Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2007
Cálculo Numérico
MA33A-02

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 19 de Abril

Control 1

Importante: En el control use aritmética finita de 4 cifras significativas con redondeo

1) **(50%) Codificación e Interpolación**

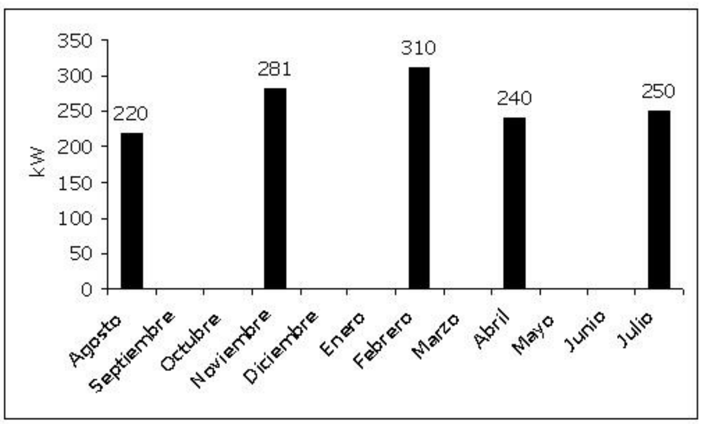
(a) Codificación

Sea $S1$ el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 5 bits de mantisa y 9 bits de exponente. Sea $S2$ el sistema de codificación de punto flotante **tipo inicial** con 6 bits de mantisa y 8 bits de exponente. Compare ambos sistemas considerando:

i) Número de bits de los sistemas
ii) Números más grandes representables por los sistemas
iii) Números más cercanos al cero representables por los sistemas
iv) Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas
v) Representaciones rebundantes de los sistemas (dos representaciones para un mismo número)

(b) Interpolacion

El gasto de luz de la Sra. Raquel durante el año 2005 y 2006 está dado en el siguiente gráfico:



Ella lleva con mucho orden sus gastos anuales, pero lamentablemente se le manchó la información del año 2005 y 2006, borrándose la información de los meses de septiembre, octubre, diciembre, enero, marzo, mayo, junio.

La Sra. Raquel nos pidió que la ayudáramos a encontrar los valores borrados. Para ello:

i) Plantee el SEL para calcular la Spline Cúbica que interpola los puntos en el gráfico. Resuélvalo mediante el método de Crout. Cual spline conviene utilizar en este caso ?

ii) Determine la Spline Cúbica que interpola los puntos que se conocen.
$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$ para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ donde
$a_k = y_k \qquad b_k = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \dfrac{h_k\,(2c_k + c_{k+1})}{3} \qquad d_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$

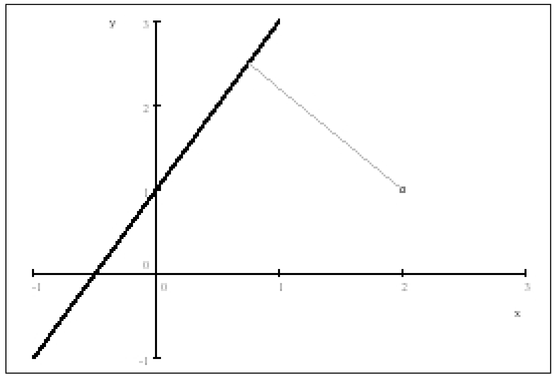
iii) Encuentre el polinomio de interpolación para los puntos del gráfico. Puede utilizar cualquiera de los 3 métodos que conoce (Vandermonde, Lagrange o Newton), pero explique su selección (considere que tiene que hacer 7 evaluaciones del polinomio encontrado).

iv) Compare los polinomios interpolantes calculados en las partes anteriores sumando el gasto de los 12 meses de la Sra. Raquel. El gasto real anual es de 270kW, encuentre el error absoluto y relativo de ambas interpolaciones. Comente.

2) **(50%) Mínimos Cuadrados**

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

i) Dado un punto en $\mathbb{R}^2$ (x_0, y_0) y una recta $y = a + bx$, calcule el punto $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ contenido en la recta que minimiza la distancia entre el punto y la recta. Demuestre que el cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y la recta $y = a + bx$ es $h^2_{\text{min}} = \dfrac{(a - y_0 + bx_0)^2}{b^2 + 1}$.



ii) Dados los puntos (x_i, y_i), $i = 1...n$, plantee 2 ecuaciones que determinen la recta $y = a + bx$ que minimiza la suma de los cuadrados de la minima distancia de los puntos (x_i, y_i) a la recta $y = a + bx$.

