x) = 4 \frac{(x-7)(x-12)}{(3-7)(3-12)} + 7.9 \frac{(x-3)(x-12)}{(7-3)(7-12)} + 3.8 \frac{(x-3)(x-7)}{(12-3)(12-7)} = 2.969x - 0.1994x^2 - 3.113 \\ \Rightarrow f_1(x) = 2.969x - 0.1994x^2 - 3.113$$

$$(l) f_2(x) = 3.8 \frac{(x-36)}{(12-36)} + 5 \frac{(x-12)}{(36-12)} = 0.05x + 3.2 \\ \Rightarrow f_2(x) = 0.05x + 3.2$$

(m) Luego, esta función por trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{if } 2 \leq x \wedge x \leq 3 \\ f_1(x) & \text{if } 3 \leq x \wedge x \leq 12 \\ f_2(x) & \text{if } 12 \leq x \wedge x \leq 36 \end{cases}$$

(n) Finalmente, el gráfico de $S(x)$ y $f(x)$ es:



3. Relampago McKing

$$\begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 \\ \text{Velocidad } [\frac{km}{h}] & 0 & 63 & 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tiempo [s]} & 0 & 3 & 5 \\ \text{Velocidad } [\frac{m}{s}] & 0 & \frac{63000}{3600} = \frac{35}{2} & \frac{108000}{3600} = 30 \end{bmatrix}$$

(a) Usemos interpolación de Lagrange

$$\begin{bmatrix} t_i & v(t_i) & v[t_i, t_{i+1}] & v[t_i, \dots, t_{i+2}] \\ 0 & 0 & \frac{\frac{35}{2}-0}{3-0} = \frac{35}{6} & \frac{\frac{25}{4}-\frac{35}{6}}{5-0} = \frac{1}{12} \\ 3 & \frac{35}{2} & \frac{30-\frac{35}{2}}{5-3} = \frac{25}{4} & \\ 5 & 30 & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v(t) = 0 + \frac{35}{6}t + \frac{1}{12}t(t-3) = \frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2$$

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (\frac{67}{12}t + \frac{1}{12}t^2) = \frac{67}{24}t^2 + \frac{1}{36}t^3$$

$$d(0) = 0$$

$$d(3) = \frac{67}{24}3^2 + \frac{1}{36}3^3 = \frac{207}{8} = 25.875$$

$$d(5) = \frac{67}{24}5^2 + \frac{1}{36}5^3 = \frac{5275}{72} \approx 73.264$$

(b) Usemos interpolación con Spline Cuadrática

$$x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 5$$

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{35}{2} = 17.5, f(x_2) = 30$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(x_1 - x_0) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17.5 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{pero } a_0 = f(x_0) = 0 \text{ y } a_1 = f(x_1) = 17.5$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 30 - 17.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{pero } c_0 = c_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5833 \\ 8.3333 \times 10^{-2} \\ 6.0833 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego, } S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2$$

$$S_0(x) = 5.5833x + 8.3333 \times 10^{-2}x^2$$

$$S_1(x) = 17.5 + 6.0833(x - 3) + 8.3333 \times 10^{-2}(x - 3)^2$$

$$d(3) = \int_0^3 (5.5833x + 8.3333 \times 10^{-2}x^2)dx = 25.874847$$

$$d(5) = 25.874847 + \int_3^5 (17.5 + 6.0833(x - 3) + 8.3333 \times 10^{-2}(x - 3)^2)dx$$

$$d(5) \approx 74.819$$

4. Spline Cúbica

(a) Spline Sujeta: $f(x) = x \ln(x)$, $f'(x) = \ln(x) + 1$

$$\begin{array}{l} \text{i.} \quad \begin{array}{llllll} x_0 = 1 & f(x_0) = 0 & f'(x_0) = 1 & h_0 = 1 & d_0 = 1, 39 - 0 = 1, 39 \\ x_1 = 2 & f(x_1) = 1, 39 & f'(x_1) = 1, 69 & h_1 = 1 & d_1 = 3, 30 - 1, 39 = 1, 91 \\ x_2 = 3 & f(x_2) = 3, 30 & f'(x_2) = 2, 10 & h_2 = 1 & d_2 = 5, 55 - 3, 30 = 2, 25 \\ x_3 = 4 & f(x_3) = 5, 55 & f'(x_3) = 2, 39 \end{array} \end{array}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{bmatrix} 2h_0 & h_1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & h_2 & 2h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 = 3(d_0 - f'(x_0)) \\ \mu_1 = 3(d_1 - d_0) \\ \mu_2 = 3(d_2 - d_1) \\ \mu_3 = 3(f'(x_3) - d_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{iii.} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1, 39 - 1) = 1, 17 \\ 3(1, 91 - 1, 39) = 1, 56 \\ 3(2, 25 - 1, 91) = 1, 02 \\ 3(2, 39 - 2, 25) = 0, 42 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv.} \quad \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 469 \\ 0, 231 \\ 0, 165 \\ 0, 127 \end{bmatrix}$$

Ahora, se construye la Spline de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{v.} \quad S_k(x) = S_{k,0} + S_{k,1}(x - x_k) + S_{k,2}(x - x_k)^2 + S_{k,3}(x - x_k)^3 \quad \text{donde} \\ \quad S_{k,0} = y_k \quad S_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2c_k + c_{k+1})}{3} \quad S_{k,2} = c_k \quad S_{k,3} = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \\ \text{vi.} \quad S_0(x) = 0 + (1,39 - \frac{1}{3}(2 \times 0,469 + 0,231))(x - 1) + 0,469(x - 1)^2 + \frac{0,231 - 0,469}{3}(x - 1)^3 \\ \quad = (x - 1) + 0,469(x - 1)^2 - 0,0793(x - 1)^3 \\ \text{vii.} \quad S_1(x) = 1,39 + (1,91 - \frac{1}{3}(2 \times 0,231 + 0,165))(x - 2) + 0,231(x - 2)^2 + \frac{0,165 - 0,231}{3}(x - 2)^3 \\ \quad = 1,39 + 1,7(x - 2) + 0,231(x - 2)^2 - 0,022(x - 2)^3 \\ \text{viii.} \quad S_2(x) = 3,3 + (2,25 - \frac{1}{3}(2 \times 0,165 + 0,127))(x - 3) + 0,165(x - 3)^2 + \frac{0,127 - 0,165}{3}(x - 3)^3 \\ \quad = 3,3 + 2,1(x - 3) + 0,165(x - 3)^2 - 0,0127(x - 3)^3 \\ \text{ix.} \quad S(x) = \begin{cases} (x - 1) + 0,469(x - 1)^2 - 0,0793(x - 1)^3 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1,39 + 1,7(x - 2) + 0,231(x - 2)^2 - 0,022(x - 2)^3 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 3,3 + 2,1(x - 3) + 0,165(x - 3)^2 - 0,0127(x - 3)^3 & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases} \end{array}$$

(b) Extrapolación

$$\begin{array}{l} \text{i.} \quad S(1.5) = S_0(1.5) = 0.6073375 \implies E_r = \frac{|S_0(1.5) - f(1.5)|}{|f(1.5)|} = \frac{|0.6073375 - 0.6081976622|}{|0.6081976622|} = 1.41 \times 10^{-3} \\ \text{ii.} \quad S(2.5) = S_1(2.5) = 2.295 \implies E_r = \frac{|S_1(2.5) - f(2.5)|}{|f(2.5)|} = \frac{|2.295 - 2.29072683|}{|2.29072683|} = 1.87 \times 10^{-3} \\ \text{iii.} \quad S(3.5) = S_2(3.5) = 4.3896625 \implies E_r = \frac{|S_2(3.5) - f(3.5)|}{|f(3.5)|} = \frac{|4.3896625 - 4.38467039|}{|4.38467039|} = 1.14 \times 10^{-3} \end{array}$$

(c) Integral

$$\begin{array}{l} \text{i.} \quad \int_1^4 S(x)dx = \int_1^2 S_0(x)dx + \int_2^3 S_1(x)dx + \int_3^4 S_2(x)dx \\ \quad = \left[\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{0,469}{3}(x - 1)^3 - \frac{0,0793}{4}(x - 1)^4 \right]_1^2 \\ \quad + \left[1,39x + \frac{1,7}{2}(x - 2)^2 + \frac{0,231}{3}(x - 2)^3 - \frac{0,022}{4}(x - 2)^4 \right]_2^3 \\ \quad + \left[3,3x + \frac{2,1}{2}(x - 3)^2 + \frac{0,165}{3}(x - 3)^3 - \frac{0,0127}{4}(x - 3)^4 \right]_3^4 \\ \quad = 0.63650833 + 2.3115 + 4.401825 = 7.34983333 \\ \text{ii.} \quad \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 x \ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^4 = 8 \ln 4 - 4 - 0 + \frac{1}{4} = 7.3403549 \\ \text{iii.} \quad E_r = \frac{|\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 S(x)dx|}{|\int_1^4 f(x)dx|} = \frac{|7.3403549 - 7.34983333|}{|7.3403549|} = 1.29 \times 10^{-3} \end{array}$$

5. Interpolación Polinomial por Spline:

Un spline cúbico sujeto S

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + b_0x + 2x^2 - 2x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 1 + b_1(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

aplicando las condiciones de $S(x)$:

(a) continuidad: $S_0(1) = S_1(1)$

$$1 + b_0 = 1 \implies b_0 = 0$$

(b) continuidad de la derivada: $S'_0(1) = S'_1(1)$

$$4 - 6 = b_1 - 8(1-1) + 21(1-1)^2 \implies b_1 = -2$$

(c) Luego, como S es un spline cúbico sujeto:

$$f'(0) = S'(0) = S'_0(0) = b_0 = 0$$

$$f'(2) = S'(2) = S'_1(2) = b_1 - 8(2-1) + 21(2-1)^2 = -2 - 8 + 21 = 11$$

6. Interpolacion

(a) Sistema para la contruccion de la Spline:

i. Libre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Crout:

$$l_{11} = 1$$

$$u_{12} = 0$$

$$l_{21} = 3$$

$$l_{22} = 12$$

$$u_{23} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$l_{32} = 3$$

$$l_{33} = \frac{37}{4} = 9.25$$

$$u_{34} = \frac{8}{37} \approx 0.2162$$

$$l_{43} = 2$$

$$l_{44} = \frac{354}{37} \approx 9.568$$

$$u_{45} = \frac{11}{354} \approx 0.3136$$

$$l_{54} = 0$$

$$l_{55} = 1$$

Entonces:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = Uc$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.667 \\ -13.62 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.667 \\ -13.62 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.542 \\ -16.83 \\ 14.87 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. Sujeta:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Crout:

$$l_{11} = 6$$

$$u_{12} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$l_{21} = 3$$

$$l_{22} = \frac{21}{2} = 10.5$$

$$u_{23} = \frac{6}{21} = 0.2857$$

$$l_{32} = 3$$

$$l_{33} = \frac{192}{21} \approx 9.143$$

$$u_{34} = \frac{42}{192} \approx 0.2188$$

$$l_{43} = 2$$

$$l_{44} = \frac{1836}{192} \approx 9.562$$

$$u_{45} = \frac{576}{1836} \approx 0.3137$$

$$l_{54} = 3$$

$$l_{55} = \frac{9288}{1836} \approx 5.059$$

Entonces:

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.562 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5.059 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2188 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = Uc$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.562 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5.059 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2188 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} -0.979 \\ 1.958 \\ -17.52 \\ 17.65 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

(b) Con los datos obtenidos en la parte anterior la Spline nos queda:

i. Libre:

$$\begin{cases} S_0 = 220 + 18.79(x-1) + 0(x-1)^2 + 0.1713(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 4] \\ S_1 = 281 + 23.42(x-4) + 1.542(x-4)^2 - 2.041(x-4)^3 & \text{si } x \in [4, 7] \\ S_2 = 310 - 22.47(x-7) - 16.83(x-7)^2 + 5.283(x-7)^3 & \text{si } x \in [7, 9] \\ S_3 = 240 - 26.41(x-9) + 14.87(x-9)^2 - 1.652(x-9)^3 & \text{si } x \in [9, 12] \end{cases}$$

ii. Sujeta:

$$\begin{cases} S_0 = 220 + 18.37(x-1) - 0.979(x-1)^2 + 0.3263(x-1)^3 & \text{si } x \in [1, 4] \\ S_1 = 281 + 40.79(x-4) + 1.958(x-4)^2 - 2.164(x-4)^3 & \text{si } x \in [4, 7] \\ S_2 = 310 - 35.17(x-7) - 17.52(x-7)^2 + 5.862(x-7)^3 & \text{si } x \in [7, 9] \\ S_3 = 240 - 14.31(x-9) + 17.65(x-9)^2 - 2.942(x-9)^3 & \text{si } x \in [9, 12] \end{cases}$$

iii. Newton:

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, \dots, x_{k+2}] & f[x_k, \dots, x_{k+3}] \\ 1 & 220 & \frac{281-220}{3} = \frac{61}{3} \approx 20.33 & \frac{9.667-20.33}{7-1} \approx -1.777 & \frac{-8.933+1.777}{9-1} = -0.8945 & \frac{2.075+0.8945}{12-1} \approx 0.27 \\ 4 & 281 & \frac{310-281}{3} = \frac{29}{3} \approx 9.667 & \frac{-35-9.667}{9-4} \approx -8.933 & \frac{7.667+8.933}{12-4} = 2.075 & \\ 7 & 310 & \frac{240-310}{2} = \frac{-70}{2} = -35 & \frac{3.333+35}{12-7} \approx 7.667 & & \\ 9 & 240 & \frac{250-240}{3} = \frac{10}{3} = 3.333 & & & \\ 12 & 250 & & & & \end{bmatrix}$$

Entonces, el polinomio de Newton es:

$$p_N(x) = 220 + 20.33(x-1) - 1.777(x-1)(x-4) - 0.8945(x-1)(x-4)(x-7) + 0.27(x-1)(x-4)(x-7)(x-9)$$

(c) Evaluemos en los meses faltantes:

Spline:

i. Libre:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
<i>Septiembre</i> ($x = 2$)	239
<i>Octubre</i> ($x = 3$)	259
<i>Diciembre</i> ($x = 5$)	303.9
<i>Enero</i> ($x = 6$)	317.7
<i>Marzo</i> ($x = 8$)	276
<i>Mayo</i> ($x = 10$)	226.8
<i>Junio</i> ($x = 11$)	233.4

ii. Sujeta:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
<i>Septiembre</i> ($x = 2$)	237.7
<i>Octubre</i> ($x = 3$)	255.4
<i>Diciembre</i> ($x = 5$)	321.6
<i>Enero</i> ($x = 6$)	353.1
<i>Marzo</i> ($x = 8$)	263.2
<i>Mayo</i> ($x = 10$)	240.4
<i>Junio</i> ($x = 11$)	258.4

Polinomio de Newton:

<i>Mes</i>	<i>kW</i>
<i>Septiembre</i> ($x = 2$)	216
<i>Octubre</i> ($x = 3$)	244.1
<i>Diciembre</i> ($x = 5$)	310
<i>Enero</i> ($x = 6$)	320.9
<i>Marzo</i> ($x = 8$)	284.4
<i>Mayo</i> ($x = 10$)	205.8
<i>Junio</i> ($x = 11$)	199.7

Entonces, el promedio del gasto anual es:

Spline:

i. Libre: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 239 + 259 + 303.9 + 317.7 + 276 + 226.8 + 233.4 \approx 3157$

Promedio: $\frac{3157}{12} \approx 263.1$

ii. Sujeta: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 237.7 + 255.4 + 321.6 + 353.1 + 263.2 + 240.4 + 258.4 \approx 3231$

Promedio: $\frac{3231}{12} = 269.3$

Newton: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 216 + 244.1 + 310 + 320.9 + 284.4 + 205.8 + 199.7 \approx 3082$

Promedio: $\frac{3082}{12} = 256.8$

Entonces, la mejor aproximación es la Spline Sujeta, luego la Spline Libre y finalmente el polinomio de interpolación.

7. Interpolación Polinomial con Spline:

(a) Como solo existen dos intervalos: $[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$, solo se necesitan 2 $S_j(x)$: $S_0(x)$ y $S_1(x)$, y como cada uno tiene 3 constantes que son incógnitas:

- i. $S_0(x) : a_0, b_0, c_0$
 $S_1(x) : a_1, b_1, c_1$

entonces, para encontrar estas 6 incógnitas, se necesitan 6 ecuaciones linealmente independientes.

(b) De forma análoga con la spline cúbica, la spline cuadrada debe cumplir:

- i. Interpolación x_0, x_1 y x_2

$$S_0(x_0) = a_0 + b_0(x_0 - x_0) + c_0(x_0 - x_0)^2 = f(x_0) = y_0$$

$$S_0(x_1) = a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = f(x_1) = y_1$$

$$S_1(x_2) = a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = f(x_2) = y_2$$

- ii. Continuidad: $S_0(x_1) = S_1(x_1)$

$$a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = a_1 + b_1(x_1 - x_1) + c_1(x_1 - x_1)^2 = a_1$$

- iii. Continuidad de la derivada: $S'_0(x_1) = S'_1(x_1)$

$$b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1)$$

- iv. Continuidad de la 2° derivada:

$$2c_0 = 2c_1$$

El sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(x_1 - x_0) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eliminando algunas ecuaciones fáciles de despejar obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ (x_1 - x_0) & 0 & (x_1 - x_0)^2 \\ 1 & -1 & 2(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_1 - y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$c_1 = c_0$$

(c) Reemplazando en $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 0)$ en el sistema anterior y permutando la primera y la segunda fila para no tener elementos nulos en la diagonal se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el método de Gauss-Seidel definimos las siguientes matrices:

$$M = (\text{diag}(A) + \text{low}(A)) \Rightarrow B = -M^{-1}N \text{ y } h = M^{-1}b$$

$$N = -\text{up}(A)$$

Entonces, definimos la iteración del método de Gauss-Seidel como: $x_{(k+1)} = Bx_k + h$

Para nuestro sistema:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

- (d) Para que el método converga es necesario que $\rho(B) < 1$. calculemos los valores propios de B :

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ con multiplicidad } 3$$

$\rho(B) = 0 < 1 \Rightarrow$ el método converge

Tomamos como punto inicial: $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1 = Bx_0 + h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Bx_1 + h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Bx_2 + h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Como $\|x_2 - x_3\| = 0 \Rightarrow$ La solución del sistema es $x = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2.5x - 1.5x^2 & x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 2 - 0.5(x - 1) - 1.5(x - 1)^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

- (e) Como no se conoce nada de la función, sino solo la evaluación de ella en los puntos x_0, x_1 y x_2 , entonces no se puede encontrar alguna cota del error, ya que la función puede ser lo más alejada de nuestra Spline como se quiera. El único error que se podría calcular, serian errores del tipo numérico al calcular la Spline, ya que sabemos cuanto debe valer la Spline en los puntos x_0, x_1 y x_2 , y compararlas con el valor numérico que se obtiene. Además se puede verificar si se cumplen las condiciones de continuidad, de primera y segunda derivada continua.

- (f) Calculemos el polinomio de interpolación:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+2}]$
0	1	$\frac{2-1}{1-0} = 1$	$\frac{-2-1}{2-0} = -\frac{3}{2}$
1	2	$\frac{0-2}{2-1} = -2$	
2	0		

$$\Rightarrow p(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x(x - 1)$$

- i. Complejidad de operaciones

Lagrange: 9 operaciones para calcular las constantes, y 6 operaciones para el polinomio

\Rightarrow 15 operaciones

Spline: 10 operaciones en plantear el sistema. Para calcular B y h se necesitan como mínimo 12 operaciones (son más, pero esa es una cota inferior), y luego cada iteración tiene 5 operaciones, y se hacen 3 iteraciones, mas 12 operaciones para calcular S

\Rightarrow 49 operaciones

Lagrange es más fácil de calcular que la Spline

- ii. Errores de punto flotante

Como la Spline tiene más operaciones, y además invierte matrices, este tiene más errores de punto flotante que calcular el polinomio de Lagrange

- iii. Calculemos los valores reales:

$$\int_0^2 (1 + \sin \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x}{2}(x - 1)) dx \approx 2 + 0.34341567836369824220 - \frac{1}{3} \approx 2.0100823450303649089$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2} - x + \pi x \cos \frac{\pi x^2}{2}$$

$$\frac{df(0)}{dx} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{df(1)}{dx} = \frac{1}{2} - 1 + \pi \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\frac{df(2)}{dx} = \frac{1}{2} - 2 + 2\pi \cos 2\pi = 2\pi - \frac{3}{2} \approx 4.7831853071795864769$$

Calculemos ahora las aproximaciones de Lagrange

$$\int_0^2 (1+x-\frac{3}{2}x(x-1))dx = 3$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = 1 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} - 3x$$

$$\frac{dp(0)}{dx} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{dp(1)}{dx} = 2.5 - 3 = -0.5$$

$$\frac{dp(2)}{dx} = 2.5 - 6 = -3.5$$

Calculemos ahora las aproximaciones de la Spline

$$\int_0^2 S(x)dx = \int_0^1 (1+2.5x-1.5x^2)dx + \int_1^2 (2-0.5(x-1)-1.5(x-1)^2)dx = 1.75 + 1.25 = 3.0$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{dS_0(x)}{dx} = 2.5 - 3x & x \in [0, 1] \\ \frac{dS_1(x)}{dx} = -0.5 - 3(x-1) & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\frac{dS(0)}{dx} = 2.5$$

$$\frac{dS(1)}{dx} = -0.5$$

$$\frac{dS(2)}{dx} = -3.5$$

Como podemos ver, las aproximaciones de $p(x)$ y de $S(x)$ son las mismas. Esto se debe ya que en realidad, $p(x) = S(x)$, es decir, es el mismo polinomio:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2.5x - 1.5x^2 & x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 2 - 0.5(x-1) - 1.5(x-1)^2 & x \in [1, 2] \end{cases} \\ = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2.5x - 1.5x^2 & x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 1 + 2.5x - 1.5x^2 & x \in [1, 2] \end{cases} = p(x)$$

Luego, son equivalentes en su exactitud de aproximación.

$$E_{rel}(I) = \frac{3-2.0100823450303649089}{2.0100823450303649089} \approx 0.4925$$

$$E_{rel}(D_0) = \frac{2.5-0.5}{2.5-0.5} = 4.0$$

$$E_{rel}(D_1) = \frac{0.5+0.5}{0.5} = 0.0$$

$$E_{rel}(D_2) = \frac{4.7831853071795864769-3.5}{4.7831853071795864769} \approx 0.268$$

Como podemos ver, la única aproximación exacta es D_1 , luego D_2 , luego I y finalmente D_0

6 Aproximación Polinomial

6.1 Resumen de Materia

1. Mínimos Cuadrados: Caso Discreto

- (a) **Caso Lineal:** la idea es encontrar la recta $y = ax + b$ tal que $\min f = \sum_{i=0}^n (y_i - (ax_i + b))^2$, ie $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{(n+1)(\sum_{i=0}^n y_i x_i) - (\sum_{i=0}^n y_i)(\sum_{i=0}^n x_i)}{(n+1)(\sum_{i=0}^n x_i^2) - (\sum_{i=0}^n x_i)^2} \quad b = \frac{(\sum_{i=0}^n x_i^2)(\sum_{i=0}^n y_i) - (\sum_{i=0}^n y_i x_i)(\sum_{i=0}^n x_i)}{(n+1)(\sum_{i=0}^n x_i^2) - (\sum_{i=0}^n x_i)^2}$$

- (b) **Caso General:** la idea es encontrar un polinomio $v(x)$ de grado $\leq M$ tal que $\min f = \sum_{i=0}^n (y_i - v(x_i))^2$ y como $v(x) = \sum_{i=0}^M \alpha_i v_i(x)$ donde $v_0(x), \dots, v_M(x)$ es una base del espacio vectorial V de funciones con el producto interno $\langle v, u \rangle = \sum_{i=0}^N v(x_i)u(x_i)$ entonces el problema es $\langle g - v, v_j \rangle = 0 \quad \forall j = 0 \dots M$ con $g(x)$ una función tal que $g(x_i) = y_i$. Esto se resuelve de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N v_0(x_i)v_0(x_i) & \sum_{i=0}^N v_1(x_i)v_0(x_i) & \dots & \dots & \sum_{i=0}^N v_M(x_i)v_0(x_i) \\ \sum_{i=0}^N v_0(x_i)v_1(x_i) & \sum_{i=0}^N v_1(x_i)v_1(x_i) & \dots & \dots & \sum_{i=0}^N v_M(x_i)v_1(x_i) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^N v_0(x_i)v_M(x_i) & \sum_{i=0}^N v_1(x_i)v_M(x_i) & \dots & \dots & \sum_{i=0}^N v_M(x_i)v_M(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N y_i v_0(x_i) \\ \sum_{i=0}^N y_i v_1(x_i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N y_i v_M(x_i) \end{bmatrix}$$

- (c) **Caso con Pesos:** Si algunos datos son mas confiables que otros, se usa un conjunto $\{P_i\}_{i=0}^N$ los pesos de los datos y el problema es $\min \sum_{i=0}^n P_i (y_i - v(x_i))^2$ en donde el sistema matricial es: $A_{ij} = \sum_{k=0}^N P_k v_i(x_k) v_j(x_k) \quad b_i = \sum_{k=0}^N y_k v_i(x_k)$

2. Independencia: El conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es linealmente independiente en $[a, b]$ si:

- (a) $c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. Si ϕ_j es un polinomio de grado j $\forall j = 0, \dots, n \Rightarrow \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo $[a, b]$.

3. Mínimos Cuadrados: Caso Continuo

- (a) **Caso General:** Dada una función $f(x)$ y un espacio vectorial de funciones V con base $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ l.i. la idea es encontrar $v^*(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i$ tal que $\min \int_D w(x) [f(x) - v^*(x)]^2 dx$, donde D es el conjunto dominio de $f(x)$, $w(x)$ es una función de peso tal que $w(x) > 0 \quad \forall x \in D$ y $|\int_D w(x) v(x)^2 dx| < \infty \quad \forall v(x) \in V$. El producto interno del espacio V se define $\langle v, u \rangle = \int_D w(x) v(x) u(x) dx$. De forma análoga, en donde el sistema matricial es: $A_{ij} = \int_D w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad b_i = \int_D w(x) f(x) \phi_i(x) dx$ y las incógnitas son los α_i

- (b) **Caso Ortogonal:** Para simplificar el problema, se buscan funciones $\phi_i(x)$ ortogonales entre si con respecto a $w(x)$, es decir

$$\int_D w(x) \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ b_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{donde } b_j \text{ es una constante. Entonces el problema queda}$$

$$\alpha_i = \frac{\int_D w(x) f(x) \phi_i(x) dx}{\int_D w(x) (\phi_i(x))^2 dx} \quad \forall i = 0 \dots n$$

4. Ortogonalidad: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ definidos recursivamente es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función de peso $w(x)$:

- (a) $\phi_0(x) = 1$
 (b) $\phi_1(x) = x - B_1$
 (c) $\phi_k(x) = (x - B_k) \phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2$
 (d) $B_k = \frac{\int_a^b x w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}$

$$(e) C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\phi_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2 dx}$$

5. **Polinomios de Chebyshev:** Se definen recursivamente, son ortogonal en $[-1, 1]$ c/r a la f.p. $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$(a) T_0(x) = 1$$

$$(b) T_1(x) = x$$

$$(c) T_k = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \forall k \geq 2$$

(d) Si se usa el cambio de variable $x = \cos \theta$, entonces $T_k = \cos(k\theta)$.

$$(e) \text{ Cumplen que } \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \neq 0 \\ \pi & si \quad n = m = 0 \end{cases}$$

(f) El polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene n ceros simples en $[-1, 1]$ definidos por: $\bar{x}_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$, $k = 1, 2, \dots, n$

(g) El polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ de grado $n \geq 1$ alcanza sus extremos en $\hat{x}_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$, $T_n(\hat{x}_k) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$

(h) Se utilizan para ubicar los puntos interpolantes debido a que minimizan el error de interp. de Lagrange

(i) Si $p_L(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n definido en los ceros del polinomio de Chebyshev, se tiene que:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_L(x)| \leq \frac{\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|}{2^n (n+1)!}$$

6. **Polinomios Trigonométricos:** es el conjunto de funciones Π_T , generado por $B_T = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2n-1}\}$, donde los ϕ_j son ortogonales en $[-\pi, \pi]$ para la función de peso $w(x) = 1$

$$(a) \phi_0 = \frac{1}{2}$$

$$(b) \phi_k = \cos(kx), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$(c) \phi_{n+k} = \sin(kx), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

7. **Aproximación Trigonométrica Continua:** Para una función $f(x) \in [-\pi, \pi]$, la aproximación trigonométrica es de la forma

$$(a) S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nx) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$(b) a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$(c) b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

8. **Aproximación Trigonométrica Discreta:** Dados $2m$ puntos $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, con dist. uniforme en $[-\pi, \pi]$, es decir, $x_j = -\pi + j\frac{\pi}{m}$. Los coeficientes a_k, b_k que minimizan el error de interpolación trigonométrico

$$\min_{a_k, b_k} \varepsilon_T = \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)]^2 \text{ son:}$$

$$(a) a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos(kx_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$(b) b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin(kx_j), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

6.2 Problemas

1. Determine el sistema para aproximar una función $f(x)$ en un intervalo $[\alpha, \beta]$ por un exponencial de la forma $y(x) = be^{ax}$, donde a y b son las constantes a determinar.
2. Use los ceros de \tilde{T}_3 y las transformaciones del intervalo dado y construya un polinomio interpolante de segundo grado para $f(x) = x \ln x$, $[1, 3]$
3. Obtenga el polinomio trigonométrico general de mínimos cuadrados continuos para $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
4. Determine el polinomio trigonométrico $S_2(x)$ en $[-\pi, \pi]$ para $f(x) = x(\pi - x)$
5. Para la función:

$$f(x) = x \sin(\pi x)$$

- (a) Determine la aproximación de MC de $f(x)$ que entregan los polinomios de Legendre $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ en el intervalo $[-1, 1]$, para la función de peso $\omega(x) = 1$.
 - (b) Determine la aproximación de MC de $f(x)$ que entregan los polinomios trigonométricos $F_2 = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ ($n = 2$) en el intervalo $[-\pi, \pi]$, para la función de peso $\omega(x) = 1$.
 - (c) Compare estas aproximaciones en el intervalo $[-1, 1]$. Cuál es la que tiene menor error ?
6. Legendre

Encuentre la base modificada de Legendre para el intervalo $[2, 4]$, tal que mantenga la ortogonalidad.

(a)

n	0	1	2	3
$P_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$

Calcule los valores de $\int_2^4 (P_n^*(x))^2 dx$, $\forall n = 0 \dots 3$, usando los valores conocidos de $\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx$ y el cambio de variable encontrado.

Obs: Recuerde que esta base es ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que use una transformación lineal de intervalo.

- (b) Resuelva el sistema para aproximar $f(x) = \frac{1}{x}$ a través de los mínimos cuadrados en el intervalo $[2, 4]$, usando la base ortogonal modificada de Legendre.

7. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

- Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $p_L(x)$ de segundo grado. Calcule el error $E_L = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_L(x))^2 dx$
- Use los ceros del polinomio de Chebyshev $T_3(x)$ y las transformaciones del intervalo dado, y construya un polinomio interpolante $p_C(x)$ de segundo grado para $f(x)$ en $[x_0, x_2]$. Calcule el error $E_C = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_C(x))^2 dx$
- Se desea interpolar $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n . El polinomio resultante sería de grado n . Para aumentar la precisión a un bajo costo, se desea encontrar un polinomio $p(x)$ de grado $n+1$ tal que:
 - Interpole a $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n
 - Minimice el error en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Este polinomio $p(x)$ tendrá la forma: $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$. Para determinarlo se puede resolver el problema de minimización con restricciones:

$$\begin{aligned} \min_{a_0, a_1, \dots, a_{n+1}} \quad & \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx \\ \text{s.a. : } & p(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Para resolver este problema, se define el lagrangiano L según:

$$L(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, b_0, b_1, \dots, b_n) = \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx + \sum_{k=0}^n b_k (p(x_k) - f(x_k))$$

Entonces, la solución es equivalente a minimizar L respecto a los parámetros: $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, b_0, b_1, \dots, b_n$.

