Pauta Control 3 MA-33A-2 2007-1

Profesor Gonzalo Hernandez

Auxiliares Gonzalo Rios - Constanza Maturana

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Integración:

Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con la función de peso $w(x) = 1$.

Los tres primeros polinomios de Legendre son:

n	0	1	2
$Le_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

(a) Nos interesa encontrar una fórmula análoga a Simpson Compuesto usando Cuadratura de Gauss-Legendre. Para eso:

(b) Encuentre las raices x_1 y x_2 de $Le_2(x)$. Calcule los coeficientes c_1 y c_2 de tal forma que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

tenga el mayor grado de precisión posible. ¿Qué precisión tiene la fórmula?

(c) Haga el cambio de variable respectivo para poder integrar con la fórmula anterior en cualquier intervalo $[a, b]$, y explicíte la fórmula general

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx d_1 f(t_1) + d_2 f(t_2)$$

(d) Haciendo la misma analogía que con Simpson Compuesto, dado un intervalo $[a, b]$ y un entero n (no necesariamente par), encuentre la fórmula de Gauss-Legendre Compuesto, que se basa en aplicar la fórmula anterior a n subintervalos de $[a, b]$. Denote $h = \frac{b-a}{n}$.

i. Obs: con $n = 1$, se obtiene Gauss-Legendre Simple

(e) Calcule la integral $\int_0^1 x^x dx$ con Simpson Compuesto $n_s = 4$ y Gauss-Legendre Compuesto $n_l = 2$. Si el valor real es $I = 0.783\,430\,51$, compare ambas cuadraturas.

2) Modelo de propagación de una enfermedad en una isla

Considere una isla aislada con una problacion de n personas. Una porción de la población viaja al extranjero y regresa infectada con una enfermedad altamente contagiosa. Se desea predecir la numero de personas $y(t)$ que estarán infectadas en un instante de tiempo t. Para esto considere el siguiente modelo M:

$$\frac{dy}{dt} = ky(n - y) \tag{M}$$

donde k es una constante.

(a) Cuáles son las hipótesis que se han hecho para establecer el modelo M ? Les parecen razonables ?

(b) Grafique $\dfrac{dy}{dt}$ vs y. Grafique y vs t si el número de inicial de personas infectadas es $y_1 < \frac{n}{2}$ y $y_2 > \frac{n}{2}$. Discuta la solución cualitativa encontrada en cada caso.

(c) Determine la solución analítica del modelo M.

(d) Considere una isla con una población de $n = 5000$. En distintos instantes durante la epidemia se ha medido la siguiente cantidad de personas infectadas:

t [días]	2	6	10
$y(t)$	1887	4087	4853

i) Compare la solución analítica de M encontrada en (c) con los datos reales. El modelo representa bien los datos ?

ii) Compare la solución analítica de M encontrada en (c) con la solución numérica determinada mediante el método de Runge-Kutta de orden 2:

$$\begin{aligned} q_k^1 &= hf(t_k, y_k) \\ q_k^2 &= hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{q_k^1}{2}) \\ y_{k+1} &= y_k + q_k^2 \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Que puede decir de la precisión de la solución numérica ?

Solución:

1) Integración

(a) $\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3},\ x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) + c_2 f(\frac{1}{3}\sqrt{3})$

i. $f(x) = 1 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2$

ii. $f(x) = x \Rightarrow 0 = -\frac{c_1}{3}\sqrt{3} + \frac{c_2}{3}\sqrt{3}$
$\Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

iii. $f(x) = x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx$

iv. $f(x) = x^3 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx$

v. $f(x) = x^4 \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{3})^4 + (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^4 = \frac{2}{9} \neq \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$
La precisión de la fórmula es 3, ya que cualquier polinomio de grado 3 es combinación lineal de $\{1, x, x^2, x^3\}$, y como la integral es lineal, si se cumple para la base, se cumple para cualquier elemento generado por la base.