Aplique este método para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con los puntos $x_0 = 1$ y

$x_2 = 4$. Calcule el error $E_P = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p(x))^2 dx$

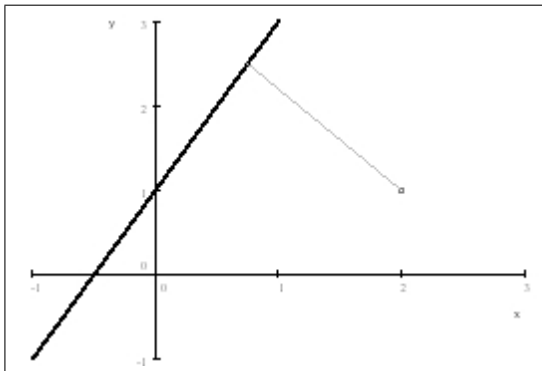
- Los tres polinomios anteriores, $p_L(x)$, $p_C(x)$ y $p(x)$ son de segundo grado e interpolan y/o aproximan a $f(x) = \frac{1}{x}$. Compare los tres polinomios considerando
 - Los errores totales en el intervalo $[x_0, x_2]$
 - Los errores en los puntos x_0, x_1, x_2
 - La cota superior de los errores para todo punto en el intervalo $[x_0, x_2]$

Concluya cual de los tres polinomios calculados anteriormente es mejor. Explique

8. Mínimos Cuadrados Ortogonales

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

- i) Dado un punto en \mathbb{R}^2 (x_0, y_0) y una recta $y = a + bx$, calcule el punto (\hat{x}_0, \hat{y}_0) contenido en la recta que minimiza la distancia entre el punto y la recta. Demuestre que el cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y la recta $y = a + bx$ es $h_{\min}^2 = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$.



- ii) Dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, plantee 2 ecuaciones que determinen la recta $y = a + bx$ que minimiza la suma de los cuadrados de la mínima distancia de los puntos (x_i, y_i) a la recta $y = a + bx$.

Denote

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \bar{x} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i &= \bar{y} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= S_x^2 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= S_y^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= S_{xy} \end{aligned}$$

Observe que se cumple: $S_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

Dado el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ y un punto (x_0, y_0) , determine:

- La ecuación a minimizar para encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$ que minimiza la distancia entre el punto (x_0, y_0) y el polinomio. Diga como encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.
- La recta tangente al polinomio que pasa por el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.
- El cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y el polinomio.
- Usando lo anterior, dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, explique detalladamente como encontrar el polinomio de grado m que minimiza la suma de las mínimas distancias al cuadrado entre los puntos (x_i, y_i) y el polinomio. ¿Siempre existe? ¿Que pasa cuando $n \leq m + 1$? ¿Que pasa si $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$?

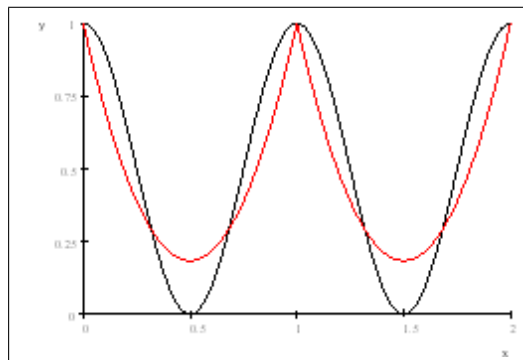
(c) Mínimos Cuadrados Standard y Ortogonales

Utilizando los puntos: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.

- Calcular la recta $L1$ de aproximación usando el método anterior (Mínimos Cuadrados Ortogonales)
- Calcular la recta $L2$ de aproximación por Mínimos Cuadrados Standard.
- Grafique y compare $L1$ y $L2$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se desea encontrar un método para encontrar una función $p(x)$ definida por trazos, de clase \mathcal{C}^2 , que interpole a $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y aproxime por mínimos cuadrados dentro de cada intervalo. Para esto:

- Con la suposición que $p(x)$ está definida por trazos por polinomios, todos del mismo grado, indique la forma de $p(x)$, las condiciones de continuidad e interpolación y el grado mínimo de los polinomios. ¿Este problema tiene solución única? Explique.
- Para lograr una mayor precisión, aumente en un grado a los polinomios, y plantee el problema de optimización con restricciones para encontrar $p(x)$ que minimice el error de aproximación. ¿Este problema tiene solución? Explique.
- Si se pide que $p(x)$ sea solo de clase \mathcal{C}^0 , indique las condiciones para que $p(x)$ interpole, el grado mínimo de los polinomios, aumente en un grado a los polinomios, y plantee el problema de optimización con restricciones para encontrar $p(x)$ que minimice el error de aproximación. ¿Para este caso se puede resolver el problema de forma independiente por trazo? Explique.
- Aplique el método de la parte c) a la función $f(x) = \cos^2 \pi x$, con la malla $\{0, 1, 2\}$.



Como ayuda, puede seguir los siguientes pasos:

- Considere $p_1(x) = a + bx + cx^2$. Plantee el problema de mínimos cuadrados con las restricciones de interpolación en el intervalo $[0, 1]$.
- Con las restricciones, encuentre la constante a , y despeje c en función de b .
- Replantee el problema con 1 sola variable.
- Resuelva el problema, y deje explícita la forma de $p_1(x)$.
- Por simetría de $f(x)$ y de la malla, encuentre $p_2(x)$.

6.3 Respuestas

1. Primero se hace una transformación para tener un sistema lineal. En este caso se usa el \ln

(a) $y = be^{ax} \implies \ln(y) = \ln(b) + ax$

Ahora buscamos el minimo del error cuadrático

(b) $E = \int_{\alpha}^{\beta} (\ln(f(x)) - (\ln(b) + ax))^2 dx$

(c) $\frac{\partial E}{\partial a} = \int_{\alpha}^{\beta} x (2 \ln b + 2ax - 2 \ln(f(x))) dx = 0 \implies \int_{\alpha}^{\beta} (x \ln b + ax^2) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \ln(f(x)) dx$

(d) $\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{1}{b} \int_{\alpha}^{\beta} (2 \ln b + 2ax - 2 \ln(f(x))) dx = 0 \implies \int_{\alpha}^{\beta} (\ln b + ax) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \ln(f(x)) dx$

El sistema de forma matricial queda de la forma

(e)
$$\begin{bmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} x dx & \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx \\ \int_{\alpha}^{\beta} dx & \int_{\alpha}^{\beta} x dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(b) \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} x \ln(f(x)) dx \\ \int_{\alpha}^{\beta} \ln(f(x)) dx \end{bmatrix}$$

2. Primero, los ceros de \tilde{T}_3 se encuentran en $\bar{x}_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$, $k = 1, 2, 3$.

(a) $\bar{x}_1 = \cos(\frac{1}{6}\pi) = 0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76$

(b) $\bar{x}_2 = \cos(\frac{3}{6}\pi) = 0.0$

(c) $\bar{x}_3 = \cos(\frac{5}{6}\pi) = -0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76$

Debemos usar una transformacion lineal para pasar de $[-1, 1]$ a $[1, 3]$. Esto es $\tilde{x}_k = 2 + \bar{x}_k$.

(d) $\tilde{x}_1 = 2.866\,025\,403\,784\,438\,646\,8 \simeq 2.866$

(e) $\tilde{x}_2 = 2$

(f) $\tilde{x}_3 = 1.133\,974\,596\,215\,561\,353\,2 \simeq 1.134$

Ahora debemos calcular los valores de $f(x)$ en $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$

(g) $f(\tilde{x}_1) = f(2.866) = 3.017\,661\,066\,077\,538\,987\,9 \simeq 3.018$

(h) $f(\tilde{x}_2) = f(2) = 1.386\,294\,361\,119\,890\,618\,8 \simeq 1.386$

(i) $f(\tilde{x}_3) = f(1.134) = 0.142\,601\,866\,816\,505\,412\,01 \simeq 0.143$

Las diferencias divididas son:

(j)
$$\begin{array}{ccccc} x & f(x) & f[x, x] & f[x, x, x] & \\ 2.866 & 3.018 & \frac{1.386-3.018}{2-2.866} = 1.885 & \frac{1.435-1.885}{1.134-2.866} = 0.26 & \\ 2 & 1.386 & \frac{0.143-1.386}{1.134-2} = 1.435 & & \\ 1.134 & 0.143 & & & \end{array}$$

El polinomio interpolante de segunda grado es:

(k) $\tilde{P}_3(x) = 3.018 + 1.885(x - 2.866) + 0.26(x - 2.866)(x - 2) = 0.619\,84x + 0.26x^2 - 0.894\,09$

El error del polinomio está acotado de la forma

(l) $\max_{x \in [1, 3]} |\tilde{P}_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^3(3+1)!} \max_{x \in [1, 3]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{192} \max_{x \in [1, 3]} \left| \frac{1}{2x^3} \right| = \frac{1}{192} \frac{1}{2} = \frac{1}{384} < 0.002\,604\,2$

3. Calculemos a_k y b_k

(a) $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} = 0$

(b) $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = -\frac{1}{\pi k} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi k} (1 - (-1)^k)$

Luego, el polinomio general $S_n(x)$ es

(c) $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nx) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\pi k} (1 - (-1)^k) \sin(kx)$

4. El polinomio es $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos(2x) + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$. Calculemos los coeficientes

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi - x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{3\pi} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{3}\pi^2$$

$$(b) \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi - x) \cos(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(x) dx = -\frac{1}{\pi} \left[x^2 \sin(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(x) dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx = -\frac{2}{\pi} \left[-x \cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx \right] = \frac{2}{\pi} 2\pi = 4$$

$$(c) \quad a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi - x) \cos(2x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{u}{2} \left(\pi - \frac{u}{2} \right) \cos(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{8\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u(2\pi - u) \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-2\pi}^{2\pi} u \cos(u) du - \frac{1}{8\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u^2 \cos(u) du = -\frac{1}{8\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u^2 \cos(u) du = -\frac{1}{8\pi} \left[u^2 \sin(u) \Big|_{-2\pi}^{2\pi} - \int_{-2\pi}^{2\pi} 2u \sin(u) du \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} u \sin(u) du = \frac{1}{4\pi} \left[-x \cos(x) \Big|_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(x) dx \right] = -\frac{1}{4\pi} 4\pi = -1$$

5. Mínimos Cuadrados

(a) Legendre

$$\text{i. } \phi_0(x) = 1$$

$$\implies \int_{-1}^1 dx = 2, \quad \int_{-1}^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{ii. } \phi_1(x) = x - B_1$$

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0 \implies \phi_1(x) = x$$

$$\implies \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^1 x(x \sin(\pi x)) dx = 0$$

$$\text{iii. } \phi_2(x) = (x - B_2) \phi_1(x) - C_2 \phi_0(x)$$

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0, \quad C_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{1}{3} \implies \phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\implies \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}, \quad \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) x \sin(\pi x) dx = \frac{4}{3\pi} - \frac{12}{\pi^3}$$

$$\text{iv. } \phi_3(x) = (x - B_3) \phi_2(x) - C_3 \phi_1(x)$$

$$B_3 = \frac{\int_{-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0, \quad C_3 = \frac{\int_{-1}^1 x^2(x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{4}{15} \implies \phi_3(x) = x(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$\implies \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175}, \quad \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) x \sin(\pi x) dx = 0$$

v. Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{\frac{2}{\pi}}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_2 = \frac{\frac{4}{3\pi} - \frac{12}{\pi^3}}{\frac{8}{45}} = \frac{15}{2\pi} - \frac{135}{2\pi^3}$$

$$a_3 = \frac{0}{\frac{8}{175}} = 0$$

vi. Finalmente, el polinomio de Legendre es:

$$L(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + a_3 \phi_3(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} + 0 + \left(\frac{15}{2\pi} - \frac{135}{2\pi^3} \right) \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + 0$$

$$= \frac{45}{2\pi^3} - \frac{3}{2\pi} + \frac{15}{2\pi} x^2 - \frac{135}{2\pi^3} x^2$$

(b) Trigonómicos

i. Como el intervalo es $[-1, 1]$, para aplicar los polinomios trigonométricos debemos transformar el intervalo $[-\pi, \pi]$ a $[-1, 1]$. Para esto se usa la transformación lineal $\frac{x}{\pi} = u$.

ii. La base trigonométrica queda de la forma:

$$\phi_0(u) = \frac{1}{2}$$

$$\phi_1(u) = \cos(\pi u)$$

$$\phi_2(u) = \cos(2\pi u)$$

$$\phi_3(u) = \sin(\pi u)$$

iii. Los coeficientes son:

$$a_0 = \int_{-1}^1 u \sin(\pi u) du = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \int_{-1}^1 \cos(\pi u) [u \sin(\pi u)] du = -\frac{1}{2\pi}$$

$$a_2 = \int_{-1}^1 \cos(2\pi u) [u \sin(\pi u)] du = -\frac{2}{3\pi}$$

$$b_1 = \int_{-1}^1 \sin(\pi u) [u \sin(\pi u)] du = 0$$

iv. El polinomio resultante es:

$$S(u) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos(2\pi u) + a_1 \cos(\pi u) + b_1 \sin(\pi u)$$

$$= \frac{\frac{2}{\pi}}{2} - \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi u) - \frac{1}{2\pi} \cos(\pi u) + 0$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{3\pi} \cos(\pi u) - \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi u)$$

(c) Veamos el error cuadrático de cada aproximación

i. Legendre

$$E_L = \int_{-1}^1 (f(x) - L(x))^2 dx = \int_{-1}^1 (x \sin(\pi x) - \frac{45}{2\pi^3} + \frac{3}{2\pi} - \frac{15}{2\pi} x^2 + \frac{135}{2\pi^3} x^2)^2 dx$$

Para simplificar cálculo, llamemos $c_1 = \frac{45}{2\pi^3} - \frac{3}{2\pi}$, y $c_2 = \frac{15}{2\pi} - \frac{135}{2\pi^3}$. Entonces

$$E_L = \int_{-1}^1 (x \sin(\pi x) - c_1 - c_2 x^2)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (c_1^2 - 2xc_1 \sin \pi x + 2x^2 c_1 c_2 - 2x^3 c_2 \sin \pi x + x^4 c_2^2 + x^2 \sin^2 \pi x) dx$$

$$= c_1^2 \int_{-1}^1 dx - 2c_1 \int_{-1}^1 x \sin \pi x + 2c_1 c_2 \int_{-1}^1 x^2 dx - 2c_2 \int_{-1}^1 x^3 \sin \pi x dx + c_2^2 \int_{-1}^1 x^4 dx + \int_{-1}^1 x^2 \sin^2 \pi x dx$$

$$= 2c_1^2 - 2c_1 \frac{2}{\pi} + 2c_1 c_2 \frac{2}{3} - 2c_2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} \right) + c_2^2 \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right)$$

Ahora, evaluando con $c_1 \simeq 0.248$, $c_2 \simeq 0.210$

$$E_L \simeq 7.216\,476\,356\,678\,536\,284\,4 \times 10^{-2}$$

ii. Trigonométrico

$$E_T = \int_{-1}^1 (f(x) - S(x))^2 dx = \int_{-1}^1 (x \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \cos(\pi x) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi x))^2 dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{\pi} x \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \cos(\pi x) x \sin(\pi x) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi x) x \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2} \cos(\pi x) - \frac{2}{3\pi^2} \cos(2\pi x) + \frac{1}{3\pi^2} \cos(\pi x) \cos(2\pi x) \right)$$

$$+ \int_{-1}^1 x^2 \sin^2(\pi x) dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{4\pi^2} \cos^2(\pi x) dx + \int_{-1}^1 \frac{4}{9\pi^2} \cos^2(2\pi x)$$

$$= 2 \left(-\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{4}{9\pi^2} + 0 + 0 + 0 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{115}{36\pi^2} \simeq 9.668\,441\,142\,532\,118\,998\,7 \times 10^{-3}$$

iii. Entonces, como $E_T < E_L$, eso implica que la aproximación por el polinomio trigonométrico tiene menor error, por lo que es mejor

(d) Observaciones:

- Muchas funciones las cuales se integraban eran impares, por lo que se podía poner que vale cero sin hacer cálculos
- Muchas integrales salen muchas veces, por lo que no era necesario repetir las mismas integrales si se anotaban ya una vez
- En la parte b), si se aplicaba la definición del método de los mínimos cuadrados se obtenía la forma de las constantes, y lo importante era conservar la ortogonalidad de la base trigonométrica en $[-1, 1]$.

6. Legendre

(a) $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$, con $n \neq m$

Para transformar el intervalo $[-1, 1]$ a $[2, 4]$

$$T(x) = 2 \frac{(x-1)}{(-1-1)} + 4 \frac{(x+1)}{(1+1)} = x + 3$$

Haciendo el cambio de variable $t = x + 3 \Rightarrow x = t - 3$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_2^4 P_n(t-3)P_m(t-3)dt = 0$$

Entonces la base queda de la forma:

n	0	1	2	3
$P_n^*(x)$	1	$x - 3$	$\frac{1}{2}(3(x-3)^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5(x-3)^3 - 3(x-3))$

Calculemos los valores de $\int_2^4 (P_n^*(x))^2 dx$, con el cambio de variable $t = x - 3$

i. $\int_2^4 dx = \int_{-1}^1 dx = 2$

ii. $\int_2^4 (x-3)^2 dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

iii. $\int_2^4 (\frac{1}{2}(3(x-3)^2 - 1))^2 dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2}(3x^2 - 1))^2 dx = \frac{2}{5}$

iv. $\int_2^4 (\frac{1}{2}(5(x-3)^3 - 3(x-3)))^2 dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2}(5x^3 - 3x))^2 dx = \frac{2}{7}$

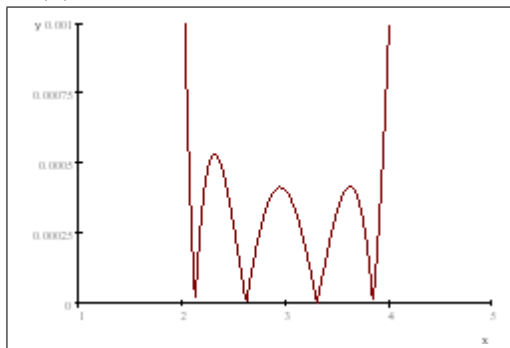
(b) $p(x) = a + (x-3)b + \frac{1}{2}(3(x-3)^2 - 1)c + \frac{1}{2}(5(x-3)^3 - 3(x-3))d$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_2^4 \frac{1}{x} dx \\ \int_2^4 \frac{(x-3)}{x} dx \\ \int_2^4 \frac{\frac{1}{2}(3(x-3)^2 - 1)}{x} dx \\ \int_2^4 \frac{\frac{1}{2}(5(x-3)^3 - 3(x-3))}{x} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ln 2 + \ln 4 \\ 3 \ln 2 - 3 \ln 4 + 2 \\ -13 \ln 2 + 13 \ln 4 - 9 \\ 63 \ln 2 - 63 \ln 4 + \frac{131}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 4 \\ \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{9}{2} \ln 4 + 3 \\ -\frac{65}{2} \ln 2 + \frac{65}{2} \ln 4 - \frac{45}{2} \\ \frac{441}{2} \ln 2 - \frac{441}{2} \ln 4 + \frac{917}{6} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.34657 \\ -0.11916 \\ 2.7283 \times 10^{-2} \\ -5.62 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$p(x) = 0.34657 - (x-3)0.11916 + \frac{1}{2}(3(x-3)^2 - 1)2.7283 \times 10^{-2} - \frac{1}{2}(5(x-3)^3 - 3(x-3))5.62 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow p(x) = 0.1673745x^2 - 0.735627x - 0.01405x^3 + 1.412789$$



$$|p(x) - f(x)|$$

7. Interpolación y Aproximación por Mínimos Cuadrados:

(a) Polinomio de lagrange

$f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{4-1} = \frac{1}{8}$
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{4-2} = -\frac{1}{8}$	
2	4	$\frac{1}{4}$		

$$p_L(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)(x-2) = \frac{7}{4} - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2$$

$$p_L(x) = \frac{7}{4} - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2$$

(b) Polinomio de Chebyshev

Los ceros del $T_3(x)$ son:

$$\bar{x}_1 = \cos\left(\frac{2*1-1}{2*3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76 \simeq 0.866$$

$$\bar{x}_2 = \cos\left(\frac{2*2-1}{2*3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\bar{x}_3 = \cos\left(\frac{2*3-1}{2*3}\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76 \simeq -0.866$$

debemos transformar el intervalo $[-1, 1]$ a $[1, 4]$

$$\text{largo } [-1, 1] = 1 + 1 = 2$$

$$\text{largo } [1, 4] = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{3}{2}[-1, 1] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{trasladar } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ a } [1, 4] \implies \text{sumar } \frac{5}{2}$$

$$I(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x$$

calcular los puntos:

$$\tilde{x}_1 = I(\bar{x}_1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}0.866 = 3.799 \simeq 3.8$$

$$\tilde{x}_2 = I(\bar{x}_2) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}0 = 2.5$$

$$\tilde{x}_3 = I(\bar{x}_3) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}0.866 = 1.201 \simeq 1.2$$

calcular $p_C(x)$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	3.8	$\frac{1}{3.8} \simeq 0.263$	$\frac{0.4-0.263}{2.5-3.8} = \frac{0.137}{-1.3} \simeq -0.105$	$\frac{-0.333+0.105}{1.2-3.8} = \frac{-0.228}{-2.6} \simeq 0.0877$
2	2.5	$\frac{1}{2.5} = 0.4$	$\frac{0.833-0.4}{1.2-2.5} = \frac{0.433}{-1.3} \simeq -0.333$	
3	1.2	$\frac{1}{1.2} \simeq 0.833$		

$$p_C(x) = 0.263 - 0.105(x-3.8) + 0.0877(x-3.8)(x-2.5) = 0.0877x^2 - 0.65751x + 1.49515$$

$$\implies p_C(x) = 0.0877x^2 - 0.65751x + 1.49515$$

obs: se podían aproximar los números finales también.

(c) Lagrangiano

- i. $L(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1) = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - a_0 - a_1x - a_2x^2\right)^2 dx + b_0(a_0 + a_1 + a_2 - \frac{1}{1}) + b_1(a_0 + 4a_1 + 16a_2 - \frac{1}{4})$
- ii. minimizar $L : \nabla L = \vec{0}$
- A. $\frac{\partial L}{\partial a_0} = -2 \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - (a_0 + a_1x + a_2x^2)\right) dx + b_0 + b_1 = 0$
 $-2 \left[\ln 4 - 3a_0 - \frac{16-1}{2}a_1 - \frac{64-1}{3}a_2 \right] + b_0 + b_1 = 0$
 $6a_0 + 15a_1 + 42a_2 + b_0 + b_1 = 2 \ln 4$
- B. $\frac{\partial L}{\partial a_1} = -2 \int_1^4 x \left(\frac{1}{x} - (a_0 + a_1x + a_2x^2)\right) dx + b_0 + 4b_1 = 0$
 $-2 \left[3 - \frac{16-1}{2}a_0 - \frac{64-1}{3}a_1 - \frac{256-1}{4}a_2 \right] + b_0 + 4b_1 = 0$
 $15a_0 + 42a_1 + \frac{255}{2}a_2 + b_0 + 4b_1 = 6$
- C. $\frac{\partial L}{\partial a_2} = -2 \int_1^4 x^2 \left(\frac{1}{x} - (a_0 + a_1x + a_2x^2)\right) dx + b_0 + 16b_1 = 0 - 2 \left[\frac{16-1}{2} - \frac{64-1}{3}a_0 - \frac{256-1}{4}a_1 - \frac{1024-1}{5}a_2 \right] + b_0 + 16b_1 = 0$
 $42a_0 + \frac{255}{2}a_1 + \frac{2046}{5}a_2 + b_0 + 16b_1 = 15$
- D. $\frac{\partial L}{\partial b_0} = a_0 + a_1 + a_2 - 1 = 0$
 $a_0 + a_1 + a_2 = 1$
- E. $\frac{\partial L}{\partial b_1} = a_0 + 4a_1 + 16a_2 - \frac{1}{4} = 0$
 $a_0 + 4a_1 + 16a_2 = \frac{1}{4}$

iii. Sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Forma alternativa: otra forma de construir el sistema era darse cuenta que la comatriz superior de 3×3 correspondía a la misma que la de mínimos cuadrados con base $\{1, x, x^2\}$ que es:

$$A_{3 \times 3} = 2 \begin{bmatrix} \int_1^4 dx & \int_1^4 x dx & \int_1^4 x^2 dx \\ \int_1^4 x dx & \int_1^4 x^2 dx & \int_1^4 x^3 dx \\ \int_1^4 x^2 dx & \int_1^4 x^3 dx & \int_1^4 x^4 dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} \end{bmatrix}$$

$$b_3 = 2 \begin{bmatrix} \int_1^4 \frac{1}{x} dx \\ \int_1^4 dx \\ \int_1^4 x dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \ln 4 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Luego, las dos filas de abajo eran las 2 restricciones de interpolación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

y como la matriz era simétrica, se obtenía:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

iv. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{6} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{42}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 & 6 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & \frac{45}{2} & \frac{576}{5} & -6 & 9 & -14 \ln 4 + 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -6 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \ln 4 + 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 9 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \ln 4 + \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{45}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{27}{10} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{27}{10} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & \frac{45}{2} & \frac{576}{5} & -6 & 9 & -14 \ln 4 + 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -6 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \ln 4 + 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 9 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \ln 4 + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11 \ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \ln 4 + 3 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \ln 4 - \frac{7}{4} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{27} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{27} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11 \ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \ln 4 + 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \ln 4 - \frac{7}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11 \ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{73}{9} \ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{43}{9} \ln 4 + \frac{79}{12} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11 \ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{73}{9} \ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{43}{9} \ln 4 + \frac{79}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2 \ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5 \ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11 \ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{73}{9} \ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{56}{27} \ln 4 + \frac{101}{36} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{-\frac{56}{27} \ln 4 + \frac{101}{36}}{-\frac{1}{3}} = \frac{14}{9} \ln 4 - \frac{101}{48}$$

$$b_0 = \frac{-\frac{73}{9} \ln 4 + \frac{34}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{14}{9} \ln 4 - \frac{101}{48} \right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{44}{9} \ln 4 - \frac{329}{48}$$

$$a_2 = \frac{11 \ln 4 - 15 - \frac{3}{2} \left(\frac{14}{9} \ln 4 - \frac{101}{48} + \frac{44}{9} \ln 4 - \frac{329}{48} \right)}{\frac{27}{10}} = \frac{40}{81} \ln 4 - \frac{125}{216}$$

$$a_1 = \frac{-5 \ln 4 + 6 - \frac{45}{2} \left(\frac{40}{81} \ln 4 - \frac{125}{216} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{44}{9} \ln 4 - \frac{329}{48} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{14}{9} \ln 4 - \frac{101}{48} \right)}{\frac{9}{2}} = \frac{571}{216} - \frac{200}{81} \ln 4$$

$$a_0 = \frac{2 \ln 4 - 15 \left(\frac{571}{216} - \frac{200}{81} \ln 4 \right) - 42 \left(\frac{40}{81} \ln 4 - \frac{125}{216} \right) - \left(\frac{44}{9} \ln 4 - \frac{329}{48} \right) - \left(\frac{14}{9} \ln 4 - \frac{101}{48} \right)}{6} = \frac{160}{81} \ln 4 - \frac{115}{108}$$

obs: se podía resolver no de forma exacta, aproximando números, eso no baja NADA de puntaje.

vi. Polinomio $p(x)$

$$a_0 = \frac{160}{81} \ln 4 - \frac{115}{108} = 1.673\,544\,417\,026\,944\,432\,3$$

$$a_1 = \frac{571}{216} - \frac{200}{81} \ln 4 = -0.779\,430\,521\,283\,680\,540\,33$$

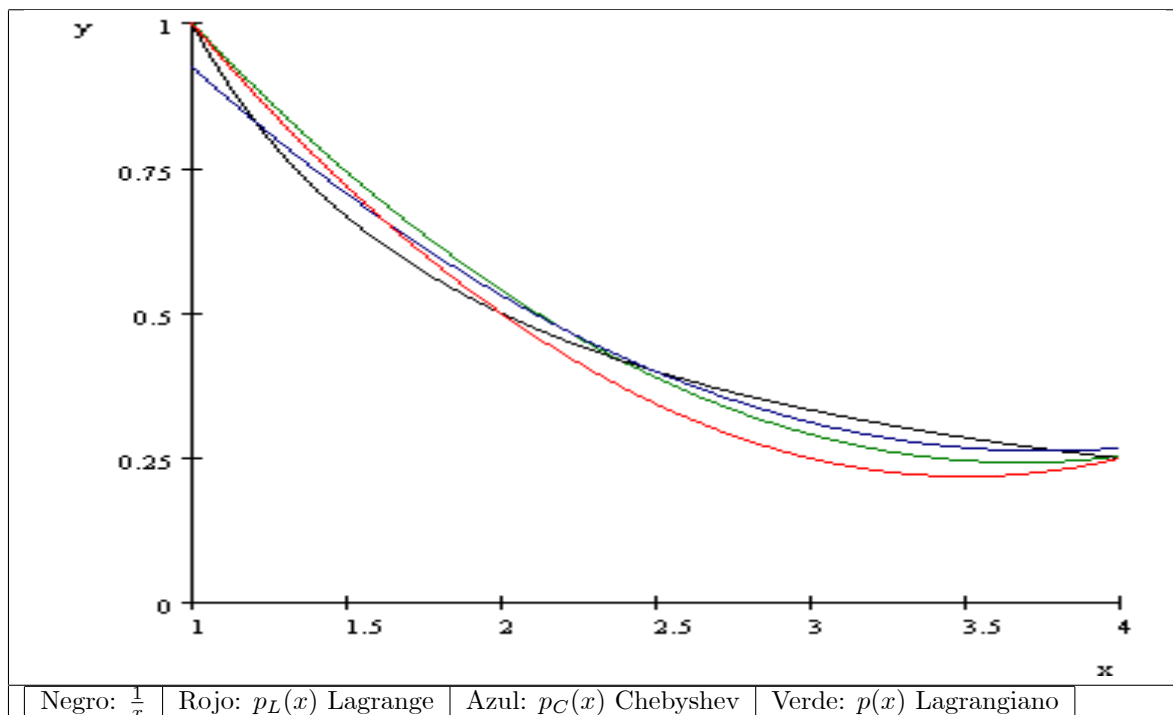
$$a_2 = \frac{40}{81} \ln 4 - \frac{125}{216} = 0.105\,886\,104\,256\,736\,108\,07$$

obs: se pueden aproximar estos coeficientes

$$p(x) = \frac{160}{81} \ln 4 - \frac{115}{108} + \left(\frac{571}{216} - \frac{200}{81} \ln 4 \right) x + \left(\frac{40}{81} \ln 4 - \frac{125}{216} \right) x^2$$

$$p(x) = 1.674 - 0.779x + 0.106x^2$$

(d) Errores:



i. En el intervalo $[1, 4]$: $E = \int_1^4 (f(x) - p(x))^2 dx$

Como las tres integrales son de la forma $\int_1^4 (\frac{1}{x} - a - bx - cx^2)^2 dx$, calculemos solo UNA vez la integral de forma general y después reemplazamos:

$$\left(\frac{1}{x} - a - bx - cx^2\right)^2 = \begin{matrix} \frac{1}{x^2} & -\frac{a}{x} & -b & -cx \\ & -\frac{a}{x} & +a^2 & +abx & +acx^2 \\ & & -b & +abx & +b^2x^2 & +bcx^3 \\ & & & -cx & +acx^2 & +bcx^3 & +c^2x^4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - a - bx - cx^2\right)^2 = \frac{1}{x^2} - 2a\frac{1}{x} + (a^2 - 2b) + 2(ab - c)x + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - a - bx - cx^2\right)^2 dx = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - 2a \ln 4 + (a^2 - 2b)3 + 2(ab - c)\frac{16-1}{2} + (b^2 + 2ac)\frac{64-1}{3} + 2bc\frac{256-1}{4} + c^2\frac{1024-1}{5}$$

$$E(a, b, c) = \frac{3}{4} - 2a \ln 4 + 3(a^2 - 2b) + 15(ab - c) + 21(b^2 + 2ac) + \frac{255}{2}bc + \frac{1023}{5}c^2$$

A. Lagrange

$$a = \frac{7}{4}$$

$$b = -\frac{7}{8}$$

$$c = \frac{1}{8}$$

$$E\left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4} - 2 \times \frac{7}{4} \times \ln 4 + 3\left(\frac{49}{16} + 2 \times \frac{7}{8}\right) + 15\left(-\frac{7}{4} \times \frac{7}{8} - \frac{1}{8}\right) + 21\left(\frac{49}{64} + 2 \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{8}\right) - \frac{255}{2} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1023}{5} \times \frac{1}{64}$$

$$E_L = \frac{3111}{640} - \frac{7}{2} \ln 4 = 0.008\,907\,236\,080\,382\,834\,079\,4$$

B. Chebyshev

$$a = 1.49515$$

$$b = -0.65751$$

$$c = 0.0877$$

$$E(1.49515, -0.65751, 0.0877) = \frac{3}{4} - 2 \times 1.49515 \times \ln 4 + 3(1.49515^2 + 2 \times 0.65751) + 15(-1.49515 \times 0.65751 - 0.0877) + 21(0.65751^2 + 2 \times 1.49515 \times 0.0877) - \frac{255}{2} \times 0.65751 \times 0.0877 + \frac{1023}{5} 0.0877^2$$

$$E_C = 4.1473078236 - 2.9903 \ln 4 = 0.0018717955431910824993$$

C. Lagrangiano

$$a = 1.674$$

$$b = -0.779$$

$$c = 0.106$$

$$E(1.674, -0.779, 0.106) = \frac{3}{4} - 2 \times 1.674 \ln 4 + 3(1.674^2 + 2 \times 0.779) + 15(-1.674 \times 0.779 - 0.106) + 21(0.779^2 + 2 \times 1.674 \times 0.106) - \frac{255}{2} \times 0.779 \times 0.106 + \frac{1023}{5} 0.106^2$$

$$E = 4.6471476 - 3.348 \ln 4 = 0.0058340789706062081422$$

D. Comparar

$$E_C < E < E_L$$

El polinomio de Chebyshev es el que tiene menor error de todos, luego el polinomio del Lagrangiano, y luego el polinomio de Lagrange. Esto se debe ya que el polinomio de Chebyshev no interpola los puntos dados, por lo que tiene más libertad para acotar el error, luego el del lagrangiano es el polinomio que interpola los dos extremos de menor error, y como el polinomio de lagrange interpola esos dos puntos, más x_1 , entonces el error es más grande que todos.

ii. en los puntos $x_0 = 1$ $x_1 = 2$ $x_2 = 4$

A. Lagrange

$$|p_L(1) - 1| = 0 \implies \frac{|p_L(1) - 1|}{1} = 0$$

$$|p_L(2) - \frac{1}{2}| = 0 \implies \frac{|p_L(2) - \frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$|p_L(4) - \frac{1}{4}| = 0 \implies \frac{|p_L(4) - \frac{1}{4}|}{\frac{1}{4}} = 0$$

$$E_{T_{abs}} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$E_{T_{rel}} = 0 + 0 + 0 = 0$$

B. Chebyshev

$$|p_C(1) - 1| = 0.07466 \implies \frac{|p_C(1) - 1|}{1} = 0.07466$$

$$|p_C(2) - \frac{1}{2}| = 0.03093 \implies \frac{|p_C(2) - \frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}} = 0.06186$$

$$|p_C(4) - \frac{1}{4}| = 0.01831 \implies \frac{|p_C(4) - \frac{1}{4}|}{\frac{1}{4}} = 0.07324$$

$$E_{T_{abs}} = 0.07466 + 0.03093 + 0.01831 = 0.1239$$

$$E_{T_{rel}} = 0.07466 + 0.06186 + 0.07324 = 0.20976$$

C. Lagrangiano

$$\begin{aligned} |p(1) - 1| &= 0 \implies \frac{|p(1)-1|}{1} = 0 \\ |p(2) - \frac{1}{2}| &\simeq 0.0382 \implies \frac{|p(2)-\frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}} \simeq 0.0764 \\ |p(4) - \frac{1}{4}| &= 0 \implies \frac{|p(4)-\frac{1}{4}|}{\frac{1}{4}} = 0 \\ E_{T_{abs}} &= 0 + 0.0382 + 0 = 0.0382 \\ E_{T_{rel}} &= 0 + 0.0764 + 0 = 0.0764 \end{aligned}$$

D. Comparar

$$E_L < E < E_C$$

Claramente el polinomio de Lagrange tiene menos error que los otros, ya que interpola esos puntos.

Luego, el polinomio del Lagrangiano, como interpola los extremos, solo tienen un pequeño error en el punto $x_1 = 2$.

El polinomio con más error en los puntos es el polinomio de Chebyshev, ya que no interpola ninguno de esos puntos.

iii. Cota superior

Como todos los errores relativos son de la forma

$$E_{rel}(x) = \frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|ax^2+bx+c-\frac{1}{x}|}{|\frac{1}{x}|} = |ax^3 + bx^2 + cx - 1|$$

y el máximo se alcanza en la derivada igual a cero, por lo que el módulo se puede sacar:

$$\frac{\partial E_{rel}(x)}{\partial x} = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \implies$$

$$\bar{x}_1 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

que son los puntos del error máximo de los polinomios.

A. Lagrange

El polinomio de Lagrange interpola a $f(x)$ en 1,2 y 4, por lo que el error será cero en esos puntos, entonces, con solo evaluar en algún punto entre $[1, 2]$ y $[2, 4]$ se puede obtener el signo del módulo:

$$E_L(x) = \frac{|p_L(x)-f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{7}{4} - \frac{1}{x}|}{|\frac{1}{x}|} = |\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1|$$

$$\max E_L(x) \iff \frac{\partial E_L(x)}{\partial x} = 0$$

ocupando lo anterior:

$$\bar{x}_1 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{2 \times \frac{7}{8} + \sqrt{4 \times (\frac{7}{8})^2 - 12 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{4}}}{6 \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{7}{3} \simeq 3.215$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2 \times \frac{7}{8} - \sqrt{4 \times (\frac{7}{8})^2 - 12 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{4}}}{6 \times \frac{1}{8}} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \simeq 1.451$$

$$E_L(\bar{x}_1) = \left| \frac{1}{8} \times 3.215^3 - \frac{7}{8} \times 3.215^2 + \frac{7}{4} \times 3.215 - 1 \right| = 0.264076453125$$

$$E_L(\bar{x}_2) = \left| \frac{1}{8} \times 1.451^3 - \frac{7}{8} \times 1.451^2 + \frac{7}{4} \times 1.451 - 1 \right| = 0.078891231375$$

$$\text{Error máximo: } E_{ML} = 0.264076453125$$

B. Chebyshev

De forma análoga, pero con los puntos 3.8, 2.5, 1.2

$$E_C(x) = \left| \frac{p_C(x) - f(x)}{f(x)} \right| = |0.0877x^3 - 0.65751x^2 + 1.49515x - 1|$$

$$\max E_C(x) \iff \frac{\partial E_C(x)}{\partial x} = 0$$

$$\bar{x}_1 = \frac{2 \times 0.65751 + \sqrt{4 \times 0.65751^2 - 12 \times 0.0877 \times 1.49515}}{6 \times 0.0877} = 3.2491675339046710035 \simeq 3.25$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2 \times 0.65751 - \sqrt{4 \times 0.65751^2 - 12 \times 0.0877 \times 1.49515}}{6 \times 0.0877} = 1.7490080647270279703 \simeq 1.749$$

$$E_C(\bar{x}_1) = |0.0877 \times 1.749^3 - 0.65751 \times 1.749^2 + 1.49515 \times 1.749 - 1| = 0.0729055065773$$

$$E_C(\bar{x}_2) = |0.0877 \times 3.25^3 - 0.65751 \times 3.25^2 + 1.49515 \times 3.25 - 1| = 0.0751353125$$

$$\text{Error máximo: } E_{MC} = 0.0751353125$$

C. Lagrangiano

$$E(x) = \left| \frac{p(x) - f(x)}{f(x)} \right| = |0.106x^3 - 0.779x^2 + 1.674x - 1|$$

$$\bar{x}_1 = \frac{2 \times 0.779 + \sqrt{4 \times 0.779^2 - 12 \times 0.106 \times 1.674}}{6 \times 0.106} = 3.3080609041056762412 \simeq 3.308$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2 \times 0.779 - \sqrt{4 \times 0.779^2 - 12 \times 0.106 \times 1.674}}{6 \times 0.106} = 1.5913101650767136959 \simeq 1.591$$

$$E(\bar{x}_1) = |0.106 \times 3.308^3 - 0.779 \times 3.308^2 + 1.674 \times 3.308 - 1| = 0.149805680128$$

$$E(\bar{x}_2) = |0.106 \times 1.591^3 - 0.779 \times 1.591^2 + 1.674 \times 1.591 - 1| = 0.118356516526$$

$$\text{Error máximo: } E_M = 0.149805680128$$

D. Comparar

$$E_{MC} < E_M < E_{ML}$$

Por la propiedad de los polinomios de Chebyshev, es el polinomio de menor error en la cota superior en cada punto del intervalo dado.

Luego, como el polinomio del Lagrangiano minimiza el área total del error, esto lleva a acotar de mejor manera a todos los puntos del intervalo, por lo que no puede haber mucho error en los puntos.

Como el polinomio de Lagrange solo interpola en los puntos dados, no tiene ninguna propiedad de que acota el error en todos los puntos del intervalo, por lo que su error es el mayor de todos.

Como vimos, cada uno de estos tres polinomios intenta de aproximar y/o interpolar a $f(x)$ en el intervalo $[1, 4]$ y cada polinomio tiene distintas propiedades descritas previamente, y según para lo que se necesite hacer con el polinomio, es cual se elige para construir.

8. Mínimos Cuadrados Ortogonales

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \min h^2 &= \min (x_0 - x)^2 + (y_0 - (a + bx))^2 \\
 \frac{\partial h}{\partial x} &= 2(x_0 - x)(-1) + 2(y_0 - (a + bx))(-b) = 0 \\
 (x_0 - x) + (y_0 - (a + bx))b &= 0 \\
 x_0 - x + by_0 - ab - b^2x &= 0 \\
 x(1 + b^2) &= x_0 + by_0 - ab \\
 \Rightarrow \hat{x}_0 &= \frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1} \\
 \Rightarrow \hat{y}_0 &= a + b \frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1} = \frac{bx_0 + b^2y_0 + a}{b^2 + 1} \\
 h_{\min}^2 &= (\hat{x}_0 - x_0)^2 + (\hat{y}_0 - y_0)^2 = \left(\frac{x_0 + by_0 - ab}{b^2 + 1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{bx_0 + b^2y_0 + a}{b^2 + 1} - y_0\right)^2 \\
 &= \left(\frac{by_0 - ab - b^2x_0}{b^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{a - y_0 + bx_0}{b^2 + 1}\right)^2 = \frac{(by_0 - ab - b^2x_0)^2 + (a - y_0 + bx_0)^2}{(b^2 + 1)^2} = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } E_{\perp}(a, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{(a - y_i + bx_i)^2}{b^2 + 1} \\
 \min E_{\perp}(a, b) &\Rightarrow \frac{\partial E_{\perp}}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{2(a - y_i + bx_i)}{b^2 + 1} = 0 \\
 \frac{\partial E_{\perp}}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n \frac{2(a - y_i + bx_i)x_i(b^2 + 1) - 2b(a - y_i + bx_i)^2}{(b^2 + 1)^2} = 0 \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i) &= 0 \Rightarrow a + b\bar{x} = \bar{y} \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i(b^2 + 1) - b(a - y_i + bx_i)^2 &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i(b^2 + 1) - b(a - y_i + bx_i)] &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i b^2 + x_i - ba + by_i - b^2x_i] &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)[x_i - ba + by_i] &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i - ab \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i) + b \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)y_i &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)x_i + b \sum_{i=1}^n (a - y_i + bx_i)y_i &= 0 \\
 a\bar{x} - S_{xy} + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} &= 0 \\
 \text{Entonces tenemos el sistema} \\
 a + b\bar{x} &= \bar{y} \\
 a\bar{x} - S_{xy} + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} &= 0
 \end{aligned}$$

iii) Remplazando

$$\begin{aligned}
 (\bar{y} - b\bar{x})\bar{x} - S_{xy} + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\bar{y} - b\bar{x})b\bar{y} - bS_y + b^2 S_{xy} &= 0 \\
 \bar{y}\bar{x} - b\bar{x}^2 - S_{xy} + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b\bar{y}^2 - b^2\bar{x}\bar{y} - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} &= 0 \\
 b^2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) + b(S_x^2 - S_y^2) - (S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) &= 0 \\
 b^2 + b \frac{(S_x^2 - S_y^2)}{(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} - 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} \pm \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}} \\
 \text{Ahora bien, si} \\
 \bar{y} > 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} + \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}} \\
 \bar{y} < 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2 - S_y^2)}{2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})} - \sqrt{\frac{(S_x^2 - S_y^2)^2 - 4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}} \\
 a = \bar{y} - b\bar{x}
 \end{aligned}$$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

- i) Ecuación a minimizar: $\min h^2 = (x - x_0)^2 + (p(x) - y_0)^2$. Para encontrar el punto hay que derivar con respecto a x e igualar a cero. Luego, al resolver el sistema, se encontrarán n soluciones, y al evaluar h^2 en cada una de estas, se elige la que hace a h^2 menor.
- ii) La recta $y = a + b\hat{x}$ cumple que $b = p'(\hat{x})$ y $p(\hat{x}) = a + b\hat{x}$
 $\Rightarrow y(x) = p(\hat{x}) + p'(\hat{x})(x - \hat{x}) = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) + xp'(\hat{x})$ (Taylor de 1° orden)
- iii) Por la parte (a) - i) $h_{\min}^2 = \frac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$, donde $a = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x})$ y $b = p'(\hat{x})$
 $\Rightarrow h_{\min}^2 = \frac{(p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) - y_0 + p'(\hat{x})x_0)^2}{p'(\hat{x})^2 + 1}$
- iv) Dados los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, el problema a minimizar es:
 $E_{\perp}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{(p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) - y_i + p'(\hat{x})x_i)^2}{p'(\hat{x})^2 + 1}$. Para resolverlo se debe derivar según a_j , $j = 0 \dots m$, donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$. Luego queda un sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ variables no lineal a resolver. El resultado siempre existe ya que el error no es acotado superiormente pero si inferiormente, ya que siempre $E_{\perp}(p) \geq 0$, por lo que el mínimo existe. En el caso que $n \leq m+1$, el polinomio resultante sería el polinomio interpolante, ya que en ese caso, $E_{\perp}(p) = 0$. En el caso que $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, el método también encuentra una solución, ya que el mínimo siempre existe, pero en el caso que $n \leq m+1$, el polinomio interpola solo los puntos con una única imagen, y se aproxima en los puntos con múltiples imágenes.

(c) Mínimos Cuadrados Ordinarios y Ortogonales

Con los puntos: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.

- i) De la parte a.ii), el sistema que resuelve es:

$$a + b\bar{x} = \bar{y}$$

$$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 S_{xy} = 0$$

Donde:

$$n = 3$$

$$\bar{x} = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1+3+2}{3} = 2$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 + 4 + 9 = 13$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 + 9 + 4 = 14$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{0+6+6}{3} = 4$$

Reemplazando:

$$a + b\frac{5}{3} = 2 \Rightarrow a = 2 - \frac{5}{3}b$$

$$a\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + ab2 - b\frac{14}{3} + b^2 4 = 0$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{5}{3}b)\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + (4 - \frac{10}{3}b)b - b\frac{14}{3} + b^2 4 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + \frac{4}{3}b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = -1.869 \quad b_2 = \frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{2}{3} = 0.5352$$

como todos los $y_i > 0$

$$\Rightarrow b = 0.5352$$

$$\Rightarrow a = 1.108$$

$$L_1 = 1.108 + 0.5352x$$

ii) El sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.286 \\ 0.4286 \end{bmatrix}$$

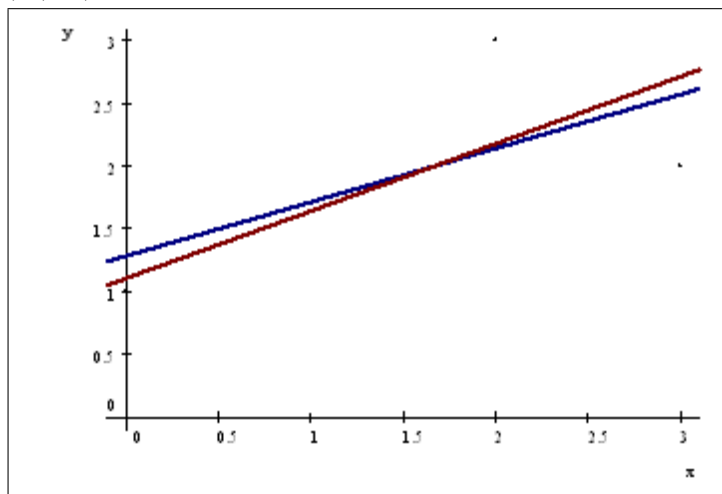
$$L2 = 1.286 + 0.4286x$$

iii) Grafique y compare $L1$ y $L2$.

Rojo: $L_1 = 1.108 + 0.5352x$

Azul: $L_2 = 1.286 + 0.4286x$

Negro: $(0, 1), (2, 3) (3, 2)$.



$L1$ tiene menor intercepto que $L2$, pero mayor pendiente, además se puede observar que el punto en donde ambas rectas se intercepta corresponde a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{3}, 2)$. La diferencia entre ambas rectas se basa en el hecho que $L2$ solo considera el error en el eje y , por lo que su pendiente será la que menor haga la suma de los errores verticales, mientras que $L1$ considera el error ortogonal, que es el error del eje x y del eje y , por lo que su pendiente será la que haga menor el error del eje x y del eje y . Esta consideración se basa en el hecho de que si el error de los datos es solo del eje x , la recta $L1$ tiene la propiedad que el error $\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|$, donde \hat{x}_i es tal que $L2(\hat{x}_i) = y_i$ es menor que cualquier otra recta.

9. Interpolación y aproximación

- (a) Forma: $p(x) = p_k(x)$ si $x \in [x_k, x_{k+1}] \forall k = 0 \dots n-1$, donde $p_k(x)$ son polinomios a determinar.

Condiciones:

- i. Interpolación: $p_k(x_k) = f(x_k) \forall k = 0 \dots n-1$ y $p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \Rightarrow n+1$ condiciones
 - ii. Continuidad: $p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) \forall k = 1 \dots n-1 \Rightarrow n-1$ condiciones
 - iii. 1° Derivada: $\frac{dp_{k-1}}{dx}(x_k) = \frac{dp_k}{dx}(x_k) \forall k = 1 \dots n-1 \Rightarrow n-1$ condiciones
 - iv. 2° Derivada: $\frac{d^2 p_{k-1}}{dx^2}(x_k) = \frac{d^2 p_k}{dx^2}(x_k) \forall k = 1 \dots n-1 \Rightarrow n-1$ condiciones
- Total condiciones: $4n-2$

Grado de los polinomios: Como tenemos n polinomios y $4n-2$ condiciones, entonces los polinomios deben ser de grado 3, ie, $p_k(x) = a_k + b_k x + c_k x^2 + d_k x^3$

Como podemos ver, este problema no tiene una única solución, ya que hay $4n$ incógnitas y $4n-2$ condiciones, por lo que se deben agregar dos condiciones adicionales (de borde por ejemplo) para que el sistema tenga solución única.

- (b) Al aumentar en un grado a los polinomios, estos serán de grado 4:

$$p_k(x) = a_k + b_k x + c_k x^2 + d_k x^3 + e_k x^4$$

Entonces, el problema de optimización con restricciones es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx \\ \text{s.a} \quad & p_k(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0 \dots n-1 \\ & p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \\ & p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) \quad \forall k = 1 \dots n-1 \\ & \frac{dp_{k-1}}{dx}(x_k) = \frac{dp_k}{dx}(x_k) \quad \forall k = 1 \dots n-1 \\ & \frac{d^2 p_{k-1}}{dx^2}(x_k) = \frac{d^2 p_k}{dx^2}(x_k) \quad \forall k = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

y dejándolo expresado en los coeficientes:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_k x + c_k x^2 + d_k x^3 + e_k x^4 - f(x))^2 dx \\ \text{s.a} \quad & a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 + d_k x_k^3 + e_k x_k^4 = f(x_k) \quad \forall k = 0 \dots n-1 \\ & a_{n-1} + b_{n-1} x_n + c_{n-1} x_n^2 + d_{n-1} x_n^3 + e_{n-1} x_n^4 = f(x_n) \\ & a_{k-1} + b_{k-1} x_k + c_{k-1} x_k^2 + d_{k-1} x_k^3 + e_{k-1} x_k^4 = a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 + d_k x_k^3 + e_k x_k^4 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \\ & b_{k-1} + 2c_{k-1} x_k + 3d_{k-1} x_k^2 + 4e_{k-1} x_k^3 = b_k + 2c_k x_k + 3d_k x_k^2 + 4e_k x_k^3 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \\ & 2c_{k-1} + 6d_{k-1} x_k + 12e_{k-1} x_k^2 = 2c_k + 6d_k x_k + 12e_k x_k^2 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

Este problema tiene solución única, ya que la función a minimizar siempre es positiva, así que el mínimo siempre se alcanza.

- (c) Si $p(x)$ es solo de clase C^0 , entonces las condiciones son:

- i. Interpolación: $p_k(x_k) = f(x_k) \forall k = 0 \dots n-1$ y $p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \Rightarrow n+1$ condiciones
- ii. Continuidad: $p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) \forall k = 1 \dots n-1 \Rightarrow n-1$ condiciones

Lo que da un total de $2n$ condiciones, por lo que los polinomios deben de ser grado 1, es decir: $p_k(x) = a_k + b_k x$

Este sistema tiene solución única, ya que son $2n$ condiciones y $2n$ incógnitas.

Al aumentar el grado de los polinomios, entonces estos quedan:

$$p_k(x) = a_k + b_k x + c_k x^2$$

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx \\ \text{s.a} \quad & p_k(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0 \dots n-1 \\ & p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \\ & p_{k-1}(x_k) = p_k(x_k) \quad \forall k = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

y dejándolo expresado en los coeficientes:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_k x + c_k x^2 - f(x))^2 dx \\ \text{s.a} \quad & a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 = f(x_k) \quad \forall k = 0 \dots n-1 \\ & a_{n-1} + b_{n-1} x_n + c_{n-1} x_n^2 = f(x_n) \\ & a_{k-1} + b_{k-1} x_k + c_{k-1} x_k^2 = a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \end{aligned}$$

En este caso, el problema de interpolación es simplemente calcular la recta $p_k(x)$ que interpola a x_k y a x_{k+1} , $\forall k = 0 \dots n-1$. Podemos ver que las rectas son independientes entre sí, ya que solo dependen de los puntos x_k y x_{k+1} . Entonces, al aumentar en un grado los polinomios, el problema de optimización general se puede resolver de forma independiente para cada trazo:

$$\begin{aligned} \min_{P_k) \quad & \int_{x_k}^{x_{k+1}} (a_k + b_k x + c_k x^2 - f(x))^2 dx \\ \text{s.a} \quad & a_k + b_k x_k + c_k x_k^2 = f(x_k) \\ & a_k + b_k x_{k+1} + c_k x_{k+1}^2 = f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\forall k = 0 \dots n-1$$

(d) Siguiendo las indicaciones para $f(x) = \cos^2 \pi x$, con la malla $\{0, 1, 2\}$:

- i. Considerando $p_1(x) = a + bx + cx^2$, plantemos el problema de mínimos cuadrados con las restricciones de interpolación en el intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^1 (a + bx + cx^2 - \cos^2 \pi x)^2 dx \\ \text{s.a} \quad & a = 1 \\ & a + b + c = 1 \end{aligned}$$

- ii. Con las restricciones:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ c &= -b \end{aligned}$$

- iii. Replantando el problema con 1 sola variable.

$$\min \quad \int_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)^2 dx$$

- iv. Resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} E(b) &= \int_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)^2 dx \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2 \int_0^1 (1 + b(x - x^2) - \cos^2 \pi x)(x - x^2) dx = 0 \\ \int_0^1 ((x - x^2) + b(x - x^2)^2) dx &= \int_0^1 (x - x^2) \cos^2 \pi x dx \\ \Rightarrow b &= \frac{\int_0^1 (x - x^2) \cos^2 \pi x dx - \int_0^1 (x - x^2) dx}{\int_0^1 (x - x^2)^2 dx} \end{aligned}$$

Calculando las integrales:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 (x - x^2) \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{30}} = -\frac{15}{2\pi^2} - \frac{5}{2}$$

$$p_1(x) = 1 - \left(\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2}\right)x^2$$

v. Por simetría de $f(x)$ y de la malla, $p_2(x)$ es solo una traslación de $p_1(x)$, es decir:

$$p_2(x) = p_1(x - 1)$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 1 - \left(\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2}\right)(x - 1) + \left(\frac{15}{2\pi^2} + \frac{5}{2}\right)(x - 1)^2$$

7 Ecuaciones No Lineales

7.1 Resumen de Materia

- Punto fijo:** Diremos que una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto fijo en x_0 ssi: $g(x_0) = x_0$.
- Ceros de una función:** Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un cero en x_0 ssi: $f(x_0) = 0$.
- Relación entre punto fijo y ceros:** Dado alguno de los dos problemas, se puede transformar en el otro tipo de problema:
 - Si x_0 es un punto fijo de $g(x)$, entonces x_0 es un cero de la función definida como $f(x) = x - g(x)$.
 - Si x_0 es un cero de $f(x)$, entonces x_0 es un punto fijo de la función definida como $g(x) = x - f(x)$.
- Teorema de punto fijo:** Sea $g(x)$ una función continua en $[a, b]$.
 - Si $a \leq g(x) \leq b \implies g(x)$ tiene un punto fijo $p \in [a, b]$.
 - Si $g(x)$ es derivable en (a, b) y $\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| < 1$ para $x \in (a, b) \implies$ el punto fijo es único.
- Método de punto fijo:** Si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo:
 - Partir con un $x_0 \in [a, b]$
 - La sucesión definida como $x_{k+1} = g(x_k)$ converge al punto fijo único de $g(x)$.
- Método de la Bisección:** Si $f(x)$ tiene una sola raíz $\bar{x} \in [a, b]$, entonces:
 - Sean $\alpha_0, \beta_0 \in [a, b]$ tal que $f(\alpha_0)$ y $f(\beta_0)$ tengan distinto signo, es decir: $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$. Sea ε la precisión buscada.
 - Se define $\varepsilon_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}$.
 - Si $|f(\varepsilon_k)| \leq \varepsilon$, terminar y $\bar{x} \simeq \varepsilon_k$.
 - Si $f(\varepsilon_k)f(\alpha_k) < 0$, entonces $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \varepsilon_k$.
 - En caso contrario, si $f(\varepsilon_k)f(\beta_k) < 0$, entonces $\alpha_{k+1} = \varepsilon_k$, $\beta_{k+1} = \beta_k$.
 - Volver a (b).
 - El numero de iteraciones será cercano a $n = \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$
- Método de la Secante:** Si $f(x)$ tiene una sola raíz $\bar{x} \in [a, b]$, entonces:
 - Sean x_0, x_1 dos aproximaciones iniciales de \bar{x} .
 - La recta que interpola a $f(x)$ en x_k, x_{k-1} es: $L_n(x) = f(x_k) + (x - x_k) \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$
 - Se define x_{k+1} la nueva aproximación de \bar{x} que cumple $L_n(x_{k+1}) = 0$.
 - Despejando se obtiene la sucesión: $x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
- Método de Newton - Raphson:** Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ regular, por Taylor se obtiene que $f(\bar{x}) = f(x) + f'(x)(\bar{x} - x) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(\bar{x} - x)^2$. Si \bar{x} es un cero de $f(x)$, entonces si $|\bar{x} - x| \approx 0 \implies \bar{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
 - Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ cercano a \bar{x} .
 - $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Convergencia del Método de Newton:** Sea $f(x) \in \zeta^2[a, b]$. Sea \bar{x} tal que $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de newton genera una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ que converge a \bar{x} para cualquier $x_0 \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

10. **Orden de convergencia:** Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a \bar{x} , construida por un método iterativo. Sea $e_n = \bar{x} - x_n$ el error cometido por la n -ésima iteración. Se dirá que el método es de orden p si existe una constante c tal que: $|e_{n+1}| \leq c |e_n|^p$

(a) **Bisección:** $e_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}) \implies p = 1$

(b) **Secante:** $e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}$, con $\xi_n \in \overline{CO}(\bar{x}, x_n, x_{n-1})$, $\eta_n \in \overline{CO}(x_n, x_{n-1}) \implies p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(c) **Newton:** $e_{n+1} = -e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$, con $\xi_n \in \overline{CO}(\bar{x}, x_n) \implies p = 2$

11. **Multiplicidad de una raíz:** sea una función $f(x)$ con raíz \bar{x} . Se dice que la multiplicidad de la raíz \bar{x} es m si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{(x - \bar{x})^k} = 0 \text{ con } k = 0 \dots m$$

Para un método iterativo, que aproxima una raíz \bar{x} con multiplicidad m , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \right| = \frac{m-1}{m}$$

12. **Método modificado de Newton:** si \bar{x} es una raíz con multiplicidad m , entonces el método modificado de Newton: $x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, converge a \bar{x} en orden cuadrático.

13. Raíces de Polinomios: Método de Graeffe

- (a) Sea el un polinomio $p_0(x)$ de grado n . Entonces tiene n raíces, a_1, \dots, a_n , y el polinomio se puede escribir como:

$$p_0(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

- (b) Si multiplicamos el polinomio $p_0(x)$ por el polinomio $p_0(-x)$, el polinomio resultante tendrá las mismas raíces que $p_0(x)$, pero al cuadrado:

$$p(x)p(-x) = (-1)^n (x^2 - a_1^2)(x^2 - a_2^2) \dots (x^2 - a_n^2)$$

- (c) A este polinomio le aplicamos un cambio de variable cuadrático y lo llamamos $p_1(x)$, es decir:

$$p_1(x) = (-1)^n (x - a_1^2)(x - a_2^2) \dots (x - a_n^2)$$

- (d) Repitiendo este procedimiento m veces obtendremos:

$$p_m(x) = (-1)^{mn} (x - a_1^{2^m})(x - a_2^{2^m}) \dots (x - a_n^{2^m})$$

- (e) Expandiendo $p_m(x)$ obtenemos:

$$p_m(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

Donde $x_1 \dots x_n$ son las n raíces de $p_m(x)$, y se cumple que $x_k = a_k^{2^m}$

- (f) Los coeficientes obtenidos gracias a la fórmula de Vieta tienen la forma:

- i. $b_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$
- ii. $b_2 = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n)$
- iii. ...
- iv. $b_n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$

- (g) En la supocisión que $|a_n| < |a_{n-1}| < \dots < |a_1| \implies |y_n| << |y_{n-1}| << \dots << |y_1|$
Luego, podemos aproximar los coeficientes de la siguiente forma:

$$b_k \approx (-1)^k \prod_{j=1}^k y_j$$

- (h) Luego, las soluciones (sus valores absolutos) las obtenemos de forma inductiva:

i. $y_1 \approx -b_1 \implies |a_1| \approx \sqrt[2^m]{-b_1}$

ii. $k = 2 \dots n$
 $y_k = -\frac{b_k}{b_{k-1}} \implies |a_k| \approx \sqrt[2^m]{-\frac{b_k}{b_{k-1}}}$

7.2 Problemas

- Usando una aritmética de 4 cifras significativas con redondeo, aplique el método de newton - raphson para resolver la siguiente ecuación: $f(x) = x$, donde $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(\pi x^2)$. Tome $x_0 = \frac{3}{4}$
- Demuestre que el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Resuelva la ecuación $\sin(x) - x = 0$ con el método de newton, partiendo con $x_0 = 1$. Aproxime la multiplicidad de la raíz por las iteraciones de newton. Aplique el método de newton modificado. Vea a que solución converge el método y vea cual es la multiplicidad de la raíz teórica. Compare ambos métodos. Use 3 cifras significativas.
- Encuentre las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ usando el método de Graeffe.
- El polinomio de cuarto grado:

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$$

tiene un cero cerca de 1.1. Determine este cero aplicando los métodos de:

- La Bisección
 - Newton-Raphson
- En la molécula diatómica de la sal común, cloruro de sodio NaCl, el potencial de interacción entre los iones Na⁺ y Cl⁻ está dado por:

$$V(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$$

donde r es la distancia que los separa, q es la carga del protón, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, y V_0 y r_0 son constantes que dependen de la molécula. Los datos para la molécula NaCl son:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 14.4 [\text{\AA} \cdot eV] \quad V_0 = 1090 [eV] \quad r_0 = 0.33 [\text{\AA}]$$

Para que la molécula esté en equilibrio, la fuerza de interacción entre los iones debe ser cero, y se cumple la siguiente relación entre fuerza y potencial:

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Se desea encontrar la distancia entre los iones, cuando la molécula está en equilibrio. Para esto, sigamos los siguientes pasos (Para todo el problema, use una aritmética finita de 4 cifras significativas con redondeo):

- Plantee el sistema no lineal a resolver. Compruebe la existencia de un cero dentro del intervalo $[2, 4]$
- Se proponen dos métodos para obtener un punto inicial r_0 para aplicar el método de Newton.
 - El polinomio normalizado de aproximación por mínimos cuadrados de $f(r)$ en el intervalo $[2, 4]$ es:

$$p(x) = x^3 - 9.55x^2 + 29.9x - 30.6$$

Se desea aproximar las raíces de $f(r)$ por las raíces reales de $p(x)$. Haga 2 iteraciones del método de Graeffe aplicado al polinomio $p(x)$, y de las tres raíces obtenidas, quédese con aquella que hace a $f(r)$ más cercano a cero. Llame a este punto inicial r_1 .