(b) $\int_a^b f(x)dx$, haciendo $t = \frac{x-a}{b-a} - \frac{x-b}{a-b} = \frac{2x-a-b}{b-a} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{t(b-a)+a+b}{2})dx = \frac{b-a}{2} f(\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}(b-a)+a+b}{2}) + \frac{b-a}{2} f(\frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3}(b-a)+a+b}{2})$

$\Rightarrow d_1 = d_1 = \frac{b-a}{2}$, y $t_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)a+(\sqrt{3}+1)b}{2\sqrt{3}},\ t_2 = \frac{(\sqrt{3}+1)a+(\sqrt{3}-1)b}{2\sqrt{3}}$

(c) $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{a+h*k}^{a+h*(k+1)} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a+h*(k+1)-(a+h*k)}{2}(f(\frac{(\sqrt{3}-1)(a+h*k)+(\sqrt{3}+1)(a+h*(k+1))}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{(\sqrt{3}+1)(a+h*k)+(\sqrt{3}-1)(a+h*(k+1))}{2\sqrt{3}}))$

$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(\frac{2\sqrt{3}(a+h*k)+(1+\sqrt{3})h}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{2\sqrt{3}(a+h*k)+(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}))$

(d) $\int_0^1 x^x dx$

Se usarán 8 cifras significativas con redondeo, pero para el control bastaban 5.

i. Simpson Compuesto $n_s = 4 \Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$
$\int_0^1 x^x dx \approx \frac{1}{4\times 3}[f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)] = \frac{1}{4\times 3}[1 + 4(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} + 2(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} + 4(\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}} + 1]$
$= \frac{1}{12}[1 + 4 \times 0.707\,106\,78 + 2 \times 0.707\,106\,78 + 4 \times 0.805\,927\,45 + 1]$
$= \frac{9.\,466\,350\,5}{12} = 0.788\,862\,54$
$\Rightarrow I_{simp} = 0.788\,862\,54$

ii. Gauss-Legendre Compuesto $n_l = 2 \;\Rightarrow\; h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$
$\int_0^1 x^x dx \approx \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2\times 2}(f(\frac{\sqrt{3}k + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3}k + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}}))$
$= \frac{1}{4}[f(\frac{\frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3} + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}}{2\sqrt{3}})]$
$= \frac{1}{4}[f(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{1+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}) + f(\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}})]$
$= \frac{1}{4}[f(0.394\,337\,57) + f(0.105\,662\,43) + f(0.894\,337\,57) + f(0.605\,662\,43)]$
$= \frac{1}{4}[0.692\,844\,27 + 0.788\,615\,08 + 0.904\,952\,84 + 0.738\,083\,13]$
$= \frac{3.\,124\,495\,3}{4} = 0.781\,123\,83$
$\Rightarrow I_{gauss} = 0.781\,123\,83$

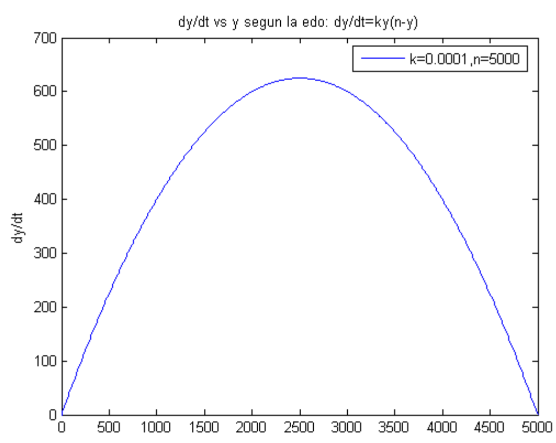
iii. Comparación
Veamos los errores relativos de ambos:
$E_{simp} = \frac{|0.788\,862\,54 - 0.783\,430\,51|}{0.783\,430\,51} = 6.\,933\,646\,227\,283\,131\,978\,1 \times 10^{-3}$
$E_{gauss} = \frac{|0.781\,123\,83 - 0.783\,430\,51|}{0.783\,430\,51} = 2.\,944\,332\,612\,218\,536\,140\,5 \times 10^{-3}$
$\frac{E_{simp}}{E_{gauss}} \approx 2.\,355$
El error de simpson es mas del doble que el de gauss, y como se hicieron la misma cantidad de evaluaciones de la función
$\Rightarrow$ Gauss-Legendre Compuesto es más exacto que Simpson Compuesto