Obs: $(x^3 + ax^2 + bx + c)(-x^3 + ax^2 - bx + c) = -x^6 + (a^2 - 2b)x^4 + (2ac - b^2)x^2 + c^2$

- Haga 2 iteraciones con el método de la Bisección, y luego quédese con el punto medio del intervalo encontrado. Llame a este punto inicial r_2 .
- Aplicando el método de Newton
 - Haga 1 iteración del método de Newton a partir de r_1 . Llame a este resultado d_1 .
 - Haga 1 iteración del método de Newton a partir de r_2 . Llame a este resultado d_2 .
- Determine el número de operaciones para calcular r_1 y r_2 . Compare la precisión de las soluciones d_1 y d_2 .

7.3 Respuestas

1. Newton - raphson

$x_0 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Usando una aritmetica de 4 cifras significativas con redondeo.

Se define $g(x) = f(x) - x \implies g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(\pi x^2) - x$

Se calcula $g'(x) = x - \pi \cos(\pi x) + \pi x \sin(\pi x^2) - 1$

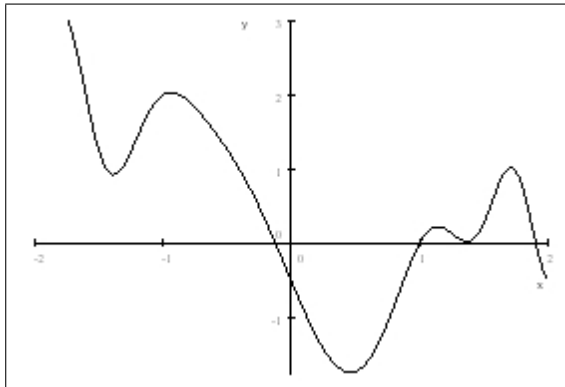
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{2}x_k^2 - \sin(\pi x_k) - \frac{1}{2}\cos(\pi x_k^2) - x_k}{x_k - \pi \cos(\pi x_k) + \pi x_k \sin(\pi x_k^2) - 1}$$

k	x_k	x_k^2	$\sin(\pi x_k)$	$\cos(\pi x_k)$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}^2 = 0.5625$	$\sin(\pi \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos(\pi \frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
1	$\frac{3}{4} + 0.2518 = 1.002$	$1.002^2 = 1.004$	$\sin(1.002\pi) = -0.006283$	$\cos(1.002\pi) = -1$
2	$1.002 - 0.002012 = 1$	1	0	-1

k	$x_k \sin(\pi x_k^2)$	$\cos(\pi x_k^2)$	$g(x_k)$	$g'(x_k)$
0	$\frac{3}{4} \sin(\pi \frac{3}{4}^2) = 0.7356$	$\cos(\pi \frac{3}{4}^2) = -0.1951$	$g(\frac{3}{4}) = -1.078$	$g'(\frac{3}{4}) = 4.282$
1	$1.002 \sin(\pi 1.002^2) = -0.0126$	$\cos(\pi 1.002^2) = -0.9999$	$g(1.002) = 0.006246$	$g'(1.002) = 3.104$
2	0	-1	$g(1) = 0$	

k	$\frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$
0	$\frac{-1.078}{4.282} = -0.2518$
1	$\frac{0.006246}{3.104} = 0.002012$
2	

La solución es $\bar{x} = 1$



2. Orden de convergencia del método de la Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, e_n = \bar{x} - x_n, |e_{n+1}| \leq c |e_n|^p, e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}$$

Busquemos e_{n+1} en función de e_n y e_{n-1} .

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(\eta)(x_n - x_{n-1}) \implies f'(\eta) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \eta \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n)$$

Error de Lagrange: $f(x) - L_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \frac{f''(\xi)}{2}$, con $L_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

$$f(\bar{x}) = 0 \implies L_n(\bar{x}) = -(\bar{x} - x_n)(\bar{x} - x_{n-1}) \frac{f''(\xi)}{2}, \xi \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n, \bar{x})$$

Por contrucción del método, $L_n(x_{n+1}) = 0 \implies f(x_n) = -(x_{n+1} - x_n)f'(\eta)$

Luego $L_n(x) = -(x_{n+1} - x_n)f'(\eta) + (x - x_n)f'(\eta) = (x - x_{n+1})f'(\eta)$

Entonces $L_n(\bar{x}) = (\bar{x} - x_{n+1})f'(\eta) = e_{n+1}f'(\eta)$ y $L_n(\bar{x}) = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi)}{2}$

Finalmente, $e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}$, $\xi \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n, \bar{x})$, $\eta \in \overline{CO}(x_{n-1}, x_n)$

Ahora, $|e_{n+1}| \leq |e_n| |e_{n-1}| M \iff M |e_{n+1}| \leq M |e_n| M |e_{n-1}|$

Sea $\delta = \max\{M |e_0|, M |e_1|\} < 1$. Entonces $M |e_2| \leq \delta\delta = \delta^2 < \delta$.

$M |e_3| \leq \delta^2\delta = \delta^3$, $M |e_4| \leq \delta^3\delta^2 = \delta^5$.

Si definimos $q_n \in \mathbb{N}$ de modo que $M |e_n| \leq \delta^{q_n}$, entonces tenemos la ecuación $M |e_{n+1}| \leq \delta^{q_n} \delta^{q_{n-1}} = \delta^{q_{n+1}}$

La ecuación recursiva queda $q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$, con $q_0 = 1, q_1 = 1$

Suponiendo $q_n = \lambda^n$, entonces $\lambda^n + \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1} \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

Las soluciones son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \implies q_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$M |e_{n+1}| \leq \delta^{q_{n+1}} = \delta^{c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \delta^{c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$, pero como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.618$, entonces $\delta^{c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$ se puede acotar por una constante

Se define $B_n = k\delta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$. B_n tiene orden de convergencia $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ya que $B_{n+1} = k\delta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = k\delta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} B_n^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = cB_n^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$. Luego, como $e_n \leq B_n$, entonces e_n tiene un orden de convergencia menor o igual a $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. $\sin(x) - x = 0$, $x_0 = 1$

(a) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$

k	x_k	$\sin(x_k)$	$\cos(x_k)$	$\frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$
0	1	0.841	0.540	$\frac{0.841-1}{0.540-1} = 0.346$
1	$1 - 0.346 = 0.654$	0.608	0.794	$\frac{0.608-0.654}{0.794-1} = 0.223$
2	$0.654 - 0.223 = 0.431$	0.418	0.909	$\frac{0.418-0.431}{0.909-1} = 0.143$
3	$0.431 - 0.143 = 0.288$	0.284	0.959	$\frac{0.284-0.288}{0.959-1} = 0.098$
4	$0.288 - 0.098 = 0.19$	0.189	0.982	$\frac{0.189-0.19}{0.982-1} = 0.0556$
5	$0.19 - 0.0556 = 0.134$	0.134	0.991	$\frac{0.134-0.134}{0.991-1} = 0$

(b) $\frac{0.134-0.19}{0.19-0.288} = 0.571 \implies m \simeq \frac{1}{1-0.571} = 2.331\ 002\ 331\ 002\ 331\ 002\ 39$
 $\implies m = 2$

(c) $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - 2 \frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$

k	x_k	$\sin(x_k)$	$\cos(x_k)$	$\frac{\sin(x_k) - x_k}{\cos(x_k) - 1}$
0	1	0.841	0.540	$\frac{0.841-1}{0.540-1} = 0.346$
1	$1 - 2 \times 0.346 = 0.308$	0.303	0.953	$\frac{0.303-0.308}{0.953-1} = 0.106$
2	$0.308 - 2 \times 0.106 = 0.096$	9.59×10^{-2}	0.995	$\frac{9.59 \times 10^{-2} - 0.096}{0.995-1} = 0.02$
3	$0.096 - 2 \times 0.02 = 0.056$	5.6×10^{-2}	0.998	$\frac{5.6 \times 10^{-2} - 0.056}{0.998-1} = 0$

(d) $\bar{x} = 0$. Usando L'Hôpital para calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\cos(x) - 1}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{-\sin(x)}{k(k-1)x^{k-2}} = 0 \text{ si } k = 2.$$

Luego, $\bar{x} = 0$ tiene multiplicidad $m = 2$.

(e) Claramente al modificar el método de newton, la convergencia es mucho más rápida, ya que en solo 3 iteraciones usando el método modificado, la respuesta es mucho más exacta que al hacer 5 iteraciones con el método original.

4. Método de Graeffe:

$$p_0(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$p_0(-x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$$

$$p_0(x)p_0(-x) = (x^3 - 4x^2 + x + 6)(-x^3 - 4x^2 - x + 6) = 14.0x^4 - 49.0x^2 - x^6 + 36.0 = p_1(x^2)$$

$$p_1(x) = -x^3 + 14x^2 - 49x + 36$$

$$p_1(-x) = x^3 + 14x^2 + 49x + 36$$

$$p_1(-x)p_1(x) = (x^3 + 14x^2 + 49x + 36)(-x^3 + 14x^2 - 49x + 36)$$

$$= -x^6 + 98x^4 - 1393x^2 + 1296 = p_2(x^2)$$

$$p_2(x) = -x^3 + 98x^2 - 1393x + 1296$$

$$p_2(-x) = x^3 + 98x^2 + 1393x + 1296$$

$$p_2(-x)p_2(x) = (x^3 + 98x^2 + 1393x + 1296)(-x^3 + 98x^2 - 1393x + 1296)$$

$$= -x^6 + 6818x^4 - 1686433x^2 + 1679616$$

$$p_3(x) = -x^3 + 6818x^2 - 1686433x + 1679616$$

$$x_1 = 6818$$

$$\Rightarrow |a_1| = \sqrt[2]{6818} = 3.0144433358905717064 \approx 3$$

$$x_2 = \frac{1686433}{6818} = 247.35010266940451745$$

$$\Rightarrow |a_2| = \sqrt[2]{247.35010266940451745} = 1.9914252613122453991 \approx 2$$

$$x_3 = \frac{1679616}{1686433} = 0.9959577403905165518$$

$$\Rightarrow |a_3| = \sqrt[2]{0.9959577403905165518} = 0.99949382169842347109 \approx 1$$

$$p(3) = 0$$

$$p(2) = 0$$

$$p(-1) = 0$$

5. Usaremos 4 cifras significativas con redondeo

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1, \bar{x} \in [1.1 - \varepsilon, 1.1 + \varepsilon]$$

(a) Sea $x_0 = 1, x_1 = 1.2 \Rightarrow p(1) = -1, p(1.2) = 1.2^4 + 1.2^3 - 1.2^2 - 1.2 - 1 = 0.1616$

i. $x_2 = \frac{1+1.2}{2} = 1.1 \Rightarrow p(1.1) = 1.1^4 + 1.1^3 - 1.1^2 - 1.1 - 1 = -0.5149$

$$x_3 = \frac{1.1+1.2}{2} = 1.15 \Rightarrow p(1.15) = 1.15^4 + 1.15^3 - 1.15^2 - 1.15 - 1 = -0.2026$$

$$x_4 = \frac{1.15+1.2}{2} = 1.175 \Rightarrow p(1.175) = 1.175^4 + 1.175^3 - 1.175^2 - 1.175 - 1 = -0.02727$$

$$x_5 = \frac{1.175+1.2}{2} = 1.188 \Rightarrow p(1.188) = 1.188^4 + 1.188^3 - 1.188^2 - 1.188 - 1 = 0.06922$$

$$x_6 = \frac{1.188+1.175}{2} = 1.182 \Rightarrow p(1.182) = 1.182^4 + 1.182^3 - 1.182^2 - 1.182 - 1 = 0.02423$$

$$x_7 = \frac{1.182+1.175}{2} = 1.179 \Rightarrow p(1.179) = 1.179^4 + 1.179^3 - 1.179^2 - 1.179 - 1 = 0.002031$$

(b) $p'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 + x_k^3 - x_k^2 - x_k - 1}{4x_k^3 + 3x_k^2 - 2x_k - 1}$

$$x_1 = 1.1 - \frac{1.1^4 + 1.1^3 - 1.1^2 - 1.1 - 1}{4 \times 1.1^3 + 3 \times 1.1^2 - 2 \times 1.1 - 1} = 1.1 - \frac{1.464 + 1.331 - 1.21 - 1.1 - 1}{5.324 + 3.63 - 2.2 - 1} = 1.1 - \frac{-0.515}{5.754} = 1.1 + 0.0895$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.19$$

$$x_2 = 1.19 - \frac{1.19^4 + 1.19^3 - 1.19^2 - 1.19 - 1}{4 \times 1.19^3 + 3 \times 1.19^2 - 2 \times 1.19 - 1} = 1.19 - \frac{2.005 + 1.685 - 1.416 - 1.19 - 1}{6.741 + 4.248 - 2.38 - 1} = 1.19 - \frac{0.084}{7.609} = 1.19 - 0.01104$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.179$$

$$x_3 = 1.179 - \frac{1.179^4 + 1.179^3 - 1.179^2 - 1.179 - 1}{4 \times 1.179^3 + 3 \times 1.179^2 - 2 \times 1.179 - 1} = 1.179 - \frac{1.932 + 1.639 - 1.390 - 1.179 - 1}{6.555 + 4.170 - 2.358 - 1} = 1.179 - \frac{0.002}{7.367} = 1.179$$

$$\Rightarrow x_3 = 1.179$$

6. Ecuaciones No-Lineales

- (a) Plantear el sistema y existencia de la raíz

$$f(r) = 0 \iff \frac{dV(r)}{dr} = 0$$

$$\implies V(r) = -\frac{14.4}{r} + 1090 \times e^{-\frac{r}{0.33}}$$

$$\implies f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}}$$

$$(*) \left[\frac{14.4}{r^2} - 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 0 \right]$$

$$f(2) = -\frac{14.4}{2^2} + 3303 \times e^{-\frac{2}{0.33}} = -3.6 + 3303 \times e^{-6.061} = -3.6 + 3303 \times 0.002332 = 4.103$$

$$f(4) = -\frac{14.4}{4^2} + 3303 \times e^{-\frac{4}{0.33}} = -0.9 + 3303 \times 0.000005443 = -0.882$$

como $f(2) > 0$ y $f(4) < 0 \implies \exists \bar{x} \in (2, 4)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$

Forma alternativa:

$$g(x) = x + \frac{14.4}{x^2} - 3303 \times e^{-\frac{x}{0.33}}$$

$$g(2) = 2 - 4.103 = -2.103$$

$$g(4) = 4 + 0.882 = 4.882$$

como $g(2) < 2$ y $g(4) > 4 \implies \exists \bar{x} \in (2, 4)$ tal que $g(\bar{x}) = \bar{x}$

- (b) Encontrar punto inicial

- i) Aproximar la raíz por mínimos cuadrados y Graeffe

A. $p_0(x) = x^3 - 9.55x^2 + 29.9x - 30.6$

$$a_0 = -9.55, \quad b_0 = 29.9, \quad c_0 = -30.6$$

$$a^2 - 2b = 9.55^2 - 2 \times 29.9 = 31.4$$

$$2ac - b^2 = 2 \times 30.6 \times 9.55 - 29.9^2 = 584.5 - 894 = -309.5$$

$$c^2 = 30.6^2 = 936.4$$

B. $p_1(x) = -x^3 + 31.4x^2 - 309.5x + 936.4$

$$a_1 = 31.4, \quad b_1 = 309.5, \quad c_1 = 936.4$$

$$a^2 - 2b = 31.4^2 - 2 \times 309.5 = 986 - 619 = 367$$

$$2ac - b^2 = 2 \times 31.4 \times 936.4 - 309.5^2 = 58810 - 95790 = -36980$$

$$c^2 = 936.4^2 = 876800$$

C. $p_2(x) = -x^3 + 367x^2 - 36980x + 876800$

$$y_1 = 367 \implies x_1 = \sqrt[4]{367} = 4.3768989091213903270 \approx 4.377$$

$$y_2 = \frac{36980}{367} = 100.8 \implies x_2 = \sqrt[4]{100.8} = 3.1685833298824423651 \approx 3.169$$

$$y_3 = \frac{876800}{36980} = 23.71 \implies x_3 = \sqrt[4]{23.71} = 2.20647123936208399 \approx 2.207$$

D. $f(4.377) = -\frac{14.4}{4.377^2} + 3303 \times e^{-\frac{4.377}{0.33}} = -0.74590348616898444388$

$$f(3.169) = -\frac{14.4}{3.169^2} + 3303 \times e^{-\frac{3.169}{0.33}} = -1.2108660505311620663$$

$$f(2.207) = -\frac{14.4}{2.207^2} + 3303 \times e^{-\frac{2.207}{0.33}} = 1.1589196762313872714$$

Hay una raíz entre 2.207 y 3.169

$$\implies \underline{r_1 = 2.207}$$

- ii) Método de la Bisección

A. $f(2) = 4.103 > 0$

$$f(4) = -0.882 < 0$$

B. $\frac{2+4}{2} = 3$

$$f(3) = -\frac{14.4}{3^2} + 3303 \times e^{-\frac{3}{0.33}} = -1.228 < 0$$

C. $\frac{3+2}{2} = 2.5$

$$f(2.5) = -\frac{14.4}{2.5^2} + 3303 \times e^{-\frac{2.5}{0.33}} = -0.61044672782066220821 < 0$$

D. $\frac{2+2.5}{2} = 2.25$

$$\implies \underline{r_2 = 2.25}$$

(c) Método de Newton

$$f(r) = -\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}}$$

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}}$$

$$g(r) = r - \frac{-\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}}}{\frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}}}$$

i) $r_1 = 2.207$

A. $-\frac{14.4}{r^2} = -\frac{14.4}{2.207^2} \approx -2.956$

B. $-\frac{r}{0.33} = -\frac{2.207}{0.33} \approx -6.688$

C. $e^{-\frac{r}{0.33}} = e^{-6.688} \approx 1.246 \times 10^{-3}$

D. $3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 3303 \times 1.246 \times 10^{-3} \approx 4.116$

E. $-\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = -2.956 + 4.116 \approx 1.16$

F. $\frac{28.8}{r^3} = \frac{28.8}{2.207^3} \approx 2.679$

G. $10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 10010 \times 1.246 \times 10^{-3} \approx 12.47$

H. $\frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 2.679 - 12.47 = -9.791$

I. $\frac{-\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}}}{\frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}}} = \frac{1.16}{-9.791} \approx -0.1185$

J. $g(r_1) = 2.207 + 0.1185 \approx 2.326$

K. $\Rightarrow \underline{d_1 = 2.326}$

ii) $r_2 = 2.25$

A. $-\frac{14.4}{r^2} = -\frac{14.4}{2.25^2} = -\frac{14.4}{5.063} = -2.844$

B. $-\frac{r}{0.33} = -\frac{2.25}{0.33} = -6.818$

C. $e^{-\frac{r}{0.33}} = e^{-6.818} = 0.001094$

D. $3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 3303 \times 0.001094 = 3.613$

E. $-\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = -2.844 + 3.613 = 0.769$

F. $\frac{28.8}{r^3} = \frac{28.8}{2.25^3} = \frac{28.8}{11.39} = 2.529$

G. $10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 10010 \times 0.001094 = 10.95$

H. $\frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}} = 2.529 - 10.95 = -8.421$

I. $\frac{-\frac{14.4}{r^2} + 3303 \times e^{-\frac{r}{0.33}}}{\frac{28.8}{r^3} - 10010 \times e^{-\frac{r}{0.33}}} = \frac{0.769}{-8.421} = -0.09132$

J. $g(r_2) = 2.25 + 0.09132 = 2.341$

K. $\Rightarrow \underline{d_2 = 2.341}$

(d) Comparación de los resultados

i) Número de Operaciones

$evalf = 6 \text{ ops}$

A. $r_1 : 2(9) + 2 + 3 + 3evalf = 23 + 3 \times 6 = 41$

B. $r_2 : 6 + 4evalf = 6 + 4 \times 6 = 30$

ii) Precisión

A. $E_{abs}(d_1) = |f(d_1) - 0| = f(2.326) \approx 0.2078$

B. $E_{abs}(d_2) = |f(d_2) - 0| = f(2.341) \approx 0.1143$

iii) Conclusión

El segundo método, utilizando Bisección, es menos costoso en número de operaciones que el método de Graeffe, y la solución entregada fue mejor punto inicial, por lo que el segundo método es más eficiente.

8 Sistema de Ecuaciones No Lineales

8.1 Resumen de Materia

1. **Campo Vectorial:** $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{F}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$, donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, $i = 1 \dots n$.
2. **Punto Fijo:** $\vec{F}(x)$ tiene un punto fijo \bar{x} en $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ si $\vec{F}(\bar{x}) = \bar{x}$
3. **Teorema de punto fijo:** Sea $\vec{F}(x)$ un campo vectorial continuo en D
 - (a) Si $\vec{F}(x) \in D \ \forall x \in D \implies \vec{F}(x)$ tiene un punto fijo en D .
 - (b) Si $\vec{F}(x)$ es derivable con continuidad en D y $\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| < \frac{K}{n} \ \forall x \in D, \forall i, j = 1 \dots n$ con $K < 1 \implies$ el punto fijo es único
4. **Método de punto fijo:** Si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo:
 - (a) Partir con un $x_0 \in D$
 - (b) La sucesión definida como $x_{k+1} = \vec{F}(x_k)$ converge al punto fijo único de $\vec{F}(x)$.
5. **Ceros de un campo vectorial:** Diremos que un campo vectorial $\vec{F}(x)$ tiene un cero en x_0 ssi: $\vec{F}(x_0) = \vec{0}$.
6. **Método de Newton – Kantorovich:** Dado un campo vectorial $\vec{F}(x)$ regular, el Teorema de Taylor en \mathbb{R}^n nos asegura que $\vec{F}(\bar{x}) = \vec{F}(x) + \nabla \vec{F}(x)(\bar{x} - x) + O(\|\bar{x} - x\|^2)$. Si $\|\bar{x} - x\| \approx 0 \implies \bar{x} = x - \left[\nabla \vec{F}(x) \right]^{-1} \vec{F}(x)$.
 - (a) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cercano a \bar{x}
 - (b) $x_{k+1} = x_k - \left[\nabla \vec{F}(x_k) \right]^{-1} \vec{F}(x_k)$
7. **Método de Optimización de Newton-Kantorovich:** Dada una función $f(\vec{x})$, y un vector inicial \vec{x}_0 que aproxima un mínimo (máximo) de $f(\vec{x})$, el método iterativo de Newton-Kantorovich es:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - H_f(\vec{x}_k)^{-1} \nabla f(\vec{x}_k)$$
8. **Dirección de descenso:** Dado un problema de minimización: $\min f(x)$

una dirección de descenso \vec{d} para $f(x)$ en un determinado \bar{x} , debe cumplir que

$$\exists \alpha > 0, f(\bar{x} + \lambda \vec{d}) < f(\bar{x}), \ 0 \leq \lambda \leq \alpha.$$

Si f es diferenciable, \vec{d} es dirección de descenso $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) \cdot \vec{d} < 0$

 - (a) Método del gradiente: $\vec{d} = -\nabla f(\bar{x})$
 - (b) Método de Newton: $\vec{d} = -H_f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x})$
9. **Paso óptimo:** Dado un problema de minimización: $\min f(x)$, una aproximación \bar{x} del mínimo y una dirección de descenso \vec{d} para $f(\bar{x})$, el paso $\bar{\lambda}$ óptimo es aquel que cumple:

$$\min_{s.a. \ \lambda > 0} f(\bar{x} + \lambda \vec{d}) \implies \nabla f(\bar{x} + \bar{\lambda} \vec{d}) \cdot \vec{d} = 0$$

8.2 Problemas

- Usando una aritmetica de 4 cifras significativas con redondeo, aplique el método de newton - kantorovich para encontrar ceros del siguiente campo vectorial: $F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4}(\sin x_1 - \cos x_2) \end{bmatrix}$. Tome $x_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$
- Resuelva el siguiente SENL mediante el Método de Newton-Kantorovich:

$$\begin{bmatrix} x \sin(y) \\ y \cos(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Usando una aritmetica de 2 cifras significativas con redondeo y partiendo con $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, haga 2 iteraciones. Calcule el error absoluto de dicha solución.

- Newton – Kantorovich y paso óptimo
 - Demuestre que el método de Newton – Kantorovich encuentra la solución al problema:
 $\min \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$
 en una sola iteración, y desde cualquier punto inicial x_0 . Suponga que Q es definida positiva.
 - Considere el problema de aproximación polinomial:
 $\min \int_0^1 (e^x - p(x))^2 dx$, donde $p(x)$ es un polinomio de segundo grado tal que $p(0) = 1$. Resuelva el problema usando el método de Newton.
 - Resuelva el problema anterior usando metodo del gradiente con paso óptimo
- Aproximación del mínimo
 - Se desea aproximar por mínimos cuadrados la función $f(x) = x \ln x$ por un polinomio $p(x)$ de grado 2, en el intervalo $[0, 1]$, y además que $p(0) = 0$, es decir, resolver:

$$\min E(p) = \int_0^1 (p(x) - x \ln x)^2 dx$$

- De la forma de $p(x)$ y aplique la condicion de interpolación para encontrar alguna constante.
 - Muestre que E se puede expresar de la forma $\frac{1}{2}x^t Qx + r^t x$.
 - Aplique el método de Newton-Kantorovich para encontrar $p(x)$. Eliga un punto inicial de forma que facilite los cálculos.
 Hint: $\int x^n \ln x dx = x^n \left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{x}{2n+n^2+1} \right)$
- Ahora se desea buscar el mínimo de $f(x) = x \ln x$. Usando como punto inicial el mínimo de $p(x)$, itere el método de Newton Raphsody para encontrar \bar{x} , el mínimo de $f(x)$. Comparare \bar{x} con e^{-1} .

5. Modelación y Optimización:

(a) Modelación:

Un artesano desea contruir una tienda de genera de forma cilindrica con el techo de forma semiesferico. El desea maximizar el volumen de su tienda, pero con la restricción que él dispone de un capital D para comprar el género, que cuesta C por métro cuadrado. Plantee el modelo de optimización, indicando variables, función objetivo y restricciones.

(b) Resolución:

El artesano saco sus cuentas y dispone de \$100.000 para comprar el genero. Una costurera amiga le ofreció \$1000 por metro cuadrado de un excelente género importado.

- i. De la restricción del modelo, despeje una variable en función de las demás.
- ii. Plantee el modelo equivalente al original, pero sin restricciones.
- iii. Intente de resolver el problema usando el método del gradiente conjugado. ¿Cuál es el inconveniente que presenta? Explique.
- iv. Una estimación rápida dice que el diámetro de la tienda es 10 metros. Encuentre la solución óptima al problema, y calcule el volumen de la tienda.

6. Sea $f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^t \cdot Q \cdot \vec{x}$, con Q matriz simétrica definida positiva

(a) Determine el óptimo de f

(b) Demuestre que aplicando el método de Newton-Kantorovich para el encontrar el óptimo de f se necesita solo una iteración

(c) Aplique lo anterior para $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 4x + 2y$

8.3 Respuestas

1. $F(x_1, x_2) = \left[\begin{array}{c} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4}(\sin x_1 - \cos x_2) \end{array} \right] \cdot x_0 = \left[\begin{array}{c} 0.25 \\ 0.25 \end{array} \right]$. Primero encontremos la formula explicita

(a) Calculamos $\nabla F(x_1, x_2) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 10x_1 & -2x_2 \\ -\frac{1}{4} \cos x_1 & 1 - \frac{1}{4} \sin x_2 \end{array} \right]$

(b) Invertimos $\nabla F(x_1, x_2) : \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{10x_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 10x_1 & -2x_2 \\ -\frac{1}{4} \cos x_1 & 1 - \frac{1}{4} \sin x_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ -\frac{1}{4} \cos x_1 & -\frac{1}{4} \sin x_2 + 1 \end{array} \right]$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} \cos x_1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ -\frac{1}{4} \cos x_1 & -\frac{1}{4} \sin x_2 + 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & -\frac{1}{4} \sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & -\frac{1}{4} \sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{5x_1}x_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \sin x_2 - \frac{1}{20x_1}x_2 \cos x_1 + 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} \cos x_1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{10x_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\sin x_2 - 4}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -4 \frac{x_2}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \\ -\frac{1}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -20 \frac{x_1}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \end{array} \right]$$

(c) $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - [\nabla F(x_1, x_2)]^{-1} F(x_1, x_2)$

$$\Rightarrow \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \left[\begin{array}{cc} \frac{\sin x_2 - 4}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -4 \frac{x_2}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \\ -\frac{1}{-40x_1 + 2x_2 \cos x_1 + 10x_1 \sin x_2} & -20 \frac{x_1}{-20x_1 + x_2 \cos x_1 + 5x_1 \sin x_2} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4} \cos x_2 - \frac{1}{4} \sin x_1 \end{array} \right)$$

(d) Como se puede ver, es extremadamente complicada la formula, entonces lo hacemos numericamente

i. $x_0 = \left[\begin{array}{c} 0.25 \\ 0.25 \end{array} \right]$

$$F(x_0) = \left[\begin{array}{c} 5(0.25)^2 - (0.25)^2 \\ 0.25 - \frac{1}{4}(\sin 0.25 - \cos 0.25) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0.25 \\ 0.4304 \end{array} \right]$$

$$\nabla F(x_0) = \left[\begin{array}{cc} 10(0.25) & -2(0.25) \\ -\frac{1}{4} \cos 0.25 & 1 - \frac{1}{4} \sin 0.25 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2.5 & -0.5 \\ -0.2422 & 0.9381 \end{array} \right]$$

$$[\nabla F(x_0)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0.4218 & 0.2248 \\ 0.1089 & 1.124 \end{array} \right]$$

ii. $x_1 = \left[\begin{array}{c} 0.25 \\ 0.25 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 0.4218 & 0.2248 \\ 0.1089 & 1.124 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0.25 \\ 0.4304 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0.0478 \\ -0.261 \end{array} \right]$

$$F(x_1) = \left[\begin{array}{c} 5(0.0478)^2 - (-0.261)^2 \\ -0.261 - \frac{1}{4}(\sin 0.0478 - \cos -0.261) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -0.0567 \\ -0.03141 \end{array} \right]$$

$$\nabla F(x_1) = \left[\begin{array}{cc} 10(0.0478) & -2(-0.03141) \\ -\frac{1}{4} \cos(0.0478) & 1 - \frac{1}{4} \sin -0.03141 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0.478 & 0.06282 \\ -0.2497 & 1.008 \end{array} \right]$$

$$[\nabla F(x_1)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 2.026 & -0.1263 \\ 0.5019 & 0.9608 \end{array} \right]$$

iii. $x_2 = \left[\begin{array}{c} 0.0478 \\ -0.261 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 2.026 & -0.1263 \\ 0.5019 & 0.9608 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -0.0567 \\ -0.03141 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0.1587 \\ -0.2024 \end{array} \right]$

$$F(x_2) = \left[\begin{array}{c} 5(0.1587)^2 - (-0.2024)^2 \\ -0.2024 - \frac{1}{4}(\sin 0.1587 - \cos -0.2024) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0.08496 \\ 0.002988 \end{array} \right]$$

$$\nabla F(x_2) = \left[\begin{array}{cc} 10(0.1587) & -2(-0.2024) \\ -\frac{1}{4} \cos 0.1587 & 1 - \frac{1}{4} \sin -0.2024 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1.587 & 0.4048 \\ -0.2469 & 1.050 \end{array} \right]$$

$$[\nabla F(x_2)]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0.5945 & -0.2292 \\ 0.1398 & 0.8985 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv. } x_3 &= \begin{bmatrix} 0.1587 \\ -0.2024 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5945 & -0.2292 \\ 0.1398 & 0.8985 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08496 \\ 0.002988 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1089 \\ -0.217 \end{bmatrix} \\
 F(x_3) &= \begin{bmatrix} 5(0.1089)^2 - (-0.217)^2 \\ -0.217 - \frac{1}{4}(\sin 0.1089 - \cos -0.217) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01221 \\ -0.00003428 \end{bmatrix} \\
 \nabla F(x_3) &= \begin{bmatrix} 10(0.1089) & -2(-0.217) \\ -\frac{1}{4}\cos 0.1089 & 1 - \frac{1}{4}\sin -0.217 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.089 & 0.434 \\ -0.2485 & 1.054 \end{bmatrix} \\
 [\nabla F(x_3)]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.8394 & -0.3456 \\ 0.1979 & 0.8673 \end{bmatrix} \\
 \text{v. } x_4 &= \begin{bmatrix} 0.1089 \\ -0.217 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8394 & -0.3456 \\ 0.1979 & 0.8673 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01221 \\ -0.00003428 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09864 \\ -0.2194 \end{bmatrix} \\
 F(x_4) &= \begin{bmatrix} 5(0.09864)^2 - (-0.2194)^2 \\ -0.2194 - \frac{1}{4}(\sin 0.09864 - \cos -0.2194) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0005129 \\ -0.00001298 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Método de Newton –Kantorovich

$$\begin{aligned}
 \vec{G}(x, y) &= \begin{bmatrix} x \sin(y) - x \\ y \cos(x) - y \end{bmatrix} \\
 \nabla \vec{G}(x, y) &= \begin{bmatrix} \sin(y) - 1 & x \cos(y) \\ -y \sin(x) & \cos(x) - 1 \end{bmatrix} \\
 \vec{G}(\vec{x}_0) &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(0.5) - 0.1 \\ 0.5 \cos(0.1) - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \times 0.48 - 0.1 \\ 0.5 \times 1 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048 - 0.1 \\ 0.5 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.052 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \nabla \vec{G}(\vec{x}_0) &= \begin{bmatrix} \sin(0.5) - 1 & 0.1 \cos(0.5) \\ -0.5 \sin(0.1) & \cos(0.1) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 - 1 & 0.1 \times 0.88 \\ -0.5 \times 0.01 & 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.52 & 0.088 \\ -0.05 & 0 \end{bmatrix} \\
 \det(\nabla \vec{G}(\vec{x}_0)) &= 0.088 \times 0.05 = 0.0044 \\
 [\nabla \vec{G}(\vec{x}_0)]^{-1} &= \frac{1}{0.0044} \begin{bmatrix} 0 & -0.088 \\ 0.05 & -0.52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 11 & -120 \end{bmatrix} \\
 \vec{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 11 & -120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.052 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \times (-0.052) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -0.57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{G}(\vec{x}_1) &= \begin{bmatrix} 0.1 \sin(1) - 0.1 \\ 1 \cos(0.1) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \times 0.84 - 0.1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.016 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \nabla \vec{G}(\vec{x}_1) &= \begin{bmatrix} \sin(1) - 1 & 0.1 \cos(1) \\ -1 \sin(0.1) & \cos(0.1) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 - 1 & 0.1 \times 0.54 \\ -0.1 & 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16 & 0.054 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \det(\nabla \vec{G}(\vec{x}_1)) &= 0.054 \times 0.1 = 0.0054 \\
 [\nabla \vec{G}(\vec{x}_1)]^{-1} &= \frac{1}{0.0054} \begin{bmatrix} 0 & -0.054 \\ 0.1 & -0.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 19 & -30 \end{bmatrix} \\
 \vec{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 19 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.016 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \times (-0.016) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -0.304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{NK} &= \|G(\vec{x}_2)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 \sin(1.3) - 0.1 \\ 1.3 \cos(0.1) - 1.3 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} -3.6441814582807035299 \times 10^{-3} \\ -6.4945851385665040758 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 6.495 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

3. Newton – Kantorovich

- (a) El problema $\min \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$ se reduce en encontrar un cero a su gradiente, es decir:
 $F(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$, el método de Newton – Kantorovich para encontrar un cero a $\nabla F(x)$ queda de la forma:

$$x_{k+1} = x_k - [H_F(x_k)]^{-1} \nabla F(x_k)$$

$$\text{ahora, } \nabla F(x) = Qx + r$$

$$H_F(x) = Q$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - Q^{-1} [Qx_k + r] = x_k - x_k - Q^{-1}r = -Q^{-1}r$$

$$\text{entonces, dado cualquier } x_0 \Rightarrow x_1 = -Q^{-1}r. \text{ Evaluando } \nabla F(x) \text{ en } x_1$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_1) = Q(-Q^{-1}r) + r = -r + r = 0$$

$$\text{y como } H_F(x_1) = Q \text{ definida positiva}$$

$$\Rightarrow \text{se encontró el mínimo de } F(x) \text{ en solo una iteración.}$$

$$(b) E(a, b, c) = \int_0^1 (e^x - p(x))^2 dx = \int_0^1 (e^x - 1 - bx - cx^2)^2 dx$$

$$\nabla E = \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 (e^x - 1 - bx - cx^2)(-x) dx \\ 2 \int_0^1 (e^x - 1 - bx - cx^2)(-x^2) dx \end{bmatrix}$$

Integrando toda la expresión queda:

$$\Rightarrow \nabla E = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}c - 1 \\ \frac{1}{2}b + \frac{2}{5}c - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

Forma tradicional:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e - \frac{14}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60e + 164 \\ 80e - \frac{650}{3} \end{bmatrix}$$

Usando Newton Kantorovich:

$$H_E = \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 x^2 dx & 2 \int_0^1 x^3 dx \\ 2 \int_0^1 x^3 dx & 2 \int_0^1 x^4 dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$H_E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 24 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = x_k - H_E^{-1}(x_k) \nabla E(x_k) = \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 (e^x - 1 - b_k x - c_k x^2)(-x) dx \\ 2 \int_0^1 (e^x - 1 - b_k x - c_k x^2)(-x^2) dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 (e^x - 1)(-x) dx \\ 2 \int_0^1 (e^x - 1)(-x^2) dx \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 24 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60e + 164 \\ 80e - \frac{650}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.929 \\ 0.761 \end{bmatrix}$$

Que es la misma solución que de la forma tradicional =)

(c) Método del gradiente:

$$\nabla E = \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 (e^x - 1 - bx - cx^2)(-x) dx \\ 2 \int_0^1 (e^x - 1 - bx - cx^2)(-x^2) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}c - 1 \\ \frac{1}{2}b + \frac{2}{5}c - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}_0 = -\nabla E(x_0) = - \begin{bmatrix} -1 \\ -2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e - \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\nabla E(x_0 + \alpha \vec{d}_0) \cdot \vec{d}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0 + \alpha) + \frac{1}{2}(0 + \alpha(2e - \frac{14}{3})) - 1 \\ \frac{1}{2}(0 + \alpha) + \frac{2}{5}(0 + \alpha(2e - \frac{14}{3})) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2e - \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{212}{45}\alpha + \frac{56}{3}e - \frac{82}{15}\alpha e - 4e^2 + \frac{8}{5}\alpha e^2 - \frac{205}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4e^2 - \frac{56}{3}e + \frac{205}{9}}{\frac{8}{5}e^2 - \frac{82}{15}e + \frac{212}{45}} \approx 0.952$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.952 \begin{bmatrix} 1 \\ 2e - \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.952 \\ 0.733 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = -\nabla E(x_1) = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}0.952 + \frac{1}{2}0.733 - 1 \\ \frac{1}{2}0.952 + \frac{2}{5}0.733 - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.00117 \\ 6.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\nabla E(x_1 + \alpha \vec{d}_1) \cdot \vec{d}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0.952 - \alpha 0.00117) + \frac{1}{2}(0.733 + \alpha 6.97 \times 10^{-4}) - 1 \\ \frac{1}{2}(0.952 - \alpha 0.00117) + \frac{2}{5}(0.733 + \alpha 6.97 \times 10^{-4}) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.00117 \\ 6.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 0.000000291\alpha - 1.85 \times 10^{-6} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 6.36$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.952 \\ 0.733 \end{bmatrix} + 6.36 \begin{bmatrix} -0.00117 \\ 6.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.945 \\ 0.737 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = -\nabla E(x_2) = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}0.945 + \frac{1}{2}0.737 - 1 \\ \frac{1}{2}0.945 + \frac{2}{5}0.737 - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 2.6 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\nabla E(x_2 + \alpha \vec{d}_2) \cdot \vec{d}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0.945 + \alpha 0.0015) + \frac{1}{2}(0.737 + \alpha 2.6 \times 10^{-3}) - 1 \\ \frac{1}{2}(0.945 + \alpha 0.0015) + \frac{2}{5}(0.737 + \alpha 2.6 \times 10^{-3}) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 2.6 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 0 :$$

$$\Rightarrow 0.0000081\alpha - 9 \times 10^{-6} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 1.11$$

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.945 \\ 0.737 \end{bmatrix} + 1.11 \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 2.6 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.947 \\ 0.74 \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}_3 = -\nabla E(x_3) = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}0.947 + \frac{1}{2}0.74 - 1 \\ \frac{1}{2}0.947 + \frac{2}{5}0.74 - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 3.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\nabla E(x_3 + \alpha \vec{d}_3) \cdot \vec{d}_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0.947 - \alpha 1.33 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(0.74 + \alpha 3.97 \times 10^{-4}) - 1 \\ \frac{1}{2}(0.947 - \alpha 1.33 \times 10^{-3}) + \frac{2}{5}(0.74 + \alpha 3.97 \times 10^{-4}) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 3.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 7.14 \times 10^{-7}\alpha - 1.93 \times 10^{-6} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 2.70$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_4 &= \begin{bmatrix} 0.947 \\ 0.74 \end{bmatrix} + 2.70 \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 3.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.943 \\ 0.741 \end{bmatrix} \\ \vec{d}_4 &= -\nabla E(x_4) = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}0.943 + \frac{1}{2}0.741 - 1 \\ \frac{1}{2}0.943 + \frac{2}{5}0.741 - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8.33 \times 10^{-4} \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\ \nabla E(x_4 + \alpha \vec{d}_4) \cdot \vec{d}_4 &= 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0.943 + \alpha 8.33 \times 10^{-4}) + \frac{1}{2}(0.741 + \alpha 2 \times 10^{-3}) - 1 \\ \frac{1}{2}(0.943 + \alpha 8.33 \times 10^{-4}) + \frac{2}{5}(0.741 + \alpha 2 \times 10^{-3}) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.33 \times 10^{-4} \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow 3.73 \times 10^{-6} \alpha - 4.69 \times 10^{-6} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \approx 1.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_5 &= \begin{bmatrix} 0.943 \\ 0.741 \end{bmatrix} + 1.26 \begin{bmatrix} 8.33 \times 10^{-4} \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.944 \\ 0.744 \end{bmatrix} \\ \vec{d}_5 &= -\nabla E(x_5) = - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}0.944 + \frac{1}{2}0.744 - 1 \\ \frac{1}{2}0.944 + \frac{2}{5}0.744 - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 2.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ \nabla E(x_4 + \alpha \vec{d}_4) \cdot \vec{d}_4 &= 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(0.944 - \alpha 1.33 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(0.744 + \alpha 2.97 \times 10^{-4}) - 1 \\ \frac{1}{2}(0.944 - \alpha 1.33 \times 10^{-3}) + \frac{2}{5}(0.744 + \alpha 2.97 \times 10^{-4}) - 2e + \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 2.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow 8.2 \times 10^{-7} \alpha - 1.86 \times 10^{-6} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \approx 2.267 \end{aligned}$$

$$\vec{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.944 \\ 0.744 \end{bmatrix} + 2.267 \begin{bmatrix} -1.33 \times 10^{-3} \\ 2.97 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0.745 \end{bmatrix}$$

Como nos damos cuenta, este método efectivamente se va acercando a la solución, pero de una forma muy lenta.

4. Mínimos Cuadrados y Optimización

(a) Aproximación

i. El polinomio que aproxima $f(x) = x \ln x$ es de la forma:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

imponiendo la condición de interpolación:

$$p(0) = 0 \implies c = 0$$

$$\text{entonces } p(x) = ax^2 + bx$$

$$\text{Tenemos que } E(p) = \int_0^1 (p(x) - x \ln x)^2 dx$$

$$\implies E(p) = \int_0^1 (ax^2 + bx - x \ln x)^2 dx$$

- ii. Si nos damos cuenta, las variables son a y b , y al expandir y resolver la integral, aparecen terminos de la forma a^2, c^2, ab, a, b , por lo que se puede expresar como una

funcion cuadrática del tipo $E(p) = \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$ para $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_0^1 a^2 x^4 + abx^3 - ax^3 \ln x + abx^3 + b^2 x^2 - bx^2 \ln x - ax^3 \ln x - bx^2 \ln x + x^2 \ln^2 x \, dx \\ &= a^2 \int_0^1 x^4 dx + b^2 \int_0^1 x^2 dx + ab \int_0^1 2x^3 dx - a \int_0^1 2x^3 \ln x dx - b \int_0^1 2x^2 \ln x dx + \int_0^1 x^2 \ln^2 x dx \\ &= \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{a}{8} + \frac{b^2}{3} + \frac{2b}{9} + \frac{2}{27} \end{aligned}$$

- iii. Solo debemos hacer una iteración del método de Newton-Kantorovich aplicado a la función $\nabla E(p)$:

Partimos el punto inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla E(p) &= \begin{pmatrix} 2 \int_0^1 (\frac{5}{3}x^2 - \frac{19}{12}x - x \ln x)(x^2) dx \\ 2 \int_0^1 (\frac{5}{3}x^2 - \frac{19}{12}x - x \ln x)(x) dx \end{pmatrix} \\ \Rightarrow H_E(p) &= \begin{bmatrix} 2 \int_0^1 x^4 dx & 2 \int_0^1 x^3 dx \\ 2 \int_0^1 x^3 dx & 2 \int_0^1 x^2 dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6667 \end{bmatrix}^{-1} \\ \Rightarrow H_E(p)^{-1} &= \begin{bmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 24 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Iterando con el método, partiendo de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \int_0^1 x^3 \ln x dx \\ -2 \int_0^1 x^2 \ln x dx \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} \right) \Big|_0^1 \\ 2 \left(\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{16} \\ \frac{-2}{9} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 39.97 & -29.98 \\ -29.98 & 23.98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.125 \\ -0.2222 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.665 \\ -1.581 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obs: La respuesta exacta es $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{19}{12} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.667 \\ -1.583 \end{pmatrix}$

Entonces el polinomio es:

$$p(x) = 1.665x^2 - 1.581x$$

(b) Para encontrar un punto inicial, encontremos un mínimo de $p(x)$:

$$\begin{aligned} \text{i. } &\Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} = 2 \times 1.665x - 1.581 = 0 \\ &\Rightarrow x^{(0)} \approx 0.4748 \end{aligned}$$

ii. Calculemos la 1 y la 2 derivada de $f(x)$ para iterar en el método de Newton Raphson:

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - x_k(\ln x_k + 1) = -x_k \ln x_k$$

$$\begin{array}{ccc} k & x_k & \ln(x_k) \end{array}$$

$$0 \quad 0.4748 \quad -0.7449$$

$$1 \quad 0.3537 \quad -1.039$$

$$2 \quad 0.3675 \quad -1.001$$

$$3 \quad 0.3679 \quad -0.9999$$

$$4 \quad 0.3679$$

\Rightarrow el método convergió a $\bar{x} = 0.3679$

$$E_{abs} = |0.3679 - e^{-1}| \approx 2.056 \times 10^{-5}$$

$$E_{rel} = \frac{|0.3679 - e^{-1}|}{e^{-1}} \approx 5.588 \times 10^{-5} \leq 5 \times 10^{-4}$$

\Rightarrow tiene 4 cifras significativas correctas

Eso es correcto ya que

$$e^{-1} = 0.36787944117144232159552377016$$

y aproximándolo a 4 cifras significativas con redondeo:

$$fl(e^{-1}) = 0.3679 = \bar{x}$$

5. Modelación y Optimización:

(a) Los datos del problema son: el capital \$D para comprar el género y el precio del metro cuadrado de género \$C.

Sea las variables r y h el radio y la altura del cilindro respectivamente, entonces la función objetivo es:

$$V(r, h) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

Las restricciones son:

$$r, h \geq 0$$

$$(2\pi r^2 + 2\pi r h)C \leq D$$

La primera restricción indica factibilidad y la segunda es una restricción de capital, el dinero gastado en hacer la tienda, no debe superar el capital.

Entonces el problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \max_{r, h \geq 0} \quad & V(r, h) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \\ \text{s.a.} \quad & (2\pi r^2 + 2\pi r h)C \leq D \end{aligned}$$

i. Con los datos, la restricción queda:

$$(2\pi r^2 + 2\pi r h)1000 \leq 100000$$

Despejando r en función de h :

$$h = \frac{50}{\pi r} - r$$

ii. El modelo equivalente sin restricciones es:

$$\max_{r, h \geq 0} \quad V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^3 + 50r$$

- iii. Como queremos maximizar la función objetivo, para ocupar el método del Gradiente, debemos:

$$\max V(r) = \min(-V(r)) = \min V^*(r)$$

$$\text{con } V^*(r) = \frac{1}{3}\pi r^3 - 50r$$

Obs: También se puede usando $V(r)$, pero como dirección \vec{d} a $\frac{dV}{dr}$.

Entonces ocupando el método:

Partamos con el punto inicial $x^{(0)} = 0$

$$\Rightarrow d^0 = -\frac{dV^*}{dr}(x^{(0)}) = 50$$

\Rightarrow calculemos $\alpha^{(0)}$ que resuelve:

$$\min_{\alpha \geq 0} h_0(\alpha) = (V^*(0 + \alpha 50))$$

y como $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha \vec{d} = 50\alpha$

$$\min V^*(x^{(1)})$$

i.e. se resuelve el problema original $\frac{dV}{dr} = 0$

Se nos presenta el inconveniente de que volvemos al problema original.

- iv. Con el dato de la estimación rápida del diametro de la tienda, iteraremos con el método de Newton

Raphson para el punto inicial $r = 5$

$$\text{Sea } F = \frac{dV}{dr} = 50 - \pi r^2 \quad \frac{dF}{dr}(r) = -2\pi r$$

$$\pi \approx 3.142$$

$$F = 50 - 3.142r^2$$

$$\frac{dF}{dr} = -6.284r$$

$$x^{(0)} = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$F(5) = 50 - 3.142 \times 25 = -28.55$$

$$\frac{dF}{dr}(5) = -6.284 \times 5 = -31.42$$

$$x^{(1)} = 5 - \frac{28.55}{31.42} = 5 - 0.9087 = 4.091$$

$$(4.091)^2 = 16.74$$

$$F(4.091) = 50 - 3.142 \times 16.74 = 50 - 52.6 = -2.6$$

$$\frac{dF}{dr}(3.99) = -6.284 \times 4.091 = -25.71$$

$$x^{(2)} = 4.091 - \frac{2.6}{25.71} = 4.091 - 0.1011 = 3.99$$

$$(3.99)^2 = 15.92$$

$$F(3.99) = 50 - 3.142 \times 15.92 = 50 - 50.02 = -0.02$$

$$\frac{dF}{dr}(3.99) = -6.284 \times 3.99 = -25.07$$

$$x^{(3)} = 3.99 - \frac{0.02}{25.07} = 3.99 - 7.978 \times 10^{-4} = 3.989$$

$$(3.989)^2 = 15.91$$

$$F(3.989) = 50 - 3.142 \times 15.91 = 50 - 49.99 = 0.01$$

$$\frac{dF}{dr}(3.989) = -6.284 \times 3.989 = -25.07$$

$$x^{(4)} = 3.989 + \frac{0.01}{25.07} = 3.989 + 3.989 \times 10^{-4} = 3.989$$

\Rightarrow el método convergió con $\bar{x} = 3.989$

Solución óptima:

$r = 3.989$ metros

$$h = \frac{50}{3.142 \times 3.989} - 3.989 = \frac{50}{12.53} - 3.989 = 3.990 - 3.989 = 0.001$$

Es decir, el volumen óptimo se alcanza cuando $h \approx 0$, es decir, una tienda semiesférica.

$$V(r, h) = 0.6667 \times 3.142 \times (3.989)^3 + 3.142 \times (3.989)^2 \times 0.001 \approx 133$$

Volumen de la tienda: 133 *metros*³

6. Optimización

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^t \cdot Q \cdot \vec{x}$$

- (a) Optimo de $f(\vec{x}) \iff \nabla f(\vec{x}) = \vec{0} \wedge Hf(\vec{x})$ definida positiva

$$\nabla f(\vec{x}) = \nabla(\vec{c} \cdot \vec{x}) + \nabla(\frac{1}{2} \vec{x}^t \cdot Q \cdot \vec{x}) = \vec{c} + \frac{1}{2} Q \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} Q^t \cdot \vec{x} = \vec{c} + \frac{1}{2} Q \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} Q \cdot \vec{x} = \vec{c} + Q \cdot \vec{x}$$

$$Hf(\vec{x}) = Q$$

$$\vec{c} + Q \cdot \vec{x}^* = \vec{0} \implies \vec{x}^* = -Q^{-1} \vec{c}$$

Q definida positiva, entonces \vec{x}^* es minimo

- (b) Usar el método de Newton-Kantorovich para el encontrar el óptimo de f es de la forma

$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - Hf(\vec{x}_k)^{-1} \cdot \nabla f(\vec{x}_k)$, ya que se busca un cero de $\nabla f(\vec{x})$. Para la forma cuadrática, queda:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - Q^{-1} \cdot [\vec{c} + Q \cdot \vec{x}_k] = \vec{x}_k - Q^{-1} \cdot \vec{c} - Q^{-1} \cdot Q \cdot \vec{x}_k = \vec{x}_k - Q^{-1} \cdot \vec{c} - I \cdot \vec{x}_k = \vec{x}_k - Q^{-1} \cdot \vec{c} - \vec{x}_k = -Q^{-1} \cdot \vec{c}$$

Como se ve, partiendo desde cualquier punto inicial \vec{x}_0 , al hacer una sola iteración se llega a $\vec{x}_1 = -Q^{-1} \cdot \vec{c}$ que corresponde al óptimo de $f(\vec{x})$ visto anteriormente.

- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 4x + 2y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ es definida positiva ya que } |2| = 2 > 0 \wedge \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\text{Partiendo con } \vec{x}_0 \text{ cualquiera, tenemos que } \vec{x}_1 = -Q^{-1} \cdot \vec{c} = - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

9 Diferenciación e Integración de Funciones

9.1 Resumen de Materia

1. **Aprox. Simple de la Derivada:** $\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\eta)$, con $\eta \in [x_0, x_0+h]$
2. **Fórmula de los tres puntos:** $\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\eta)$, con $\eta \in [x_0-h, x_0+h]$
3. **Fórmula de los cinco puntos:** $\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{12h} - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta)$, con $\eta \in [x_0-2h, x_0+2h]$
4. **Aprox. Simple de la 2° Derivada:** $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2} = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta)$, con $\eta \in [x_0-h, x_0+h]$
5. **Fórmulas de Cuadratura:** $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$, donde $x_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$, y c_k constantes.
6. **Fórmula de Lagrange:** $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_L(x)dx = \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b L_{n,k}(x)dx \right] f(x_k)$, $E = \int_a^b \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x-x_k) \right] dx$
7. **Regla del Trapecio:** Lagrange de 1° grado en $[x_0, x_1]$: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$, $E = \frac{h^3}{12}f''(\eta)$ donde $h = x_1 - x_0$, y $\eta \in [x_0, x_1]$
8. **Regla de Simpson:** Lagrange de 2° grado en $[x_0, x_2]$: $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$, $E = \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$ donde $h = \frac{x_2-x_0}{2}$, y $\eta \in [x_0, x_2]$
9. **Regla de Simpson 3/8:** Lagrange de 3° grado en $[x_0, x_3]$: $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \simeq \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$, $E = \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta)$ donde $h = \frac{x_3-x_0}{3}$, y $\eta \in [x_0, x_3]$
10. **Regla de Boole:** Lagrange de 4° grado en $[x_0, x_4]$: $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \simeq \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 4f(x_4)]$, $E = \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$ donde $h = \frac{x_4-x_0}{4}$, y $\eta \in [x_0, x_4]$
11. **Regla del Trapecio Compuesta:** Se divide el intervalo en n subintervalos, y se aplica la regla del trapecio a cada uno de los subintervalos: $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$, $E = -n\frac{h^3}{12}f''(\eta)$ donde $h = \frac{b-a}{n}$, y $\eta \in [a, b]$
12. **Regla de Simpson Compuesta:** Se divide el intervalo en n subintervalos pares, y se aplica la regla del trapecio a cada pareja de subintervalos: $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_n)] + \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} [2f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1})]$, $E = -n\frac{h^5}{180}f^{(4)}(\eta)$ donde $h = \frac{b-a}{n}$, y $\eta \in [a, b]$
13. **Métodos Adaptativos de Cuadratura:** Se desea aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con una tolerancia $\varepsilon > 0$.
 - (a) Aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con regla de Simpson, con paso $h = \frac{b-a}{2}$:

$$\int_a^b f(x)dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$
 - (b) Ahora, usando Simpson compuesto con $n = 4$ y $\bar{h} = \frac{b-a}{4}$:

$$\int_a^b f(x)dx = S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b) - 4\frac{\bar{h}^5}{180}f^{(4)}(\bar{\eta}) = S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b) - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\bar{\eta})$$
 - (c) Tomando $f^{(4)}(\bar{\eta}) = f^{(4)}(\eta)$, entonces restando ambas ecuaciones se tiene que

$$\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta) \simeq \frac{16}{15} \left[S(a, b) - S(a, \frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2}, b) \right]$$

(d) Luego, $\left| \int_a^b f(x)dx - S(a, \frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2}, b) \right| \simeq \frac{1}{15} |S(a, b) - S(a, \frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2}, b)|$

(e) Entonces, si $\frac{1}{15} |S(a, b) - S(a, \frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2}, b)| \leq \varepsilon$, entonces $\int_a^b f(x)dx \simeq S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b)$ con $E \leq \varepsilon$.

(f) En caso contrario, se repite el proceso a cada uno de los intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$, con tolerancia $\frac{\varepsilon}{2}$ a cada intervalo.

14. **Integración Impropia:** Se desea calcular $I_\infty = \int_0^\infty f(x)dx$.

(a) Se separa en $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx$.

(b) Con un cambio de variables $x = \frac{1}{u}$ se transforma la integral: $\int_1^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(\frac{1}{u})}{u^2} du$

(c) Ahora $I_\infty = \int_0^1 \left(f(x) + \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} \right) dx$ se calcula con alguno de los métodos de integración.

15. **Integración Multiple:** Se desea calcular $I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$

(a) Se aplica la regla de Simpson compuesta para $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Sea $y_j = c + jh_y$, donde $h_y = \frac{d-c}{m}$

(b) Se tiene $I(x) = \frac{h_y}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_m)] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [2f(x, y_{2k}) + 4f(x, y_{2k+1})]$, $E = -m \frac{h_y^5}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, \eta)$ con $\eta \in [c, d]$

(c) Luego $I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \simeq \int_a^b I(x)dx$
 $= \frac{h_y}{3} [\int_a^b f(x, y_0)dx + 4 \int_a^b f(x, y_1)dx + \int_a^b f(x, y_m)dx] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [2 \int_a^b f(x, y_{2k})dx + 4 \int_a^b f(x, y_{2k+1})dx]$
 y el error es $E = -m \frac{h_y^5}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, \eta)dx$, con $\eta \in [c, d]$

(d) Si llamamos $I_k = \int_a^b f(x, y_k)dx$ para $k = 0 \dots m$, $\implies I \simeq \frac{h_y}{3} [I_0 + 4I_1 + I_m] + \frac{h_y}{3} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [2I_{2k} + 4I_{2k+1}]$

(e) Se aplica la regla de Simpson compuesta para $I_k = \int_a^b f(x, y_k)dx$. Sea $x_j = a + jh_x$, donde $h_x = \frac{b-a}{n}$

(f) Se tiene $I_k = \frac{h_x}{3} [f(x_0, y_k) + 4f(x_1, y_k) + f(x_n, y_k)] + \frac{h_x}{3} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} [2f(x_{2i}, y_k) + 4f(x_{2i+1}, y_k)]$, $E_k = -n \frac{h_x^5}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\eta, y_k)$ con $\eta \in [c, d]$

16. Para calcular la integral impropia:

$$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^p} dx$$

mediante los métodos vistos en clases se realiza el siguiente procedimiento:

(a) Determinar el polinomio de Taylor de $g(x)$ en torno a $x_0 = 0$ de orden 4: $p_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$

(b) $I = \int_0^1 \frac{g(x) - p_4(x)}{x^p} dx + \int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^p} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^p} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^{k-p} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^{k-p} dx = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!(k-p+1)}$

(d) $\int_0^1 \frac{g(x) - p_4(x)}{x^p} dx = \int_0^1 G(x)dx$ donde: $G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - p_4(x)}{x^p} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(e) Se calcula $\int_0^1 G(x)dx$ mediante el M. de Simpson Compuesto con $n = 4$.

9.2 Problemas

- Encuentre el h que minimice el error de la derivada numérica de 3 puntos, tomando en cuenta que $f(x+h) = y_+ + e_+$, y $f(x-h) = y_- - e_-$, en donde e_+ y e_- son errores de truncación, y se cumple que $|e_+| \leq \varepsilon$, $|e_-| \leq \varepsilon$.
- Calcule la siguiente integral mediante el Método de Simpson Compuesto considerando $n = 8$ puntos equiespaciados: $I = \int_2^4 x \ln(x) dx$. Calcule el error absoluto y relativo al utilizar el Método de Simpson Compuesto
- Calcule la integral mediante el Método de Simpson Compuesto: $I = \int_2^4 x \ln(x) dx$, con tolerancia $\varepsilon = 10^{-4}$, usando 5 cifras significativas. Calcule el error absoluto y relativo si $I \approx 6.7040605278$.
- Calcule la integral doble $I = \int_0^1 \int_0^1 \cos(xy) dy dx$ con $h_x = 0.5$ y $h_y = 0.5$
- Sea $f(x, y) = \frac{\sin(\frac{y}{x})}{x^2}$. Se proponen dos métodos para calcular la integral doble $I = \int_0^1 \int_1^\infty f(x, y) dx dy$.
 - Calcule la integral de forma explícita solo para la variable y . Luego, aplique el método para integrales impropias de tipo 1, con $n = 4$, y $h_x = 0.5$
 - Calcule la integral usando la regla de Simpsons compuesta para ambas variables con $h_x = h_y = 0.5$.
 - Si $I \simeq 0.239811742$, determine cual de los dos métodos es más exacto.