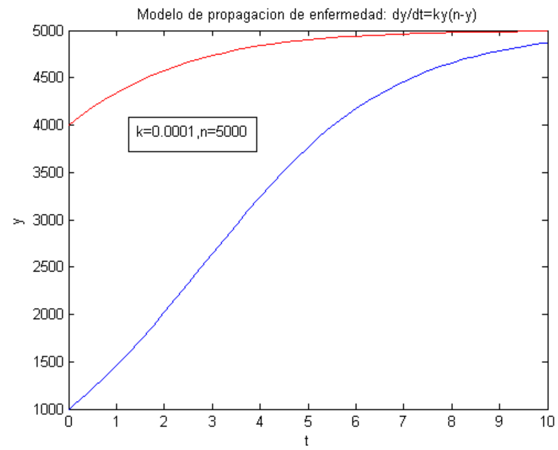
2) Modelo de propagación de una enfermedad en una isla

(a) En el modelo planteado la variación de enfermos en la isla es proporcional a la cantidad de enfermos y y la cantidad de personas no enfermas $n - y$ por una constante de proporcionalidad k. La hipótesis hecha es que los enfermos contagian a los no enfermos.

Solo se podria estimar k conociendo algunos datos.

(b) Los gráficos son:





(c) Debemos resolver: $y' = ky(n-y) = kyn - ky^2 \Rightarrow \dfrac{dy(t)}{dx} - kny(t) = -ky(t)^2$

Es decir, nos enfrentamos a una ecuación tipo Benoulli:

La ecuación diferencial de Bernoulli de orden n (entero con $n \neq 1$) se define según:

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)y(x)^n \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x=0) = y_0 \tag{B}$$

Esta edo es no lineal pero integrable. Multiplicando (B) por $(1-n)y^{-n}$ se tiene:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^{1-n}) + (1-n)p(x)y(x)^{1-n} = q(x)(1-n)$$

Si se define $u(x) = y(x)^{1-n}$ se obtiene la edo de primer orden lineal en la variable $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u(x) = q(x)(1-n)$$

Entonces, en nuestro caso: $n = 2, p(t) = -kn, q(t) = -k$

Multiplicando la ecuación del modelo (M) por $-y^{-2}$ se obtiene: $-y^2y' + kny^{-1} = k$

$\Rightarrow (y^{-1})' + kn(y^{-1}) = k$ sea $u = y^{-1}$

$\Rightarrow u' + knu = k$ obtenemos una ecuación lineal para u, la cual resolveremos con el factor integrante, obteniendo:

$u(t) = e^{-\int kndt}(c + \int ke^{knt}dt) = ce^{-knt} + \frac{1}{n}$

Por lo tanto la solución de nuestra ecuación es:

$$y(t) = \frac{1}{ce^{-knt} + \frac{1}{n}}$$

(d) Primero estimaremos la constante de proporcionalidad k con los valores de la tabla y la regla de los 3 puntos para aproximar la derivada:

La regla nos dice: $\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

Entonces, en nuestra ecuación:

$\Rightarrow \dfrac{dy(6)}{dx} = kny(6) - ky(6)^2 \approx \frac{y(10)-y(2)}{2 \cdot 4} = \frac{4853-1887}{8} = 370.75$