Obs: Calcule las integrales en el orden dado. Use 5 cifras significativas.
- Calcule la integral impropia $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$. Determine el error relativo si $I = 2.9253035$.
- Sea $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Sea $V = \{xe^x, x \ln(x)\}$ una base de un espacio vectorial linealmente independiente. Se desea aproximar $f(x)$ usando V por el método de los Mínimos Cuadrados, con peso $w(x) = 1$ y en el intervalo $D = [0, 1]$
 - Plantear el sistema matricial de ecuaciones
 - Resolver las integrales de forma explícita si se puede, en caso contrario, usar la regla de Simpson
 - Usando Gauss, resolver el sistema
 - Deje de forma explícita su aproximación

- Fugacidad f es el trabajo disponible en un proceso isotérmico. Para un gas ideal se tiene que: $f(P) = P$, pero para gases ideales se tiene que:

$$\ln \left(\frac{f(P)}{P} \right) = \int_0^P \frac{C(p)-1}{p} dp$$

donde la función $C(p)$ es el factor de compresibilidad que se determina experimentalmente.

- Para el gas metano $C(p)$ varía cuadráticamente si $P \leq 10$: $C(0) = 1.00$, $C(1) = 0.99$, $C(10) = 0.94$. Calcule el polinomio cuadrático de interpolación.
- Calcule $f(P = 10)$ utilizando (a) y la Regla de Simpson Compuesta con $h = 2.5$

9.3 Respuestas

1. Minimizar el error

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{y_++e_+-y_-+e_-}{2h} = \frac{y_+-y_-}{2h} + \frac{e_++e_-}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta) + \frac{e_++e_-}{2h} \implies E = \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta) + \frac{e_++e_-}{2h}$$

Como se desea minimizar el error, primeros acotamos el error: $E = \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta) + \frac{e_++e_-}{2h} \leq \frac{h^2}{6} M + \frac{\varepsilon}{h}$, donde $M = \max |f^{(3)}(\eta)|$. Entonces la cota del error es $C(h) = \frac{h^2}{6} M + \frac{\varepsilon}{h}$

Ahora, $\min C(h) \iff C'(h) = 0 \wedge C''(h) > 0$

$$\implies \frac{d(\frac{h^2}{6} M + \frac{\varepsilon}{h})}{dh} = \frac{h}{3} M - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0$$

$$\implies \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}}$$

$$C''(\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}) = M > 0$$

2. Simpson Compuesto:

$$I = \int_2^4 x \ln(x) dx, n = 8$$

$$h = \frac{4-2}{8} = 0.25$$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)]$$

$$= \frac{0.25}{3} [f(2) + 4f(2.25) + 2f(2.5) + 4f(2.75) + 2f(3) + 4f(3.25) + 2f(3.5) + 4f(3.75) + f(4)]$$

$$= \frac{0.25}{3} \times 80.448774503032891823 = 6.7040645419194076519$$

$$f(x) = x \ln x; f'(x) = \ln x + 1; f^{(2)}(x) = \frac{1}{x}; f^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^2}; f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$E = -n \frac{h^5}{180} f^{(4)}(\eta) = -8 \frac{0.25^5}{180} \frac{\partial^4 [x \ln(x)]}{\partial x^4}(\eta) = -\frac{1}{23040} \frac{2}{\eta^3}, \text{ con } \eta \in [2, 4]$$

$$\int_2^4 x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \Big|_2^4 = 8 \ln 4 - 2 \ln 2 - 3 = 6.7040605278392343318$$

$$E_{abs} = |6.7040605278392343318 - 6.7040645419194076519| = 0.0000040140801733201$$

$$E_{rel} = \frac{|6.7040605278392343318 - 6.7040645419194076519|}{|6.7040605278392343318|} = 0.0000059875356981806161547$$

$$E_{abs} = 0.0000040140801733201 = \frac{1}{23040} \frac{2}{\eta^3}$$

$$\implies \eta = \sqrt[3]{\frac{1}{23040} \frac{2}{0.0000040140801733201}} = 2.7860387944321319573 \in [2, 4]$$

3. Tolerancia

$$I = \int_2^4 x \ln(x) dx$$

$$h_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\implies S(2, 4) = \frac{1}{3} [2 \ln(2) + 4 \times 3 \ln(3) + 4 \ln(4)] = \frac{1}{3} [1.3863 + 13.183 + 5.5452] = \frac{20.1145}{3} = 6.7048$$

$$h_2 = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\implies S(2, 3) + S(3, 4) = \frac{1}{6} [2 \ln(2) + 4 \times 2.5 \ln(2.5) + 3 \ln(3)] + \frac{1}{6} [3 \ln(3) + 4 \times 3.5 \ln(3.5) + 4 \ln(4)]$$

$$= \frac{1}{6} [1.3863 + 9.1629 + 3.2958] + \frac{1}{6} [3.2958 + 17.539 + 5.5452] = \frac{13.845}{6} + \frac{26.38}{6} = 6.7042$$

$$\frac{1}{15} |S(a, b) - S(a, \frac{a+b}{2}) - S(\frac{a+b}{2}, b)| = \frac{1}{15} |6.7048 - 6.7042| = 0.00004 < 10^4$$

$$\int_2^4 x \ln(x) dx \approx 6.7042$$

$$E_{rel} = \left| \int_2^4 x \ln(x) dx - S(2, 3) - S(3, 4) \right| = |6.7040605278 - 6.7042| = 0.0001394722 \not\leq 10^{-4},$$

¿Qué fue lo que pasó? Esto se debe a que se usaron 5 cifras significativas, para un $\varepsilon = 10^{-4}$, por lo que los errores de arrastre fueron modificando el 5° decimal, provocando un error más grande del deseado. Para asegurarnos de obtener un error menor del deseado, se necesitan trabajar con mínimo 6 cifras significativas.

4. Integral doble

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cos(xy) dy dx$$

$$I(x) = \int_0^1 \cos(xy) dy \simeq \frac{0.5}{3} [\cos(x \times 0) + 4 \cos(x \times 0.5) + \cos(x \times 1)] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6} \cos(x)$$

$$I_1 = \frac{0.5}{3} \left[\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6}$$

$$I_2 = \frac{0.5}{3} \left[\frac{2}{3} \cos\left(\frac{0}{2}\right) + 4 \times \frac{2}{3} \cos\left(\frac{0.5}{2}\right) + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{6} \times 3.8354881658219679018 = 0.639248027$$

$$I_3 = \frac{0.5}{3} \left[\frac{1}{6} \cos(0) + 4 \times \frac{1}{6} \cos(0.5) + \frac{1}{6} \cos(1) \right] = \frac{1}{6} \times 0.84177209223827176364 = 0.8417720922$$

$$I \simeq I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{6} [1 + 3.8354881658219679018 + 0.84177209223827176364]$$

$$I \approx \frac{1}{6} \times 5.6772602580602396654 = 0.94621004301003994423$$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cos(xy) dy dx \approx 0.94608307036718301494$$

$$E_{abs} = |0.94621004301003994423 - 0.94608307036718301494| = 0.00012697264285692929$$

$$E_{rel} = \frac{|0.94621004301003994423 - 0.94608307036718301494|}{|0.94608307036718301494|} = 0.00013420876753206260218$$

5. Integral Doble Impropia

$$I = \int_0^1 \int_1^\infty \frac{\sin(\frac{y}{x})}{x^2} dx dy$$

$$\text{Primero se hace un cambio de variable, } u = \frac{1}{x} \implies du = -\frac{1}{x^2} dx \implies I = \int_0^1 \int_0^1 \sin(xy) dx dy$$

(a) Integral explicita e integral impropia tipo 1 con $n = 4$ y $h_x = 0.5$

$$\text{i. } I(y) = \int_0^1 \int_0^1 \sin(xy) dx dy = \int_0^1 \left(-\frac{1}{y} \cos(xy) \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1 - \cos(y)}{y} dy \implies g(y) = 1 - \cos(y)$$

$$\text{ii. } p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\text{A. } g(0) = 0$$

$$\text{B. } g^{(1)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$\text{C. } g^{(2)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$\text{D. } g^{(3)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$\text{E. } g^{(4)}(0) = -\cos(0) = -1$$

$$\text{iii. } p_4(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$$

$$\text{iv. } \int_0^1 \frac{p_4(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2 \times 2} - \frac{x^4}{4 \times 24} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{96} = \frac{23}{96} = 0.23958$$

$$\begin{aligned} \text{v. } \int_0^1 G(x) dx &= \int_0^1 \frac{g(x) - p_4(x)}{x} dx \approx \frac{0.5}{3} \left[0 + 4 \times \left(\frac{1 - \cos(0.5) - \left(\frac{1}{2}0.5^2 - \frac{1}{24}0.5^4 \right)}{0.5} \right) + \left(1 - \cos(0.5) - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) \right] = \\ &= \frac{0.5}{3} \left[8 - 8 \times \cos(0.5) - 8 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{24} \times \frac{1}{16} + 1 - \cos(0.5) - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right] = \frac{0.5}{3} \left[8 - 9 \times \cos(0.5) + \frac{1}{48} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[8 - 9 \times 0.87758 - \frac{7}{16} \right] = \frac{1}{6} [8 - 7.8982 - 0.4375] = \frac{-0.3357}{6} = -0.05595 \end{aligned}$$

$$\text{vi. } I \approx 0.23958 - 0.05595 = 0.18363$$

(b) Simpsons compuesta con $h_x = 0.5$ y $h_y = 0.5$

- i. $I(y) = \int_0^1 \sin(xy) dx \simeq \frac{0.5}{3} [\sin(y \times 0) + 4 \sin(y \times 0.5) + \sin(y \times 1)] = \frac{2}{3} \sin(\frac{y}{2}) + \frac{1}{6} \sin(y)$
- ii. $I_1 = \frac{0.5}{3} [\frac{2}{3} \sin(\frac{0}{2}) + 4 \times \frac{2}{3} \sin(\frac{0.5}{2}) + \frac{2}{3} \sin(\frac{1}{2})] = \frac{1}{6} [\frac{8}{3} \times 0.247 + \frac{2}{3} \times 0.479] = \frac{1}{6} \times 0.978 = 0.163$
- iii. $I_2 = \frac{0.5}{3} [\frac{1}{6} \sin(0) + 4 \times \frac{1}{6} \sin(0.5) + \frac{1}{6} \sin(1)] = \frac{1}{6} [\frac{2}{3} \times 0.479 + \frac{1}{6} \times 0.841] = \frac{1}{6} \times 0.4595 = 0.07658$
- iv. $I \approx I_1 + I_2 = 0.163 + 0.07658 = 0.23958$

(c) $I \simeq 0.23981174200056472594$

- i. Primer método: $E_{abs} : |0.18363 - 0.239811742| = 0.056181742 \Rightarrow E_{rel} = \frac{0.056181742}{0.239811742} = 0.23427435842570210761$
- ii. Segundo método: $E_{abs} : |0.23958 - 0.239811742| = 0.000231742 \Rightarrow E_{rel} = \frac{0.000231742}{0.239811742} = 0.00096634967940810838195$

6. Integral Impropia

$$g(x) = e^x; \quad x^p = x^{\frac{1}{2}}$$

$$p_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$\int_0^1 \frac{p_4(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^1 \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{24} \right) dx$$

$$= \left[2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{11}x^{\frac{11}{2}} + \frac{1}{45}x^{\frac{15}{2}} \right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{45} = \frac{10622}{3465} = 3.0655123$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)}{x^{\frac{1}{2}}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$n = 8; \quad h = \frac{1}{4}; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{3}{4}; \quad x_4 = 1$$

$$\int_0^1 G(x) dx \simeq \frac{h}{3} [G(x_0) + 4G(x_1) + 2G(x_2) + 4G(x_3) + G(x_4)]$$

$$= \frac{1}{12} 0 + \frac{1}{12} 4 \frac{e^{\frac{1}{4}} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{(\frac{1}{4})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{4})^3}{6} + \frac{(\frac{1}{4})^4}{24}\right)}{(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{12} 2 \frac{e^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{6} + \frac{(\frac{1}{2})^4}{24}\right)}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{12} 4 \frac{e^{\frac{3}{4}} - \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{(\frac{3}{4})^2}{2} + \frac{(\frac{3}{4})^3}{6} + \frac{(\frac{3}{4})^4}{24}\right)}{(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{12} e^1 - \frac{1}{12} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \times 2.1229460 \times 10^{-2} = 1.769122 \times 10^{-3}$$

$$I \simeq 3.0655123 + 1.769122 \times 10^{-3} = 3.0672814$$

$$E_{abs} = |2.9253035 - 3.0672814| = 0.1419779$$

$$E_{rel} = \frac{|2.9253035 - 3.0672814|}{|2.9253035|} = 0.04853441702715632754$$

7. Mínimos Cuadrados y Simpson

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$v(x) = axe^x + bx \ln(x)$$

$$E(a, b) = \int_0^1 [x^2 + \frac{1}{x} - (axe^x + bx \ln(x))]^2 dx$$

(a) Sistema

$$\frac{\partial E(a, b)}{\partial a} = -2 \int_0^1 [x^2 + \frac{1}{x} - (axe^x + bx \ln(x))] xe^x dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) xe^x dx = a \int_0^1 x^2 e^{2x} dx + b \int_0^1 x^2 e^x \ln(x) dx$$

$$\frac{\partial E(a, b)}{\partial b} = -2 \int_0^1 [x^2 + \frac{1}{x} - (axe^x + bx \ln(x))] x \ln(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) x \ln(x) dx = a \int_0^1 x^2 e^x \ln(x) dx + b \int_0^1 x^2 \ln^2(x) dx$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx & \int_0^1 x^2 e^x \ln(x) dx \\ \int_0^1 x^2 e^x \ln(x) dx & \int_0^1 x^2 \ln^2(x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) xe^x dx \\ \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) x \ln(x) dx \end{bmatrix}$$

(b) Integrales

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) xe^x dx &= \int_0^1 (x^3 e^x + e^x) dx = \int_0^1 x^3 e^x dx + e - 1 = x^3 e^x \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 e^x dx + e - 1 \\ &= 2e - 1 - 3[x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx] = 2e - 1 - 3[e - 2(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx)] \\ &= 2e - 1 - 3[e - 2(e - e + 1)] = 2e - 1 - 3e + 6 = 5 - e \simeq 2.281\,718\,171\,540\,954\,764\,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{x}) x \ln(x) dx &= \int_0^1 x^3 \ln(x) dx + \int_0^1 \ln(x) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx + (x \ln x - x) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{x^4}{16} \Big|_0^1 - 1 = -\frac{17}{16} = -1.062\,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx &= x^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx \right] \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4} = 1.597\,264\,024\,732\,662\,556\,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln^2(x) dx &= \frac{x^3}{3} \ln^2(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} 2 \ln(x) \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{27} \simeq 7.407\,407\,407\,407\,407\,4 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x \ln(x) dx &\simeq \frac{0.5}{3} [f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{1}{6} [0 + 4 \times 0.5^2 e^{0.5} \ln(0.5) + 0] \\ &= -0.190\,467\,750\,052\,500\,698\,78 \simeq -0.1905 \end{aligned}$$

(c) Resolver sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1.597 & -0.1905 \\ -0.1905 & 7.407 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.281 \\ -1.063 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{-0.1905}{1.597} \\ -0.1905 & 7.407 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2.281}{1.597} \\ -1.063 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -0.1193 \\ -0.1905 + 0.1905 \times 1 & 7.407 \times 10^{-2} - 0.1905 \times 0.1193 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.428 \\ -1.063 + 0.1905 \times 1.428 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -0.1193 \\ 0 & \frac{0.05134}{0.05134} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.428 \\ \frac{-0.791}{0.05134} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -0.1193 + 0.1193 \times 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.428 - 0.1193 \times 15.41 \\ -15.41 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.4104 \\ -15.41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Polinomio de aproximación

$$v(x) = -0.4104xe^x - 15.41x \ln x$$

8. Fugacidad

$$\ln \left(\frac{f(P)}{P} \right) = \int_0^P \frac{C(P)-1}{P} dP$$

(a) Polinomio cuadrático de interpolación.

$$C(0) = 1.00, \quad C(1) = 0.99, \quad C(10) = 0.94.$$

$$C(x) = 1 \frac{(x-1)(x-10)}{10} + \frac{99}{100} \frac{(x)(x-10)}{-9} + \frac{94}{100} \frac{(x-1)(x)}{90} = \frac{1}{2250}x^2 - \frac{47}{4500}x + 1 = 0.00044444x^2 - 0.010444x + 1$$

(b) Calcule $f(P=10)$ utilizando (a) y la Regla de Simpson Compuesta con $h=2.5$

$$\ln \left(\frac{f(10)}{10} \right) = \int_0^{10} \frac{C(p)-1}{p} dp = \int_0^{10} \frac{\frac{1}{2250}p^2 - \frac{47}{4500}p + 1 - 1}{p} dp = \int_0^{10} \left(\frac{1}{2250}p - \frac{47}{4500} \right) dp = -\frac{37}{450}$$

Simpson:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} \left(\frac{1}{2250}p - \frac{47}{4500} \right) dp &\approx \frac{2.5}{3} (g(0) + 4g(2.5) + 2g(5) + 4g(7.5) + g(10)) = \frac{2.5}{3} \left(\frac{248}{1125} (0 + 4 \times 2.5 + 2 \times 5 + 4 \times 7.5 + 10) - 12 \times \frac{9947}{4500} \right) \\ &= \frac{2.5}{3} \left(\frac{1}{2250} \times 60 - 12 \times \frac{47}{4500} \right) = \frac{2.5}{3} \left(\frac{2}{75} - \frac{47}{375} \right) = -\frac{5}{6} \times \frac{37}{375} = -\frac{37}{450} \approx -0.082222 \\ \ln \left(\frac{f(10)}{10} \right) &= -0.082222 \implies f(10) = 10e^{-0.082222} = 9.2106745902182181749 \approx 9.2107 \end{aligned}$$

(c) La integral de forma explícita y de forma numérica es la misma, esto se debe a que la función a integrar es una polinomio de grado 1, y la regla de simpson es exacta hasta polinomios de grado 2, por lo que el error es cero.

10 Cuadratura de Gauss

10.1 Resumen de Materia

1. **Longitud de Arco:** Dada una función $f(x)$, la longitud de arco en el intervalo $[a, b]$, está dada por $L =$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx$$

2. **Area de Superficie:** Dada una función $f(x, y)$, el área de superficie en el intervalo $[a, b] \times [c, d]$, está dada por $A = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{df(x, y)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x, y)}{dy}\right)^2} dy dx$

3. **Grado de precisión de una cuadratura:** Dada una fórmula de aproximación de una integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$, se llama el grado de precisión de una cuadratura al grado máximo de algún polinomio, tal que la aproximación sea exacta. En el método de Simpson, su grado de precisión es igual a 2, ya que se basa en la aproximación de la integral por el polinomio interpolante de grado 2.

4. **Cuadratura de Gauss:** La idea es crear un método que usando n puntos, la fórmula de integración sea exacta hasta polinomios de grado $m \leq 2n - 1$, es decir:

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) w(x) dx$$

donde $w(x)$ es función de peso y $p_n(x)$ es el polinomio que interpola en $x_1 \dots x_n$.

Consideremos que $f(x)$ es un polinomio de grado $m \leq 2n - 1$, entonces

$$\underbrace{f(x) - p_n(x)}_{\text{polinomio de grado } m \text{ con ceros en } x_1 \dots x_n} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio de grado } m - n} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}_{\text{polinomio de grado } n = \alpha(x)}$$

$$\text{Nuestra condición es: } \int_a^b f(x) w(x) dx = \int_a^b p_n(x) w(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x) - p_n(x)) w(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b Q(x) \alpha(x) w(x) dx = 0$$

ie, $Q(x)$ es ortogonal a $\alpha(x)$, donde los ceros de $\alpha(x)$ son $x_1 \dots x_n$.

Entonces, dado un conjunto de polinomios ortogonales $\{\phi_0, \phi_1 \dots \phi_n\}$ para $[a, b]$ y $w(x)$, se toma $\alpha(x) = \phi_n(x)$, por lo que los puntos $x_1 \dots x_n$ buscados corresponden a los ceros de $\phi_n(x)$.

$$\text{Luego, la fórmula queda de la forma } \int_a^b f(x) w(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \text{ donde } c_k = \int_a^b L_{k,n}(x) w(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} w(x) dx.$$

5. **Polinomios de Legendre:** El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1 \dots \phi_n\}$ de Legendre definidos recursivamente es ortogonal en $[-1, 1]$ c/r a la función de peso $w(x) = 1$:

$$(a) \phi_0 = 1;$$

$$(b) \phi_1 = x - B_1$$

$$(c) \phi_k(x) = (x - B_k) \phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2$$

$$(d) B_k = \frac{\int_{-1}^1 x \phi_{k-1}(x)^2 dx}{\int_{-1}^1 \phi_{k-1}(x)^2 dx}$$

$$(e) C_k = \frac{\int_{-1}^1 x \phi_{k-2}(x) \phi_{k-1}(x) dx}{\int_{-1}^1 \phi_{k-2}(x)^2 dx}$$

6. Fórmulas alternativas de los Polinomios de Legendre:

(a) Fórmula recursiva: $P_n(x) = \frac{1}{n} [(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)]$

(b) Fórmula combinatorial: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k$

(c) Fórmula de Olindo Rodrigues: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^{(n)}(x^2-1)^n$

(d) Fórmula de Schlafli: $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}} dt$

(e) Función Generatriz: $\frac{1}{(1-2xh+h^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)h^k$

(f) Resumen de Polinomios de Legendre:

n	0	1	2	3	4	5
$P_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15)$

7. Cuadratura de Gauss y Polinomios de Legendre: Si deseamos encontrar una fórmula para integrar

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$, entonces para poder ocupar la base de Legendre:

(a) aplicamos el cambio de variable $x = \frac{1}{2}((b-a)t + a + b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt = \int_{-1}^1 g(t)dt, \text{ donde } g(t) = f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right) \frac{(b-a)}{2}$$

(b) Se calcula el polinomio de Legendre $P_n(x)$, y se buscan sus raíces: $x_1 \dots x_n$

(c) Luego, se calculan los coeficientes: $c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} dx = \frac{2}{(1-x_i^2) \left(\frac{dP_n(x_i)}{dx}\right)^2}, \forall i = 1 \dots n$

(d) Finalmente, nuestra fórmula queda de la forma: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{2}{(1-x_i^2) \left(\frac{dP_n(x_i)}{dx}\right)^2} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$

8. Raíces y Coeficientes de Legendre:

(a) $c_i = \frac{2}{(1-x_i^2) \left(\frac{dP_n(x_i)}{dx}\right)^2}$

(b) $x_k = \left(1 - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8n^3}\right) \cos\left(\frac{4k-1}{4n+2}\right) + O(n^{-4})$

n	raíces	coeficientes
2	± 0.5773502692	1
3	± 0.7745966692	0.5555555556
	0	0.8888888889
4	± 0.8611361159	0.3478548451
	± 0.3399810436	0.6521451549
5	± 0.5384693101	0.4786286705
	± 0.9061798459	0.2369268850
	0	0.5688888889

10.2 Problemas

- Encuentre c_1, c_2, x_1, x_2 tal que la fórmula $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ tenga el mayor grado de precisión posible, que corresponde a $2 \times 2 - 1 = 3$. Compare los resultados con las raíces del polinomio de Legendre $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, y los coeficientes dados por $c_i = \frac{2}{(1-x_i^2)\left(\frac{dP_n(x_i)}{dx}\right)^2}$
- Coincidere la función de un paraboloides $f(x, y) = x^2 + y^2$. Se desea calcular el area de la superficie del paraboloides en la región $[-1, 1] \times [0, 1]$.
 - Plantee la integral
 - Resuelva la integral usando Simpson Compuesto con $n_x = 2$, $n_y = 2$. Determine el número de evaluaciones que se hizo para obtener el cálculo.
 - Resuelva la misma integral pero usando Cuadratura Gaussiana con $n_x = 3$ y $n_y = 3$. Determine el número de evaluaciones que se hizo para obtener el cálculo.
 - Si el valor de integral es $I = 3.72313$, compare ambos resultados, tanto en precisión como en eficiencia. Obs: Trabaje con 6 cifras significativas con redondeo
- En la Cuadratura de Gauss Chebyshev consideramos el caso de la regla de tres nodos en $[-1, 1]$:

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \omega_{-1} f(x_{-1}) + \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

Las parámetros x_i y ω_i (6 en total), se eligen de modo que $I(f)$ sea exacta para polinomios de grado $2n-1 = 5$. Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Rightarrow \omega_{-1} \cdot 1 + \omega_0 \cdot 1 + \omega_1 \cdot 1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \\ f(x) = x &\Rightarrow \omega_{-1} x_{-1} + \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ f(x) = x^2 &\Rightarrow \omega_{-1} x_{-1}^2 + \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \\ f(x) = x^3 &\Rightarrow \omega_{-1} x_{-1}^3 + \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ f(x) = x^4 &\Rightarrow \omega_{-1} x_{-1}^4 + \omega_0 x_0^4 + \omega_1 x_1^4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{8} \\ f(x) = x^5 &\Rightarrow \omega_{-1} x_{-1}^5 + \omega_0 x_0^5 + \omega_1 x_1^5 = \int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Dada la simetría del problema, es razonable hacer el siguiente Ansatz:

$$x_0 = 0 \quad -x_{-1} = x_1 = \lambda \quad \omega_0 = \alpha \quad \omega_{-1} = \omega_1 = \beta$$

- Demuestre que aplicando el Ansatz, el sistema anterior se reduce a:

$$2\beta + \alpha = \pi \quad 2\beta\lambda^2 = \frac{\pi}{2} \quad 2\beta\lambda^4 = \frac{3\pi}{8}$$

y obtenga su solución.

- Considere $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$. Con esto:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx$$

- Calcule $I(f)$ mediante Cuadratura de Chebyshev.
- Calcule $I(f)$ mediante Simpson Compuesto ($n = 6$).
- Si el valor exacto es $I(f) = 1.7339460$, compare los métodos de Cuadratura de Chebyshev y Simpson Compuesto, en cuanto a precisión, facilidad de aplicación y cantidad de operaciones.

4. Gauss Legendre

Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con la función de peso $w(x) = 1$.

Los tres primeros polinomios de Legendre son:

n	0	1	2
$Le_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Nos interesa encontrar una fórmula análoga a Simpson Compuesto usando Cuadratura de Gauss-Legendre. Para eso:

- (a) Encuentre las raíces x_1 y x_2 de $Le_2(x)$. Calcule los coeficientes c_1 y c_2 de tal forma que la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

tenga el mayor grado de precisión posible. ¿Qué precisión tiene la fórmula?

- (b) Haga el cambio de variable respectivo para poder integrar con la fórmula anterior en cualquier intervalo $[a, b]$, y explice la fórmula general

$$\int_a^b f(x)dx \approx d_1 f(t_1) + d_2 f(t_2)$$

- (c) Haciendo la misma analogía que con Simpson Compuesto, dado un intervalo $[a, b]$ y un entero n (no necesariamente par), encuentre la fórmula de Gauss-Legendre Compuesto, que se basa en aplicar la fórmula anterior a n subintervalos de $[a, b]$. Denote $h = \frac{b-a}{n}$.

Obs: con $n = 1$, se obtiene Gauss-Legendre Simple

- (d) Calcule la integral $\int_0^1 x^x dx$ con Simpson Compuesto $n_s = 4$ y Gauss-Legendre Compuesto $n_l = 2$. Si el valor real es $I = 0.783\,430\,51$, compare ambas cuadraturas.

10.3 Respuestas

1. Cuadratura de Gauss

(a) Las ecuaciones son:

$$\text{i. } \int_{-1}^1 dx = 2 \implies c_1 + c_2 = 2$$

$$\text{ii. } \int_{-1}^1 x dx = 0 \implies c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$\text{iii. } \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \implies c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{iv. } \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \implies c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

(b) Resolviendo el sistema:

i. de i) se obtiene $c_2 = 2 - c_1$

ii. reemplazando en ii) $\implies c_1 x_1 + (2 - c_1)x_2 = 0 \implies x_2 = \frac{c_1 x_1}{c_1 - 2}$

iii. reemplazando en iii) $\implies c_1 x_1^2 + (2 - c_1) \left(\frac{c_1 x_1}{c_1 - 2} \right)^2 = \frac{2}{3} \implies x_1^2 = \frac{\frac{2}{3}}{(c_1 - \frac{c_1^2}{c_1 - 2})}$

iv. reemplazando en iv) $\implies c_1 \left(\frac{\frac{2}{3}}{(c_1 - \frac{c_1^2}{c_1 - 2})} \right)^{\frac{3}{2}} + (2 - c_1) \left(\frac{c_1}{c_1 - 2} \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{(c_1 - \frac{c_1^2}{c_1 - 2})}} \right)^3 = 0$

v. despejando $\implies c_1 + (2 - c_1) \left(\frac{c_1}{c_1 - 2} \right)^3 = 0$

$$\implies c_1 - \frac{c_1^3}{(c_1 - 2)^2} = 0$$

$$\implies 1 = \frac{c_1}{c_1 - 2}$$

$$\implies c_1 - 2 = c_1$$

$$\implies c_1 = 1$$

vi. despejando los otro términos

$$\implies c_2 = 2 - c_1 = 1$$

$$\implies x_1 = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{(1 - \frac{1}{1 - 2})}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\implies x_2 = \frac{c_1 x_1}{c_1 - 2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(c) Nuestra fórmula es $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

(d) Ahora, las raíces de $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ son $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(e) Los coeficientes son:

$$\text{i. } c_1 = \frac{2}{(1 - x_1^2) \left(\frac{dP_n(x_1)}{dx} \right)^2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}) \left(3 \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\text{ii. } c_2 = \frac{2}{(1 - x_2^2) \left(\frac{dP_n(x_2)}{dx} \right)^2} = 1$$

Como se puede ver, el problema original es equivalente a buscar las raíces y los coeficientes de Legendre, pero este último método es mucho más fácil que el original.

2. El area de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la región $[-1, 1] \times [0, 1]$.

(a) $I = \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$

(b) Simpson Compuesto con $n_x = 2$, $n_y = 2 \implies h_x = 1$, $h_y = \frac{1}{2}$

i. $I(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx \approx \frac{1}{3} [f(-1, y) + 4f(0, y) + f(1, y)]$

ii. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{3} f(-1, y) dy \approx \frac{1}{6} \frac{1}{3} [f(-1, 0) + 4f(-1, 0.5) + f(-1, 1)]$
 $= \frac{1}{18} (\sqrt{1+4} + 4\sqrt{1+4+1} + \sqrt{1+4+4}) = \frac{1}{18} (\sqrt{5} + 4\sqrt{6} + \sqrt{9}) = 0.835224$

iii. $I_2 = \int_0^1 \frac{4}{3} f(0, y) dy \approx \frac{1}{6} \frac{4}{3} [f(0, 0) + 4f(0, 0.5) + f(0, 1)]$
 $= \frac{4}{18} (\sqrt{1+4\sqrt{1+1}} + \sqrt{1+4}) = \frac{4}{18} (1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 1.9762$

iv. $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{3} f(1, y) dy \approx \frac{1}{6} \frac{1}{3} [f(1, 0) + 4f(1, 0.5) + f(1, 1)]$
 $= \frac{1}{18} (\sqrt{1+4} + 4\sqrt{1+4+1} + \sqrt{1+4+4}) = \frac{1}{18} (\sqrt{5} + 4\sqrt{6} + \sqrt{9}) = 0.835224$

v. $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.835224 + 1.9762 + 0.835224 = 3.64665$

vi. La malla era de 3×3 , por lo que se hicieron 9 evaluaciones a la función

(c) Cuadratura Gaussiana con $n_x = 3$ y $n_y = 3$

i. Primero debemos dejar la region en $[-1, 1] \times [-1, 1] : y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

$$I = \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} f(x, \frac{t+1}{2}) dx dt$$

se tiene que las raices son ± 0.774597 y 0, con los pesos 0.555556 y 0.888889 respectivamente:

ii. $I(t) = 0.555556 \times \frac{1}{2} f(-0.774597, \frac{t+1}{2}) + 0.888889 \times \frac{1}{2} f(0, \frac{t+1}{2}) + 0.555556 \times \frac{1}{2} f(0.774597, \frac{t+1}{2})$

iii. $I_1 = 0.555556 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(-0.774597, \frac{-0.774597+1}{2})$
 $+ 0.888889 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(-0.774597, \frac{1}{2})$
 $+ 0.555556 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(-0.774597, \frac{0.774597+1}{2})$
 $= 0.154321 \times \sqrt{1 + 4(-0.774597)^2 + 4(\frac{-0.774597+1}{2})^2}$
 $+ 0.246914 \times \sqrt{1 + 4(-0.774597)^2 + 4(\frac{1}{2})^2}$
 $+ 0.154321 \times \sqrt{1 + 4(-0.774597)^2 + 4(\frac{0.774597+1}{2})^2}$
 $= 0.154321 \times 1.85764 + 0.246914 \times 2.09762 + 0.154321 \times 2.55914$
 $= 1.19953$

iv. $I_2 = 0.555556 \times 0.888889 \times \frac{1}{2} f(0, \frac{-0.774597+1}{2})$
 $+ 0.888889 \times 0.888889 \times \frac{1}{2} f(0, \frac{1}{2})$
 $+ 0.555556 \times 0.888889 \times \frac{1}{2} f(0, \frac{0.774597+1}{2})$
 $= 0.246914 \times \sqrt{1 + 4(\frac{-0.774597+1}{2})^2}$
 $+ 0.395062 \times \sqrt{1 + 4(\frac{1}{2})^2}$
 $+ 0.246914 \times \sqrt{1 + 4(\frac{0.774597+1}{2})^2}$
 $= 0.246914 \times 1.02509 + 0.395062 \times 1.41421 + 0.246914 \times 2.03696$
 $= 1.31476$

$$\begin{aligned}
 \text{v. } I_{31} &= 0.555556 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(0.774597, \frac{-0.774597+1}{2}) \\
 &+ 0.888889 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(0.774597, \frac{1}{2}) \\
 &+ 0.555556 \times 0.555556 \times \frac{1}{2} f(0.774597, \frac{0.774597+1}{2}) \\
 &= 0.154321 \times \sqrt{1 + 4(0.774597)^2 + 4\left(\frac{-0.774597+1}{2}\right)^2} \\
 &+ 0.246914 \times \sqrt{1 + 4(0.774597)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 &+ 0.154321 \times \sqrt{1 + 4(0.774597)^2 + 4\left(\frac{0.774597+1}{2}\right)^2} \\
 &= 0.154321 \times 1.85764 + 0.246914 \times 2.09762 + 0.154321 \times 2.55914 \\
 &= 1.19953
 \end{aligned}$$

$$\text{vi. } I = I_1 + I_2 + I_3 = 1.19953 + 1.31476 + 1.19953 = 3.71382$$

vii. La malla era de 3×3 , por lo que se hicieron 9 evaluaciones a la función

(d) Precisión y eficiencia

$$\text{i. } E_{abs}(Simpson) = |3.72313 - 3.64665| = 0.07648 \implies E_{rel}(Simpson) = \frac{|3.72313 - 3.64665|}{|3.72313|} = 0.020541855911558285636$$

$$\text{ii. } E_{abs}(Gauss) = |3.72313 - 3.71382| = 0.00931 \implies E_{rel}(Simpson) = \frac{|3.72313 - 3.71382|}{|3.72313|} = 0.002500584185886606162$$

$$\text{iii. } \frac{E_{abs}(Simpson)}{E_{abs}(Gauss)} = \frac{0.07648}{0.00931} \approx 8$$

Como se vió, ambos métodos evaluaban la función en 9 puntos diferentes, por lo que la eficiencia de ambos métodos es similar, pero la diferencia en la precisión es extremadamente grande, ya que la relación entre los errores de ambos métodos es cerca de 8, por lo que el método de Gauss es superior al método de Simpson.

3. Cuadratura de Gauss Chebyshev

- (a) El Ansatz: $x_0 = 0$, $-x_{-1} = x_1 = \lambda$, $\omega_0 = \alpha$, $\omega_{-1} = \omega_1 = \beta$

$$\omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1 = \pi \Rightarrow \alpha + 2\beta = \pi \quad (*)$$

$$\omega_{-1}x_{-1}^2 + \omega_0x_0^2 + \omega_1x_1^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta\lambda^2 + \beta\lambda^2 = \frac{\pi}{2} \quad (**)$$

$$\omega_{-1}x_{-1}^4 + \omega_0x_0^4 + \omega_1x_1^4 = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \beta\lambda^4 + \beta\lambda^4 = \frac{3\pi}{8} \quad (***)$$

$$\text{dividiendo } (***) \text{ por } (**) \Rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{reemplazando en } (**) \Rightarrow 2\beta\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{reemplazando en } (*) \Rightarrow \alpha + 2\frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

(b) $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4}dx$

- i) Cuadratura de Gauss Chebyshev

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{w(x)}w(x)dx = \int_{-1}^1 h(x)w(x)dx, \text{ donde } w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ y } h(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}$$

Aplicando cuadratura de Gauss Chebyshev

$$\Rightarrow I(f) = \int_{-1}^1 h(x)w(x)dx \simeq \omega_{-1}h(x_{-1}) + \omega_0h(x_0) + \omega_1h(x_1) = \frac{\pi}{3} \left(h\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + h(0) + h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4} + \frac{\sqrt{1-0^2}}{1+0^4} + \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4} \right) = \frac{\pi}{3} \left(2 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4} + 1 \right) = \frac{\pi}{3} \left(2 \frac{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{1+\frac{9}{16}} + 1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(32 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{25} + 1 \right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{32}{50} + 1 \right) = \frac{41}{75}\pi = 1.7174$$

- ii) Simpson Compuesto $n = 6 \Rightarrow h = \frac{1+1}{6} = \frac{1}{3}$

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{9} \left[f(-1) + 4f\left(-\frac{2}{3}\right) + 2f\left(-\frac{1}{3}\right) + 4f(0) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 4f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{1+(-1)^4} + 4 \frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^4} + 2 \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^4} + 4 \frac{1}{1+(0)^4} + 2 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4} + 4 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^4} + \frac{1}{1+(1)^4} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{2}{1+1} + \frac{8}{1+\frac{16}{81}} + \frac{4}{1+\frac{1}{81}} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[1 + \frac{648}{97} + \frac{162}{41} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{62167}{3977} \right] :$$

$$= \frac{15.63}{9} = 1.737$$

- (c) Comparación de los métodos: $I = 1.7339460$

- i) Precisión

$$E_{abs}(\text{Gauss}) = |1.7174 - 1.7339460| = 0.016546$$

$$E_{rel}(\text{Gauss}) = \frac{|1.7174 - 1.7339460|}{1.7339460} = 0.009542$$

$$E_{abs}(\text{Simpson}) = |1.737 - 1.7339460| = 0.003054$$

$$E_{rel}(\text{Simpson}) = \frac{|1.737 - 1.7339460|}{1.7339460} = 0.001761$$

$$\frac{E_{abs}(\text{Gauss})}{E_{abs}(\text{Simpson})} = \frac{0.016546}{0.003054} = 5.4$$

- ii) Facilidad de aplicación

El método de Gauss solo necesita 3 evaluaciones, mientras que el de Simpson necesitaba 7 evaluaciones, por lo que es menos trabajo usar el método de Gauss

- iii) Cantidad de operaciones

$$\text{Gauss: } 3 \times 9 + 2 + 2 = 31$$

$$\text{Simpson: } 6 \times 7 + 5 + 7 = 54$$

- iv) La solución entregada por el método de Simpson es más precisa que la solución entregada por el método de Gauss, claro que esto se debe por la cantidad de puntos tomados, ya que en Simpson fueron 7 puntos, mientras que en Gauss solo fueron 3. Seguramente, si aplicamos el método de Gauss con 7 puntos, la solución entregada sería mucho mejor que la de Simpson con 7 puntos.

4. Gauss Legendre

(a) Raíces

$$\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) + c_2 f(\frac{1}{3}\sqrt{3})$$

$$\text{i. } f(x) = 1 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2$$

$$\text{ii. } f(x) = x \Rightarrow 0 = -\frac{c_1}{3}\sqrt{3} + \frac{c_2}{3}\sqrt{3} \\ \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

$$\text{iii. } f(x) = x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{2}{3} = \int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$\text{iv. } f(x) = x^3 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 = 0 = \int_{-1}^1 x^3 dx$$

$$\text{v. } f(x) = x^4 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^4 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^4 = \frac{2}{9} \neq \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$$

La precisión de la fórmula es 3, ya que cualquier polinomio de grado 3 es combinación lineal de $\{1, x, x^2, x^3\}$, y como la integral es lineal, si se cumple para la base, se cumple para cualquier elemento generado por la base.

(b) Cambio de variable

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ haciendo } t = \frac{x-a}{b-a} - \frac{x-b}{a-b} = \frac{2x-a-b}{b-a} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2} dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\frac{t(b-a)+a+b}{2})dx = \frac{b-a}{2} f(\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}(b-a)+a+b}{2}) + \frac{b-a}{2} f(\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}(b-a)+a+b}{2})$$

$$\Rightarrow d_1 = d_1 = \frac{b-a}{2}, \text{ y } t_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)a+(\sqrt{3}+1)b}{2\sqrt{3}}, t_2 = \frac{(\sqrt{3}+1)a+(\sqrt{3}-1)b}{2\sqrt{3}}$$

(c) Gauss Legendre compuesto

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+h*k}^{a+h*(k+1)} f(x)dx \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a+h*(k+1)-(a+h*k)}{2} (f(\frac{(\sqrt{3}-1)(a+h*k)+(\sqrt{3}+1)(a+h*(k+1))}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{(\sqrt{3}+1)(a+h*k)+(\sqrt{3}-1)(a+h*(k+1))}{2\sqrt{3}})) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(\frac{2\sqrt{3}(a+h*k)+(1+\sqrt{3})h}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{2\sqrt{3}(a+h*k)+(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}))$$

(d) Calcular $\int_0^1 x^x dx$

Se usarán 8 cifras significativas con redondeo, pero para el control bastaban 5.

$$\text{i. Simpson Compuesto } n_s = 4 \Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x^x dx \approx \frac{1}{4 \times 3} [f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)] = \frac{1}{4 \times 3} [1 + 4(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} + 2(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} + 4(\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}} + 1]$$

$$= \frac{1}{12} [1 + 4 \times 0.70710678 + 2 \times 0.70710678 + 4 \times 0.80592745 + 1]$$

$$= \frac{9.4663505}{12} = 0.78886254$$

$$\Rightarrow I_{simp} = 0.78886254$$

$$\text{ii. Gauss-Legendre Compuesto } n_l = 2 \Rightarrow h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^x dx \approx \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2 \times 2} (f(\frac{\sqrt{3}k + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3}k + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}}))$$

$$= \frac{1}{4} [f(\frac{\frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3} + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}})]$$

$$= \frac{1}{4} [f(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{1+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}})]$$

$$= \frac{1}{4} [f(0.39433757) + f(0.10566243) + f(0.89433757) + f(0.60566243)]$$

$$= \frac{1}{4} [0.69284427 + 0.78861508 + 0.90495284 + 0.73808313]$$

$$= \frac{3.1244953}{4} = 0.78112383$$

$$\Rightarrow I_{gauss} = 0.781\,123\,83$$

iii. Comparación

Veamos los errores relativos de ambos:

$$E_{simp} = \frac{|0.788\,862\,54 - 0.783\,430\,51|}{0.783\,430\,51} = 6.933\,646\,227\,283\,131\,978\,1 \times 10^{-3}$$

$$E_{gauss} = \frac{|0.781\,123\,83 - 0.783\,430\,51|}{0.783\,430\,51} = 2.944\,332\,612\,218\,536\,140\,5 \times 10^{-3}$$

$$\frac{E_{simp}}{E_{gauss}} \approx 2.355$$

El error de simpson es mas del doble que el de gauss, y como se hicieron la misma cantidad de evaluaciones de la función

\Rightarrow Gauss-Legendre Compuesto es más exacto que Simpson Compuesto

11 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

11.1 Resumen de Materia

- Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal:** $a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$
- EDO 1° Grado:** $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \implies y(x) = ce^{(-\int p(x)dx)} + e^{(-\int p(x)dx)} \int f(x)e^{(\int p(x)dx)} dx$
- Ecuación Diferencial Bernoulli:** $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)y^n(x) \implies y'(x)y^{-n}(x) + p(x)y(x)y^{-n}(x) = f(x) \implies (1-n)y'(x)y^{-n}(x) + (1-n)p(x)y(x)y^{-n}(x) = (1-n)f(x) \implies u = y^{1-n}, u'(x) + (1-n)p(x)u(x) = (1-n)f(x)$
- Ecuación Diferencial Riccati:** $y'(x) = p(x) + q(x)y(x) + r(x)y^2(x) \implies y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$, donde $y_p(x)$ es una solución particular, $y_p'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} = p(x) + \left(q(x)y_p(x) + \frac{q(x)}{z(x)}\right) + r(x)\left(y_p^2(x) + 2\frac{y_p(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) \implies -\frac{z'(x)}{z^2(x)} = \frac{q(x)}{z(x)} + r(x)\left(2\frac{y_p(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) \implies -z'(x) = q(x)z(x) + 2r(x)y_p(x)z(x) + r(x)$
- Problema de Cauchy o de Valor Inicial:** Dada una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en ambas variables y un punto inicial $y_0 \in \mathbb{R}$, encontrar una función $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $y(t = t_0) = y_0$, $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, T]$. Este es un problema No Lineal de Primer Orden No Homogéneo.
- Condición de Lipschitz:**
 - Se dice que una función $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz en la variable y si existe una constante L tal que: $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in R$
 - Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo. Si existe una constante L que verifica: $\left|\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}\right| \leq L, \forall (t, y) \in R$, entonces f satisface la condición de Lipschitz en la variable y .
- Teorema:** Sea $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $R = \{(t, y)/t_0 \leq t \leq T, -\infty < y < \infty\}$. Si f satisface una condición de Lipschitz en la variable y , entonces el problema de valor inicial: $y(t = t_0) = y_0$, $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, T]$, tiene solución única.
- Método de la Serie de Taylor para Prob. de Cauchy:** $y(t_{k+1}) = \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(t_k)}{i!} h^i + Error$, donde $h = t_{k+1} - t_k$, $Error(t) = \frac{y^{(n+1)}(\xi_k)}{(n+1)!} h^{n+1}$, pero $y'(t) = f(t, y(t))$, luego $y(t_{k+1}) = y(t_k) + \sum_{i=1}^n \frac{y^{(i)}(t_k)}{i!} h^i = y(t_k) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i+1)}(t_k)}{(i+1)!} h^{i+1} = y(t_k) + h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(t_k, y(t_k))}{(i+1)!} h^i$
- Método de Euler:** Se determinan n valores y_k de la función $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en puntos t_k equispaciados en $[t_0, T]: h = \frac{T-t_0}{n}$, $t_k = t_0 + kh$, $k = 0, \dots, n$, $y_0 = y(t = t_0)$, $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$, $Error = \frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi)$
- Método de Runge-Kutta de Orden 2:** Se mejora el método de Euler
 - Se definen
 - $q_k^1 = hf(t_k, y_k)$
 - $q_k^2 = hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta hf(t_k, y_k))$
 - $y_{k+1} = y_k + \mu_1 q_k^1 + \mu_2 q_k^2$
 - Se cumple que $y_{k+1} \simeq y(t_{k+1}) = y(t_k + h) \simeq y(t_k) + y'(t_k)h + \frac{y''(t_k)}{2} h^2 = y(t_k) + f(t_k, y_k)h + \frac{f'(t_k, y_k)}{2} h^2$
 - Luego, $f'(t_k, y_k) = \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} y'(y_k) = \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} f(t_k, y_k)$
 - Juntando expresiones, $y_{k+1} = y(t_k) + f(t_k, y_k)h + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} f(t_k, y_k) \frac{h^2}{2} \quad (*)$

- (e) Por otra parte, $y_{k+1} = y_k + \mu_1 h f(t_k, y_k) + \mu_2 h f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h f(t_k, y_k))$
- (f) Pero $f(t_k + \alpha h, y_k + \beta h f(t_k, y_k)) \simeq f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta h f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y}$
- (g) Se tiene $y_{k+1} = y_k + \mu_1 h f(t_k, y_k) + \mu_2 h \left[f(t_k, y_k) + \alpha h \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \beta h f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \right]$
- (h) Juntando terminos, $y_{k+1} = y_k + (\mu_1 + \mu_2) h f(t_k, y_k) + \mu_2 \alpha h^2 \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial t} + \mu_2 \beta h^2 f(t_k, y_k) \frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y} \quad (**)$
- (i) Pero (*) y (**) deben ser iguales por lo que se debe cumplir:
 - i. $(\mu_1 + \mu_2) = 1$
 - ii. $\mu_2 \alpha = \frac{1}{2}$
 - iii. $\mu_2 \beta = \frac{1}{2}$
- (j) Para cualquier valores $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta$ que cumplan lo anterior es un método de Runge-Kutta.

11. Método del Punto Medio Runge-Kutta de Orden 2:

- (a) $\mu_1 = 0$
- (b) $\mu_2 = 1$
- (c) $\alpha = \frac{1}{2}$
- (d) $\beta = \frac{1}{2}$
- (e) $y_{k+1} = y_k + h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k))$
- (f) $Error : O(h^3)$

12. Método de Runge-Kutta de Orden 3

- (a) $q_k^1 = h f(t_k, y_k)$
- (b) $q_k^2 = h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2})$
- (c) $q_k^3 = h f(t_k + h, y_k - q_k^1 - 2q_k^2)$
- (d) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 4q_k^2 + q_k^3)$
- (e) $Error : O(h^4)$

13. Método de Runge-Kutta de Orden 4

- (a) $q_k^1 = h f(t_k, y_k)$
- (b) $q_k^2 = h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2})$
- (c) $q_k^3 = h f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^2}{2})$
- (d) $q_k^4 = h f(t_k + h, y_k + q_k^3)$
- (e) $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 2q_k^2 + 2q_k^3 + q_k^4)$
- (f) $Error : O(h^5)$

14. Métodos Multipaso Explícitos: Un método multipaso de paso $m \geq 1$ es de la forma:

- (a) $y_{k+1} = a_{m-1}y_k + a_{m-2}y_{k-1} + \dots + a_0y_{k-m+1} + h[b_{m-1}f(t_k, y_k) + b_{m-2}f(t_{k-1}, y_{k-1}) + \dots + b_0f(t_{k-m+1}, y_{k-m+1})]$
- (b) Se necesitan m valores iniciales y_0, y_1, \dots, y_{m-1}
- (c) Los coeficientes $a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_0$ y $b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_0$ son las constantes del método
- (d) $h = \frac{T-t_0}{n}$, $t_k = t_0 + kh \forall k = 0, \dots, n$

15. Método Multipaso de Adams Bashforth de

- (a) **2 pasos:** $y_{k+1} = y_k + h[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})]$
 (b) **3 pasos:** $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}[23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2})]$
 (c) **4 pasos:** $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}[55f(t_k, y_k) - 59f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(t_{k-3}, y_{k-3})]$

16. **Sistemas de EDO's:** Un sistema de primer orden de edo no lineales es de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & x_1(t_0) &= x_1^0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & x_2(t_0) &= x_2^0 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) & x_n(t_0) &= x_n^0\end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$

17. **Condición necesaria Lipschitz:** Si las funciones f_i son continuas y satisfacen la condición de Lipschitz en D :

$$|f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) - f_i(t, v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq L \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$$

$$D = \{(t, z_1, z_2, \dots, z_n) | 0 \leq t \leq T, -\infty < z_j < \infty \forall j = 1 \dots n\}$$

Entonces el sistema de EDO's tiene solución única

18. **Condición suficiente Lipschitz:** La condición necesaria Lipschitz se satisface si:

$$\left| \frac{\partial f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_j} \right| \leq L, \quad \forall (t, u_1, u_2, \dots, u_n) \in D$$

19. **Método de Runge-Kutta de Orden 2**

$$h = \frac{T}{n}, \quad t_k = kh, \quad \forall k = 0 \dots n$$

$$x_{ik} = x_i(t_k) \quad \text{Aproximación de Runge-Kutta}$$

$$q_{ik}^1 = hf_i(t_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}), \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$q_{ik}^2 = hf_i(t_k + \frac{h}{2}, x_{1k} + \frac{q_{1k}^1}{2}, x_{2k} + \frac{q_{2k}^1}{2}, \dots, x_{nk} + \frac{q_{nk}^1}{2}), \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$x_{i,k+1} = x_{ik} + q_{ik}^2, \quad \forall i = 1 \dots n$$

20. **Edo's de orden superior:**

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}, \quad \forall k = 0 \dots n-1$$

Se transforma en un sistema de Edo's

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) & \frac{\partial x_1}{\partial t}(t) &= y'(t) \\ x_2(t) &= y'(t) & \frac{\partial x_2}{\partial t}(t) &= y''(t) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) & \frac{\partial x_n}{\partial t}(t) &= y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

11.2 Problemas

1. Considere el problema de valor inicial $y' = y - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 0.2$, $y(0) = 0.5$
 - (a) Demuestre que el problema tiene una única solución
 - (b) Resuelva de forma exacta. Hint: $\int t^2 e^{-t} dt = -2e^{-t} - 2te^{-t} - t^2 e^{-t}$
 - (c) Resuelva usando el método de Euler con $h = 0.025$
 - (d) Resuelva usando el método del punto medio de Runge-Kutta de Orden 2 con $h = 0.05$
 - (e) Resuelva usando el método de Runge-Kutta de Orden 4 con $h = 0.1$
 - (f) Compare los resultados de los métodos entre si con los valores exactos que se obtienen de la parte b), y comente
2. La fuerza del viento f causa que el mástil de un barco se desvíe, siguiendo la ecuación diferencial basada en las leyes de la mecánica:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{f}{2EI}(L - z)^2, \quad z \in [0, L]$$

Donde E es el módulo de elasticidad, L es la altura del mástil e I es el momento de inercia. Se cumple que $\frac{dy}{dz}(0) = 0$

Resuelva la edo através de Runge-Kutta de 2 orden, con paso $h = 10$, usando una carga uniforme $f(z) = 50$ $[\frac{libras}{pie}]$, $L = 30[pies]$, $E = 1.5 \times 10^8[\frac{libras}{pie^2}]$ e $I = 0.06[pies^4]$

3. Se desea resolver la siguiente Edo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - y(x) + x &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dx}(0) &= 2 \\ x &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (+)$$

Para eso, se proponen 2 métodos para encontrar una solución aproximada de la Edo.

- (a) Punto Fijo

Vamos a aproximar $y(x)$ a través del método de Punto Fijo. Para eso:

$$\text{i. Demuestre que } \phi(p_1(x), p_2(x)) = \begin{bmatrix} 1 + \int_0^x p_2(t) dt \\ 2 + \int_0^x (p_1(t) - t) dt \end{bmatrix} \text{ tiene como punto fijo la solución de la Edo,}$$

donde $y(x) = p_1(x)$, $\frac{dy}{dx}(x) = p_2(x)$.

- ii. Partiendo de $p_1^0 = y(0)$, $p_2^0 = \frac{dy}{dx}(0)$ itere 3 veces la función de punto fijo para encontrar una solución aproximada de $y(x)$. Llame a esta solución $PF(x)$.

- (b) Mínimos Cuadrados

Vamos a aproximar $y(x)$ a través del método de Mínimos Cuadrados, resuelto con el método de Newton Kantorovich, para eso:

- i. Demuestre que el problema de optimización

$$\min \frac{1}{2} x^t Q x + r^t x$$

donde Q es simétrica definida positiva, es resuelto en una iteración por el método de Newton Kantorovich, sin importar el punto inicial. Diga cual es la solución.

- ii. Sea $p(x)$ un polinomio de 3° grado. Determine algunas de las constantes del polinomio, aplicando las condiciones iniciales del problema (+).

iii. Considere el error de aproximación como

$$E = \int_0^1 \left(\frac{d^2 p}{dx^2}(x) - p(x) + x \right)^2 dx$$

Encuentre las constantes restantes de $p(x)$ que minimizen el error E . Para eso explique porque E se puede expresar como $\frac{1}{2}x^t Qx + r^t x$ (solo explique y argumente, no lo haga). Con esto, resuelva el problema de mínimos cuadrados utilizando Newton Kantorovich, partiendo de una solución que simplifique los cálculos. Llame a esta solución $PM(x)$.

(c) Comparaciones de las soluciones aproximadas

La ecuación diferencial tiene como solución exacta $y(x) = e^x + x$.

i. El polinomio de Taylor de 3° grado de $y(x)$ entorno al 0 es $T(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

El polinomio de 3° grado que aproxima a $y(x) = e^x + x$ e interpola $y(0)$ e $y'(0)$, usando los mínimos cuadrados en el intervalo $[0, 1]$ es $M(x) = 1 + 2x + 0.4691x^2 + 0.2468x^3$.

Compare los polinomios calculados $PF(x)$ y $PM(x)$ con $T(x)$ y $M(x)$. Comente.

4. La ecuación de Duffing se utiliza para modelar diferentes sistemas dinámicos (resortes, transformadores, etc). Su forma más general es:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \delta \frac{dx(t)}{dt} + (\beta x^3(t) \pm \omega_0^2 x(t)) = \gamma \cos(\omega t + \phi) \quad (D)$$

donde las constantes $\delta, \beta, \gamma, \phi, \omega_0, \omega$ dependen del sistema bajo estudio. El caso de la ecuación de un transformador de fase nula queda:

$$\delta = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \phi = 0, \omega_0 = 1, \omega = \pi, \pm = -$$

para $t \in [0, 1]$.

(a) Plantee el sistema de 2 edo no lineales asociado a (D)

(b) Resuelva el sistema aplicando el Método RK de orden 2, para las condiciones iniciales: $x(0) = x_0 = 1, x'(0) = x'_0 = 0$. Considere $h = 0.5$ y una aritmética de 5 cifras significativas con redondeo.

5. Métodos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

La ecuación diferencial de Bernoulli de orden n (entero con $n \neq 1$) se define según:

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)y(x)^n \quad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x=0) = y_0$$

Esta edo es no lineal pero integrable. Multiplicando (B) por $(1-n)y^{-n}$ se tiene:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^{1-n}) + (1-n)p(x)y(x)^{1-n} = q(x)(1-n)$$

Si se define $u(x) = y(x)^{1-n}$ se obtiene la edo de primer orden lineal en la variable $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u(x) = q(x)(1-n)$$

Para la sgte. ecuación tipo Bernoulli donde $n = -2, p(x) = x^2, q(x) = x^2$:

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = \frac{x^2}{y^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x=0) = 3 \quad (*)$$

(a) Obtenga la solución analítica de $(*)$.

(b) Obtenga la solución numérica de $(*)$ mediante el método de Runge-Kutta de Orden 3 para $h = 0.2$:

$$\begin{aligned} q_k^1 &= hf(x_k, y_k) & q_k^2 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}) & q_k^3 &= hf(x_k + h, y_k - q_k^1 + 2q_k^2) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 4q_k^2 + q_k^3) & \forall k &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Determine la precisión de la solución numérica, comparando la solución analítica y numérica.

6. Se desea usar el método de mínimos cuadrados para resolver la siguiente edo lineal:

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) - x &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ x &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (+)$$

(a) Sea $p(x)$ un polinomio de 3° grado. Determine algunas de las constantes del polinomio, aplicando las condiciones iniciales del problema $(+)$.

(b) Aproxime $y(x)$ por el polinomio $p(x)$, usando el método de los mínimos cuadrados aplicado a la ecuación diferencial.

(c) La ecuación diferencial tiene como solución exacta $y(x) = \cos x + x$. Llame a $q(x)$ el polinomio de 3° grado que aproxima a $\cos(x) + x$ usando los mínimos cuadrados en el intervalo $[0, 1]$. Vimos que $p(x)$ también es un polinomio de 3° grado que aproxima a $\cos(x) + x$, ya que es la solución de la ecuación diferencial. Diga cual de los dos errores cuadráticos, asociados a $p(x)$ y a $q(x)$ es mayor. Explique y argumente.

11.3 Respuestas

1. Problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5$$

(a) $f(t, y) = y - t^2 + 1, \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = 1 \Rightarrow \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \leq 1 \Rightarrow L = 1 \Rightarrow$ satisface la condición de Lipschitz \Rightarrow Tiene solución única

(b) $y' = y - t^2 + 1 \Rightarrow y' - y = -t^2 + 1 \Rightarrow p(t) = -1, f(t) = -t^2 + 1$
 $\Rightarrow y(t) = ce^{(-\int -1 dt)} + e^{(-\int -1 dt)} \int (-t^2 + 1) e^{(\int -1 dt)} dt = ce^t + e^t [\int e^{-t} dt - \int t^2 e^{-t} dt]$
 $= ce^t + e^t [-e^{-t} - (-2e^{-t} - 2te^{-t} - t^2 e^{-t})] = ce^t - 1 + 2 + 2t + t^2 = ce^t + 1 + 2t + t^2$
 $y(0) = 0.5 = c + 1 \Rightarrow c = -0.5 \Rightarrow y(t) = 1 + 2t + t^2 - 0.5e^t$

(c) $h = 0.025, y_0 = 0.5, y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$

- i. $t_1 = 0.025; y_1 = y_0 + 0.025f(t_0, y_0) = 0.5 + 0.025(0.5 - 0^2 + 1) = 0.5375$
- ii. $t_2 = 0.05; y_2 = y_1 + 0.025f(t_1, y_1) = 0.5375 + 0.025(0.5375 - 0.025^2 + 1) = 0.57592$
- iii. $t_3 = 0.075; y_3 = y_2 + 0.025f(t_2, y_2) = 0.57592 + 0.025(0.57592 - 0.05^2 + 1) = 0.61526$
- iv. $t_4 = 0.1; y_4 = y_3 + 0.025f(t_3, y_3) = 0.61526 + 0.025(0.61526 - 0.075^2 + 1) = 0.65550$
- v. $t_5 = 0.125; y_5 = y_4 + 0.025f(t_4, y_4) = 0.65550 + 0.025(0.65550 - 0.1^2 + 1) = 0.69664$
- vi. $t_6 = 0.15; y_6 = y_5 + 0.025f(t_5, y_5) = 0.69664 + 0.025(0.69664 - 0.125^2 + 1) = 0.73867$
- vii. $t_7 = 0.175; y_7 = y_6 + 0.025f(t_6, y_6) = 0.73867 + 0.025(0.73867 - 0.15^2 + 1) = 0.78157$
- viii. $t_8 = 0.2; y_8 = y_7 + 0.025f(t_7, y_7) = 0.78157 + 0.025(0.78157 - 0.175^2 + 1) = 0.82534$

(d) $h = 0.05, y_0 = 0.5, y_{k+1} = y_k + hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$

- i. $t_1 = 0.05; 0.025f(t_0, y_0) = 0.025(0.5 + 0^2 + 1) = 0.0375$
 $y_1 = y_0 + 0.05f(t_0 + 0.025, y_0 + 0.025f(t_0, y_0))$
 $= 0.5 + 0.05(0.5 + 0.0375 - 0.025^2 + 1) = 0.57684$
- ii. $t_2 = 0.1; 0.025f(t_1, y_1) = 0.025(0.57684 + 0.1^2 + 1) = 0.039671$
 $y_2 = y_1 + 0.05f(t_1 + 0.025, y_1 + 0.025f(t_1, y_1))$
 $= 0.57684 + 0.05(0.57684 + 0.039671 - 0.05^2 + 1) = 0.65754$
- iii. $t_3 = 0.15; 0.025f(t_2, y_2) = 0.025(0.65754 + 0.1^2 + 1) = 0.041689$
 $y_3 = y_2 + 0.05f(t_2 + 0.025, y_2 + 0.025f(t_2, y_2))$
 $= 0.65754 + 0.05(0.65754 + 0.041689 - 0.1^2 + 1) = 0.74200$
- iv. $t_4 = 0.2; 0.025f(t_3, y_3) = 0.025(0.74200 + 0.15^2 + 1) = 0.044113$
 $y_4 = y_3 + 0.05f(t_3 + 0.025, y_3 + 0.025f(t_3, y_3))$
 $= 0.74200 + 0.05(0.74200 + 0.044113 - 0.15^2 + 1) = 0.83018$

(e) $h = 0.1, y_0 = 0.5, q_k^1 = hf(t_k, y_k), q_k^2 = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}), q_k^3 = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^2}{2}), q_k^4 = hf(t_k + h, y_k + q_k^3),$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(q_k^1 + 2q_k^2 + 2q_k^3 + q_k^4)$$

i. $t_1 = 0.1$

- A. $q_0^1 = 0.1f(t_0, y_0) = 0.1(0.5 + 0^2 + 1) = 0.15$
- B. $q_0^2 = 0.1f(t_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.15}{2}) = 0.1(0.5 + 0.075 + 0.05^2 + 1) = 0.15775$
- C. $q_0^3 = 0.1f(t_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.15775}{2}) = 0.1(0.5 + 0.078875 + 0.05^2 + 1) = 0.15814$
- D. $q_0^4 = 0.1f(t_0 + 0.1, y_0 + 0.15814) = 0.1(0.5 + 0.15814 + 0.1^2 + 1) = 0.16681$
- E. $y_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(0.15 + 2 \times 0.15775 + 2 \times 0.15814 + 0.16681) = 0.6581$

ii. $t_2 = 0.2$

- A. $q_1^1 = 0.1f(t_1, y_1) = 0.1(0.6581 + 0.1^2 + 1) = 0.16681$
- B. $q_1^2 = 0.1f(t_1 + \frac{0.1}{2}, y_1 + \frac{0.16681}{2}) = 0.1(0.6581 + 0.083405 + 0.15^2 + 1) = 0.1764$
- C. $q_1^3 = 0.1f(t_1 + \frac{0.1}{2}, y_1 + \frac{0.1764}{2}) = 0.1(0.6581 + 0.0882 + 0.15^2 + 1) = 0.17688$

$$D. q_1^4 = 0.1f(t_1 + 0.1, y_1 + 0.17688) = 0.1(0.6581 + 0.17688 + 0.2^2 + 1) = 0.1875$$

$$E. y_2 = 0.6581 + \frac{1}{6}(0.16681 + 2 \times 0.1764 + 2 \times 0.17688 + 0.1875) = 0.83491$$

- (f) Los únicos puntos que se pueden comparar son en $t = 0, t = 0.1, t = 0.2$, ya que son los únicos puntos que en los tres métodos fueron calculados.

t	Exacto	Euler	Error Euler	Punto Medio	Error PM	Runge-Kutta Orden 4	Error RK4
0	0.5	0.5	0	0.5	0	0.5	0
0.1	0.65741	0.6555	0.00191	0.65754	0.00013	0.6581	0.00069
0.2	0.8293	0.82534	0.00396	0.83018	0.00088	0.83491	0.00561

En teoría, el método de Euler es el peor de los tres, luego viene el de Punto Medio y luego el de Runge-Kutta O4, pero se ve en los datos calculados que Runge-Kutta O4 no es más exacto que el método de Punto Medio. Esto sucede ya que al usar una aritmética finita de 5 cifras significativas con redondeo, para calcular los puntos en Runge-Kutta O4 se hicieron muchos calculos, por lo que la cantidad de errores es mayor, lo que produce finalmente un error bastante mayor que el esperado.