$\Rightarrow k = \frac{370.75}{4087 \cdot (5000-4087)} = 0.00009936$

Ahora encontremos la constante de integración c con el valor de y en $t = 2$:

$\Rightarrow y(2) = 1887 = \frac{1}{ce^{-0.00009936 \times 5000 \times 2} + \frac{1}{5000}}$

$\Rightarrow c = (1 - \frac{1887}{5000}) \times \frac{1}{e^{-0.4968 \times 2} \times 1887} = 8.911\,5 \times 10^{-4}$

i. Calculemos ahora los valores de la solución analítica en los puntos $t = 2$, $t = 6$ y $t = 10:$

$$\begin{array}{cc} t & y \\ 2 & \frac{1}{8.911\,5\times10^{-4}\times e^{-0.4968\times2}+\frac{1}{5000}} = 1887.0 \\ 6 & \frac{1}{8.911\,5\times10^{-4}\times e^{-0.4968\times6}+\frac{1}{5000}} = 4077.\,8 \\ 10 & \frac{1}{8.911\,5\times10^{-4}\times e^{-0.4968\times10}+\frac{1}{5000}} = 4849.\,7 \end{array}$$

Notamos que los valores calculados con la solución analítica son bastantes próximos a los valores reales, por lo tanto el modelo representa bien los datos.

ii. Encontremos la solución numérica determinada mediante el método de Runge-Kutta de orden 2. Para ello necesitamos un valor inicial, este lo calcularemos evaluando en $t = 0$ en la solución analítica:

$y(0) = \frac{1}{8.911\,5\times10^{-4}\times e^{-0.4968\times0}+\frac{1}{5000}} = 916.\,46$

$q_0^1 = hf(0, 916.\,46) = 2 \times k \times 916.\,46 \times (5000 - 916.\,46) = 2 \times 0.00009936 \times 916.\,46 \times (5000 - 916.\,46) = 743.\,69$

$q_0^2 = hf(0 + \frac{h}{2}, 916.\,46 + \frac{q_0^1}{2}) = hf(1, 1288.\,3) = 2 \times k \times 1288.\,3 \times (5000 - 1288.\,3) = 2 \times 0.00009936 \times 1288.\,3 \times (5000 - 1288.\,3) = 950.\,24$

$y_1 = y_0 + q_0^2 = 916.\,46 + 950.\,24 = 1866.\,7$

$q_1^1 = hf(2, 1866.\,7) = 4 \times k \times 1866.\,7 \times (5000 - 1866.\,7) = 4 \times 0.00009936 \times 1866.\,7 \times (5000 - 1866.\,7) = 2324.\,6$

$q_1^2 = hf(2 + \frac{h}{2}, 1866.\,7 + \frac{q_1^1}{2}) = hf(4, 3486.\,9) = 4 \times k \times 3486.\,9 \times (5000 - 3486.\,9) = 4 \times 0.00009936 \times 3486.\,9 \times (5000 - 3486.\,9) = 2096.\,9$

$y_2 = y_1 + q_1^2 = 1866.\,7 + 2096.\,9 = 3963.\,6$

$q_2^1 = hf(6, 3963.\,6) = 4 \times k \times 3963.\,6 \times (5000 - 3963.\,6) = 4 \times 0.00009936 \times 3963.\,6 \times (5000 - 3963.\,6) = 1632.\,6$

$q_2^2 = hf(6 + \frac{h}{2}, 3963.\,6 + \frac{q_2^1}{2}) = hf(8, 4779.\,9) = 4 \times k \times 4779.\,9 \times (5000 - 4779.\,9) = 4 \times 0.00009936 \times 4779.\,9 \times (5000 - 4779.\,9) = 418.\,13$

$y_3 = y_2 + q_2^2 = 3963.\,6 + 418.\,13 = 4381.\,7$

t	*valor* real	*valor* $R - K$	*error*
2	1887	1866.7	20.3
6	4087	3963.6	123.4
10	4853	4381.7	471.3