2. Viento

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{50}{2 \times 1.5 \times 10^8 \times 0.06}(30 - z)^2 = \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - z)^2$$

$$\begin{aligned} x_1(z) &= y(z) \\ x_2(z) &= y'(z) \end{aligned} \implies \begin{aligned} \frac{\partial x_1(z)}{\partial z} &= x_2(z) \\ \frac{\partial x_2(z)}{\partial z} &= \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - z)^2 \end{aligned}$$

- (a) $k = 0$

$$x_{1,0} = y(0) = 0$$

$$x_{2,0} = y'(0) = 0$$

$$q_{1,0}^1 = hf_1(z_0, x_{1,0}, x_{2,0}) = 10 \times 0 = 0$$

$$q_{2,0}^1 = hf_2(z_0, x_{1,0}, x_{2,0}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - 0)^2 = 0.025$$

$$q_{1,0}^2 = hf_1(z_0 + \frac{h}{2}, x_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, x_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 10 \times (0 + \frac{0.025}{2}) = 0.125$$

$$q_{2,0}^2 = hf_2(z_0 + \frac{h}{2}, x_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, x_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - \frac{10}{2})^2 = \frac{5}{288}$$

$$\implies x_{1,1} = x_{1,0} + q_{1,0}^2 = 0 + 0.125 = 0.125$$

$$x_{2,1} = x_{2,0} + q_{2,0}^2 = 0 + 0.025 = 0.025$$

- (b) $k = 1$

$$x_{1,1} = 0.125$$

$$x_{2,1} = 0.025$$

$$q_{1,1}^1 = hf_1(z_1, x_{1,1}, x_{2,1}) = 10 \times 0.025 = 0.25$$

$$q_{2,1}^1 = hf_2(z_1, x_{1,1}, x_{2,1}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - 10)^2 = \frac{1}{90}$$

$$q_{1,1}^2 = hf_1(z_1 + \frac{h}{2}, x_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, x_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2}) = 10 \times (\frac{1}{40} + \frac{1}{180}) = \frac{11}{36}$$

$$q_{2,1}^2 = hf_2(z_1 + \frac{h}{2}, x_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, x_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - 10 - \frac{10}{2})^2 = \frac{1}{160}$$

$$\implies x_{1,2} = x_{1,1} + q_{1,1}^2 = \frac{1}{8} + \frac{11}{36} = \frac{31}{72}$$

$$x_{2,2} = x_{2,1} + q_{2,1}^2 = \frac{1}{40} + \frac{1}{160} = \frac{1}{32}$$

- (c) $k = 2$

$$x_{1,2} = \frac{31}{72}$$

$$x_{2,2} = \frac{1}{32}$$

$$q_{1,2}^1 = hf_1(z_2, x_{1,2}, x_{2,2}) = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

$$q_{2,2}^1 = hf_2(z_2, x_{1,2}, x_{2,2}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - 20)^2 = \frac{1}{360}$$

$$q_{1,2}^2 = hf_1(z_2 + \frac{h}{2}, x_{1,2} + \frac{q_{1,2}^1}{2}, x_{2,2} + \frac{q_{2,2}^1}{2}) = 10 \times (\frac{1}{32} + \frac{1}{720}) = \frac{47}{144}$$

$$q_{2,2}^2 = hf_2(z_2 + \frac{h}{2}, x_{1,2} + \frac{q_{1,2}^1}{2}, x_{2,2} + \frac{q_{2,2}^1}{2}) = 10 \times \frac{5}{18} \times 10^{-5}(30 - 20 - \frac{10}{5})^2 = \frac{2}{1125}$$

$$\implies x_{1,3} = x_{1,2} + q_{1,2}^2 = \frac{31}{72} + \frac{47}{144} = \frac{109}{144}$$

$$x_{2,3} = x_{2,2} + q_{2,2}^2 = \frac{1}{32} + \frac{2}{1125} = \frac{1189}{36000}$$

(d) Volviendo a las variables originales:

$$\begin{aligned}x_1(z) &= y(z) \\x_2(z) &= y'(z) \\y(0) &= 0 & y'(0) &= 0 \\y(10) &= 0.125 & y'(10) &= 0.025 \\y(20) &= \frac{31}{72} = 0.430\,56 & y'(20) &= \frac{1}{32} = 0.031\,25 \\y(30) &= \frac{109}{144} = 0.756\,94 & y'(30) &= \frac{1189}{36\,000} = 0.033\,028\end{aligned}$$

3. Aplicaciones

(a) Punto Fijo

$$\begin{aligned}\text{i. } \phi(p_1, p_2) &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \int_0^x y'(x) dx \\ 2 + \int_0^x (y(x) - x) dx \end{bmatrix}\end{aligned}$$

derivando la 2da ecuacion:

$$y''(x) - y(x) + x = 0$$

con $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Que es la edo a resolver.

$$\begin{aligned}\text{ii. } \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \int_0^x 2 dx \\ 2 + \int_0^x (1 - x) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x \\ 2 + x - \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \int_0^x (2 + x - \frac{x^2}{2}) dx \\ 2 + \int_0^x (1 + 2x - x) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \\ 2 + x + \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_1^3 \\ p_2^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \int_0^x (2 + x + \frac{x^2}{2}) dx \\ 2 + \int_0^x (1 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Solución aproximada de $y(x) \approx PF(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

(b) Minimos Cuadrados

i. El problema $\min \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$ se reduce en encontrar un cero a su gradiente, es decir:

$F(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$, el método de Newton – Kantorovich para encontrar un cero a $\nabla F(x)$ queda de la forma:

$$x_{k+1} = x_k - [H_F(x_k)]^{-1} \nabla F(x_k)$$

ahora, $\nabla F(x) = Qx + r$

$$H_F(x) = Q$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - Q^{-1} [Qx_k + r] = x_k - x_k - Q^{-1}r = -Q^{-1}r$$

entonces, dado cualquier $x_0 \Rightarrow x_1 = -Q^{-1}r$. Evaluando $\nabla F(x)$ en x_1

$$\Rightarrow \nabla F(x_1) = Q(-Q^{-1}r) + r = -r + r = 0$$

y como $H_F(x_1) = Q$ definida positiva

\Rightarrow se encontró el mínimo de $F(x)$ en solo una iteración.

ii. $p(0) = a \Rightarrow a = 1$

$$p'(0) = b \Rightarrow b = 2$$

$$p(x) = 1 + 2x + cx^2 + dx^3$$

$$\text{iii. } \min E = \int_0^1 (2c + 6dx - 1 - 2x - cx^2 - dx^3 + x)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \frac{86}{15}c + \frac{25}{3}d - \frac{29}{6}$$

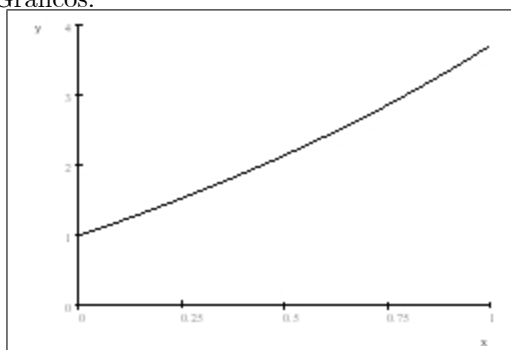
$$\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{25}{3}c + \frac{682}{35}d - \frac{91}{10}$$

$$\begin{matrix} c &= & 5.733 & 8.333 &^{-1} & -4.833 &= & 0.4342 \\ d &= & 8.333 & 19.49 & & -9.1 &= & 0.2813 \end{matrix}$$

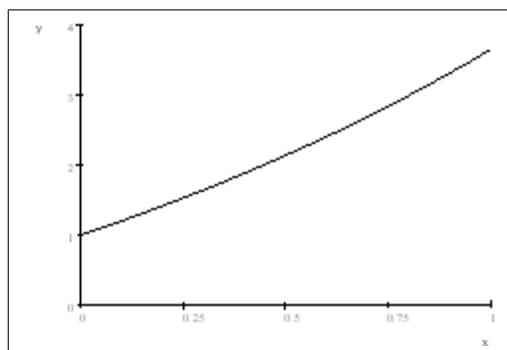
$$PM(x) = 1 + 2x + 0.4342x^2 + 0.2813x^3$$

(c) Comparacion de Soluciones aproximadas

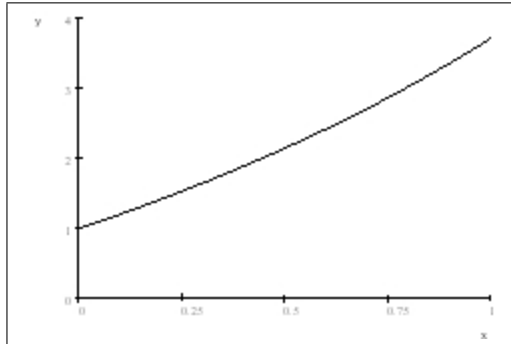
- i. $PF(x)$ es igual a $T(x)$, ya que el metodo de punto fijo va convergiendo al polinomio de Taylor.
- ii. $PM(x)$ se parece a $M(x)$, ya que en ambos se minimizan un error, solo que la función de error es diferente, pero intentan de encontrar la misma solucion.
- iii. Graficos:



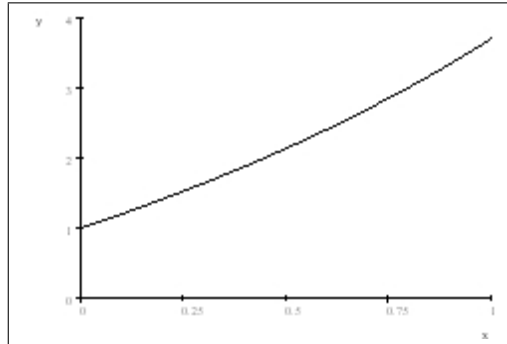
$$Y(x) = e^x + x$$



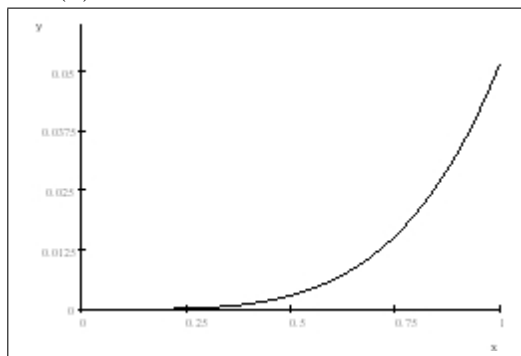
$$T(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$



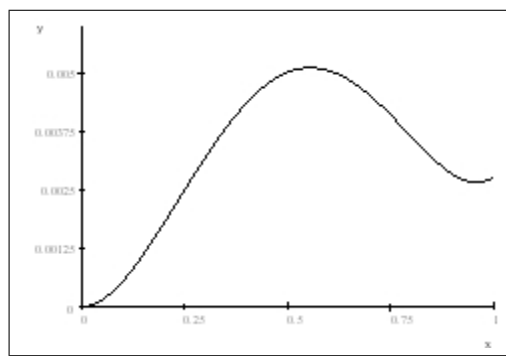
$$M(x) = 1 + 2x + 0.4691x^2 + 0.2468x^3$$



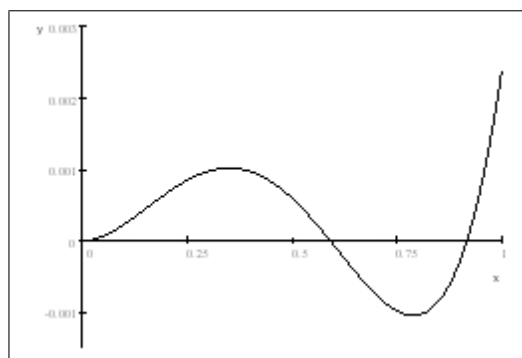
$$PM(x) = 1 + 2x + 0.4342x^2 + 0.2813x^3$$



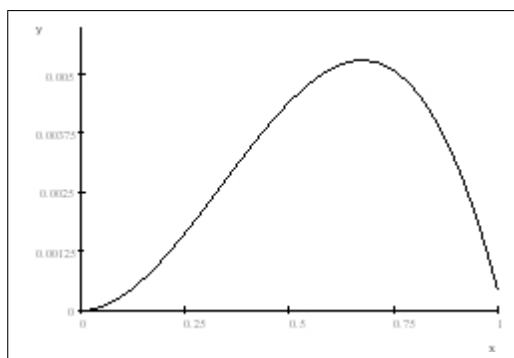
$$ET(x) = Y(x) - T(x)$$



$$EPM(x) = Y(x) - PM(x)$$



$EM(x) = Y(x) - M(x)$



$EPMM(x) = M(x) - PM(x)$

4. La ecuación de Duffing

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x^3(t) - x(t) = \cos(\pi t) \text{ para } t \in [0, 1].$$

- (a) Plantee el sistema de 2 edo no lineales

Haciendo los cambio de variables

$$y_1(t) = x(t)$$

$$y_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

La ecuación queda de la forma:

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) + y_1^3(t) - y_1(t) = \cos(\pi t)$$

Transformando la ecuación al sistema de 2 edo's:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1(t)}{dt} \\ \frac{dy_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \cos(\pi t) + y_1(t) - y_1^3(t) \end{bmatrix}$$

- (b) Resuelva el sistema aplicando el Método RK de orden 2, para las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = 1, x'(0) = x'_0 = 0. \text{ Considere } h = 0.5.$$

Iteraciones

- i. $k = 0$

$$t_0 = 0$$

$$y_{1,0} = x(0) = 1$$

$$y_{2,0} = x'(0) = 0$$

$$q_{1,0}^1 = hf_1(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 0.5 \times 0 = 0$$

$$q_{2,0}^1 = hf_2(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 0.5 \times (\cos(\pi 0) + 1 - 0 - 1) = 0.5$$

$$q_{1,0}^2 = hf_1(t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, y_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 0.5 \times \frac{0.5}{2} = 0.125$$

$$q_{2,0}^2 = hf_2(t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, y_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 0.5 \times (\cos(\pi \frac{0.5}{2}) + 1 - \frac{0.5}{2} - 1) = 0.22856$$

$$\Rightarrow y_{1,1} = y_{1,0} + q_{1,0}^2 = 1 + 0.125 = 1.125$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + q_{2,0}^2 = 0 + 0.22856 = 0.22856$$

- ii. $k = 1$

$$t_1 = 0.5$$

$$y_{1,1} = 1.125$$

$$y_{2,1} = 0.22856$$

$$q_{1,1}^1 = hf_1(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 0.5 \times 0.22856 = 0.11428$$

$$q_{2,1}^1 = hf_2(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 0.5 \times (\cos(\pi 0.5) + 1.125 - 0.22856 - 1.125^3)$$

$$= 0.5 \times (0.89644 - 1.4238) = -0.26368$$

$$q_{1,1}^2 = hf_1(t_1 + \frac{h}{2}, y_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, y_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2}) = 0.5 \times (0.22856 - \frac{0.26368}{2})$$

$$= 0.5 \times 0.09672 = 0.04836$$

$$q_{2,1}^2 = hf_2(t_1 + \frac{h}{2}, y_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, y_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2})$$

$$= 0.5 \times (\cos(\pi 0.75) + (1.125 + \frac{0.11428}{2}) - (0.22856 - \frac{0.26368}{2}) - (1.125 + \frac{0.11428}{2})^3)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.5 \times (-0.70711 + 1.1821 - 0.09672 - 1.1821^3) = 0.5 \times (0.37827 - 1.6518) \\
 &= 0.5 \times (-1.2735) = -0.63675 \\
 \implies &y_{1,2} = y_{1,1} + q_{1,1}^2 = 1.125 + 0.04836 = 1.1734 \\
 &y_{2,2} = y_{2,1} + q_{2,1}^2 = 0.22856 - 0.63675 = -0.40819
 \end{aligned}$$

5. Bernoulli

(a) $\frac{dy}{dx} + x^2 y = \frac{x^2}{y^2} / * (1+2)y^2 \implies 3\frac{dy}{dx}y^2 + 3x^2y^3 = 3x^2$

$$u(x) = y(x)^3 \implies \frac{du}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx}y^2 + 3x^2y^3 = 3x^2 \implies \frac{du}{dx} + 3x^2u = 3x^2$$

Homogenea: $\frac{du}{dx} + 3x^2u = 0 \implies \frac{du}{u} = -3x^2dx / \int \implies \ln u = -x^3 + K \implies u = ce^{-x^3}$

Particular: $\frac{du}{dx} + 3x^2u = 3x^2 / * e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3} \implies \frac{du}{dx}e^{x^3} + 3x^2ue^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$

$$\implies \frac{d[ue^{x^3}]}{dx} = 3x^2e^{x^3} \implies u = e^{-x^3} \int 3x^2e^{x^3} dx = e^{-x^3} e^{x^3} = 1$$

$$u(x) = ce^{-x^3} + 1 \implies y(x) = [ce^{-x^3} + 1]^{\frac{1}{3}}$$

$$y(0) = 3 = [c + 1]^{\frac{1}{3}} \implies c = 3^3 - 1 = 26$$

$$y(x) = [26e^{-x^3} + 1]^{\frac{1}{3}}$$

(b) Runge-Kutta de Orden 3 para $h = 0.2$; $y_0 = 3$; $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - x^2y$

i. $k = 0$; $x_1 = 0.2$

$$q_0^1 = 0.2f(x_0, y_0) = 0.2 \left[\frac{0^2}{3^2} - 0^2 \cdot 3 \right] = 0$$

$$q_0^2 = 0.2f(x_0 + 0.1, y_0 + \frac{q_0^1}{2}) = 0.2 \left[\frac{0.1^2}{3^2} - 0.1^2 \times 3 \right] = -0.2 \times 2.889 \times 10^{-2} = -0.005778$$

$$y_0 - q_0^1 + 2q_0^2 = 3 - 0 - 2 \times 0.005778 = 2.988$$

$$q_0^3 = 0.2f(x_0 + 0.2, y_0 - q_0^1 + 2q_0^2) = 0.2 \left[\frac{0.2^2}{(2.988)^2} - 0.2^2 \times 2.988 \right] = -0.2 \times 0.1150 = -0.023$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(q_0^1 + 4q_0^2 + q_0^3) = 3 + \frac{1}{6}(0 + 4 \times (-0.005778) - 0.023) = 2.992$$

ii. $k = 1$; $x_2 = 0.4$

$$q_1^1 = 0.2f(x_1, y_1) = 0.2 \left[\frac{0.2^2}{2.992^2} - 0.2^2 \times 2.992 \right] = -0.2 \times 0.1152 = -0.02304$$

$$y_1 + \frac{q_1^1}{2} = 2.992 - \frac{0.02304}{2} = 2.98$$

$$q_1^2 = 0.2f(x_1 + 0.1, y_1 + \frac{q_1^1}{2}) = 0.2 \left[\frac{0.3^2}{2.98^2} - 0.3^2 \times 2.98 \right] = -0.2 \times 0.2581 = -0.0516$$

$$y_1 - q_1^1 + 2q_1^2 = 2.992 + 0.02304 - 2 \times 0.05162 = 2.912$$

$$q_1^3 = 0.2f(x_1 + 0.2, y_1 - q_1^1 + 2q_1^2) = 0.2 \left[\frac{0.4^2}{2.912^2} - 0.4^2 \times 2.912 \right] = -0.2 \times 0.4471 = -0.08942$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(q_1^1 + 4q_1^2 + q_1^3) = 2.992 + \frac{1}{6}(-0.02304 - 4 \times 0.05162 - 0.08942) = 2.939$$

iii. $k = 2$; $x_3 = 0.6$

$$q_2^1 = 0.2f(x_2, y_2) = 0.2 \left[\frac{0.4^2}{2.939^2} - 0.4^2 \times 2.939 \right] = -0.2 \times 0.4517 = -0.09034$$

$$y_2 + \frac{q_2^1}{2} = 2.939 - \frac{0.09034}{2} = 2.894$$

$$q_2^2 = 0.2f(x_2 + 0.1, y_2 + \frac{q_2^1}{2}) = 0.2 \left[\frac{0.5^2}{2.894^2} - 0.5^2 \times 2.894 \right] = -0.2 \times 0.6937 = -0.1387$$

$$y_2 - q_2^1 + 2q_2^2 = 2.939 + 0.09034 - 2 \times 0.1387 = 2.752$$

$$q_2^3 = 0.2f(x_2 + 0.2, y_2 - q_2^1 + 2q_2^2) = 0.2 \left[\frac{0.6^2}{2.752^2} - 0.6^2 \times 2.752 \right] = -0.2 \times 0.9432 = -0.1886$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(q_2^1 + 4q_2^2 + q_2^3) = 2.939 + \frac{1}{6}(-0.09034 - 4 \times 0.1387 - 0.1886) = 2.8$$

iv. $k = 3; x_4 = 0.8$

$$q_3^1 = 0.2f(x_3, y_3) = 0.2 \left[\frac{0.6^2}{2.8^2} - 0.6^2 \times 2.8 \right] = -0.2 \times 0.9621 = -0.1924$$

$$y_3 + \frac{q_3^1}{2} = 2.8 - \frac{0.1924}{2} = 2.704$$

$$q_3^2 = 0.2f(x_3 + 0.1, y_3 + \frac{q_3^1}{2}) = 0.2 \left[\frac{0.7^2}{2.704^2} - 0.7^2 \times 2.704 \right] = -0.2 \times 1.258 = -0.2516$$

$$y_3 - q_3^1 + 2q_3^2 = 2.8 + 0.1924 - 2 \times 0.2516 = 2.489$$

$$q_3^3 = 0.2f(x_3 + 0.2, y_3 - q_3^1 + 2q_3^2) = 0.2 \left[\frac{0.8^2}{2.489^2} - 0.8^2 \times 2.489 \right] = -0.2 \times 1.49 = -0.298$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(q_3^1 + 4q_3^2 + q_3^3) = 2.8 + \frac{1}{6}(-0.1924 - 4 \times 0.2516 - 0.298) = 2.551$$

v. $k = 4; x_5 = 1$

$$q_4^1 = 0.2f(x_4, y_4) = 0.2 \left[\frac{0.8^2}{2.551^2} - 0.8^2 \times 2.551 \right] = -0.2 \times 1.534 = -0.3068$$

$$y_4 + \frac{q_4^1}{2} = 2.551 - \frac{0.3068}{2} = 2.398$$

$$q_4^2 = 0.2f(x_4 + 0.1, y_4 + \frac{q_4^1}{2}) = 0.2 \left[\frac{0.9^2}{2.398^2} - 0.9^2 \times 2.398 \right] = -0.2 \times 1.802 = -0.3604$$

$$y_4 - q_4^1 + 2q_4^2 = 2.551 + 0.3068 - 2 \times 0.3604 = 2.137$$

$$q_4^3 = 0.2f(x_4 + 0.2, y_4 - q_4^1 + 2q_4^2) = 0.2 \left[\frac{1^2}{2.137^2} - 1^2 \times 2.137 \right] = -0.2 \times 1.918 = -0.3836$$

$$y_5 = y_4 + \frac{1}{6}(q_4^1 + 4q_4^2 + q_4^3) = 2.551 + \frac{1}{6}(-0.3068 - 4 \times 0.3604 - 0.3836) = 2.196$$

(c) Precisión

$$y(x) = \left[26e^{-x^3} + 1 \right]^{\frac{1}{3}}$$

$y(0) = 3.0$	$y_0 = 3.0$	$E_0 = 3 - 3 = 0$
$y(0.2) = 2.992$	$y_1 = 2.992$	$E_1 = 2.992 - 2.992 = 0$
$y(0.4) = 2.939$	$y_2 = 2.939$	$E_2 = 2.939 - 2.939 = 0$
$y(0.6) = 2.8$	$y_3 = 2.8$	$E_3 = 2.8 - 2.8 = 0$
$y(0.8) = 2.55$	$y_4 = 2.551$	$E_4 = 2.551 - 2.55 = 0.001$
$y(1) = 2.194$	$y_5 = 2.196$	$E_5 = 2.196 - 2.194 = 0.002$

$$\max E_k = 0.002$$

\Rightarrow el método tiene 3 cifras significativas exactas de 4, y los errores son pequeños

6. Mínimos Cuadrados

(a) $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$$p(0) = a \Rightarrow a = 1$$

$$p'(0) = b \Rightarrow b = 1$$

$$p(x) = 1 + x + cx^2 + dx^3$$

(b) Concidera el error de aproximación como

$$E = \int_0^1 \left(\frac{d^2 p}{dx^2}(x) + p(x) - x \right)^2 dx$$

$$\min E = \int_0^1 (2c + 6dx + 1 + x + cx^2 + dx^3 - x)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \frac{166}{15}c + \frac{49}{3}d + \frac{14}{3} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{49}{3}c + \frac{1018}{35}d + \frac{13}{2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{166}{15} & \frac{49}{3} \\ \frac{49}{3} & \frac{1018}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} \\ -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{93135}{173578} \\ \frac{6755}{86789} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5366 \\ 7.783 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

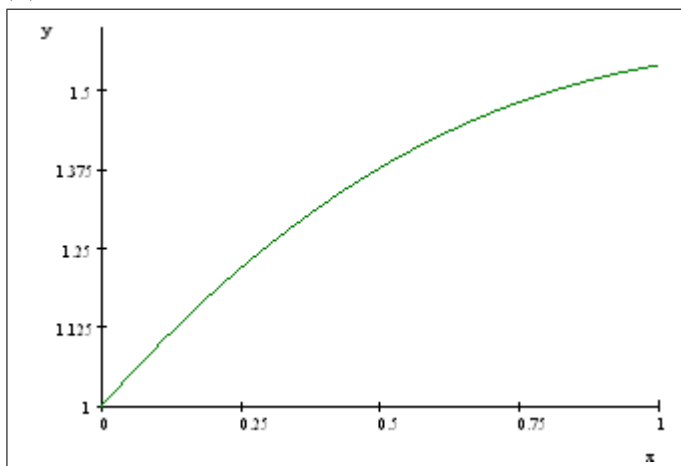
$$p(x) = 1 + x - 0.5366x^2 + 7.783 \times 10^{-2}x^3$$

(c) $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

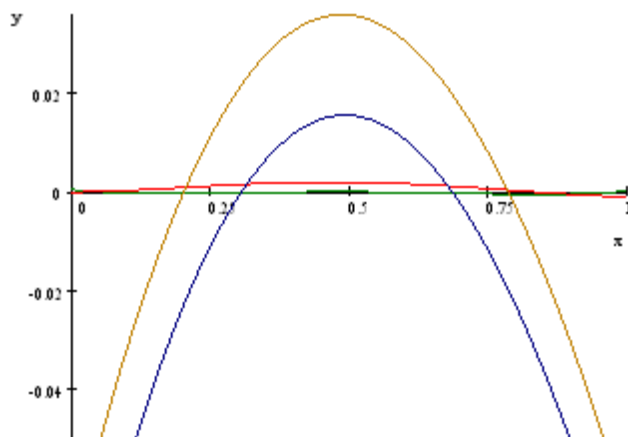
$$\begin{bmatrix} \int_0^1 dx & \int_0^1 x dx & \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx \\ \int_0^1 x dx & \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx & \int_0^1 x^4 dx \\ \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx & \int_0^1 x^4 dx & \int_0^1 x^5 dx \\ \int_0^1 x^3 dx & \int_0^1 x^4 dx & \int_0^1 x^5 dx & \int_0^1 x^6 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (\cos x + x) dx \\ \int_0^1 x(\cos x + x) dx \\ \int_0^1 x^2(\cos x + x) dx \\ \int_0^1 x^3(\cos x + x) dx \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \cos 1 + 356 \sin 1 - 720 \\ -9240 \cos 1 - 4620 \sin 1 + 8881 \\ 22860 \cos 1 + 12060 \sin 1 - 22500 \\ -15120 \cos 1 - 8260 \sin 1 + 15120 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9995 \\ 1.011 \\ -0.5492 \\ 7.880 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$q(x) = 0.9995 + 1.011x - 0.5492x^2 + 7.880 \times 10^{-2}x^3$$



$\cos x + x$



Verde: $(\cos(x) + x) - q(x)$

Rojo: $(\cos(x) + x) - p(x)$

Azul: $\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} + q(x) - x$

Cafe: $\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + p(x) - x$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} + q(x) - x \right)^2 dx \approx 1.451\,564 \times 10^{-3}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + p(x) - x \right)^2 dx \approx 9.822\,779 \times 10^{-4}$$

Como podemos ver, la aproximación de $\cos(x) + x$ a priori, $p(x)$, es muy similar a la aproximación a posteriori, $q(x)$, siendo esta última superior a la primera, ya que se tenía mayor información, pero la primera es mejor que la última vista desde el punto de vista de la EDO. Esto se debe ya que son distintas funciones de error, pero el resultado es muy similar.