Denote

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = S_x^2 \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = S_y^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = S_{xy}$$

Observe que se cumple: $S_x^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \bar{x}^2$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

Dado el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ y un punto (x_0, y_0), determine:

i) La ecuación a minimizar para encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$ que minimiza la distancia entre el punto (x_0, y_0) y el polinomio. Diga como encontrar el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.

ii) La recta tangente al polinomio que pasa por el punto $(\hat{x}, p(\hat{x}))$.

iii) El cuadrado de la mínima distancia desde el punto (x_0, y_0) y el polinomio.

iv) Usando lo anterior, dados los puntos (x_i, y_i), $i = 1...n$, explique detalladamente como encontrar el polinomio de grado m que minimiza la suma de las mínimas distancias al cuadrado entre los puntos (x_i, y_i) y el polinomio. ¿Siempre existe? ¿Que pasa cuando $n \leq m + 1$? ¿Que pasa si $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$?

(c) Mínimos Cuadrados Standard y Ortogonales

Utilizando los puntos: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.

i) Calcular la recta $L1$ de aproximación usando el método anterior (Mínimos Cuadrados Ortogonales)

ii) Calcular la recta $L2$ de aproximación por Mínimos Cuadrádos Standard.

iii) Grafique y compare $L1$ y $L2$.

Respuestas

1) **Codificación e Interpolación**

(a) Codificación

i. Número de bits de los sistemas

Para S_1 : 5 bits de mantisa
9 bits de exponente
1 bit de signo del exponente
1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $5+9+2=16$ bits

Para S_2 : 6 bits de mantisa
8 bits de exponente
1 bit de signo del exponente
1 bit de signo de mantisa

Entonces ocupa: $6+8+2=16$ bits

$\Rightarrow S_1$ y S_2 ocupan la misma cantidad de bits para codificar

ii. Números más grandes representables por los sistemas

Para S_1 :

$x_{1\max} = (1-2^{-5}) \times 2^{2^9-1} = \frac{31}{32} \times 2^{511} = 6.\,494\,406\,966\,065\,945\,470\,106\,168\,358\,5 \times 10^{153}$

Para S_2 :

$x_{2\max} = (1-2^{-6}) \times 2^{2^8-1} = \frac{63}{64} \times 2^{255} = 5.\,699\,141\,892\,149\,156\,493\,503\,884\,418\,4 \times 10^{76}$

$\Rightarrow S_1$ tiene un mayor rango que S_2, ya que el mayor numero representable en S_1 es mayor que el de S_2

iii. Números más cercanos al cero representables por los sistemas

Para S_1 :

$x_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.\,661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$

Para S_2 :

$x_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.\,698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$

$\Rightarrow S_1$ puede representar números mucho más pequeños que S_2

iv. Menor diferencia entre un número y su consecutivo de los sistemas

Para S_1 :

$x = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8\ m_1m_2m_3m_4m_5$

$x_{con\sec utivo} = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8\ m_1m_2m_3m_4(m_5+1)$

$\Delta = |x_{con\sec utivo} - x| = 0\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8\ 00001$

$\Rightarrow \Delta = 2^{-5} \times 2^{\pm e}$, donde $e = \sum_{k=0}^{8} e_k 2^k$

Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$

$\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-5} \times 2^{-(2^9-1)} = 2^{-511-5} = 2^{-516} = 4.\,661\,462\,957\,000\,129\,214\,556\,853\,322\,2 \times 10^{-156}$

Para S_2 :

$x = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\ m_1m_2m_3m_4m_5m_6$

$x_{con\sec utivo} = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\ m_1m_2m_3m_4m_5(m_6+1)$

$\Delta = |x_{con\sec utivo} - x| = 0\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\ 000001$

$\Rightarrow \Delta = 2^{-6} \times 2^{\pm e}$, donde $e = \sum_{k=0}^{7} e_k 2^k$

Como estamos buscando el mínimo $\Delta \Rightarrow se = 1$ y $e_k = 1$

$\Rightarrow \Delta_{\min} = 2^{-6} \times 2^{-(2^8-1)} = 2^{-255-6} = 2^{-261} = 2.\,698\,802\,673\,467\,013\,945\,433\,234\,957\,1 \times 10^{-79}$

$\Rightarrow$La menor diferencia entre un número y su consecutivo de S_1 es menor que de S_2

v. Representaciones rebundantes de los sistemas (dos representaciones para un mismo número)

El único número que tiene rebundancia en cualquier sistema tipo inicial es el 0, ya que si $m=0$, entonces para cualquier valor de s, se y e el numero codificado es el cero.

Para S_1 :

$0_1 = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8\ 00000\ \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$hay $2^{11} = 2048$ representaciones rebundantes en el sistema

Para S_2 :

$0_2 = s\ se\ e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\ 000000\ \forall s, se, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$hay $2^{10} = 1024$ representaciones rebundantes en el sistema

$\Rightarrow S_1$ tiene una mayor cantidad de representaciones rebundantes que S_2

(b) Interpolacion

i. Sistema para la contruccion de la Spline:

A. Libre: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\3&12&3&0&0\\0&3&10&2&0\\0&0&2&10&3\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-32\\-134\\115\\0\end{bmatrix}$

Método de Crout:

Libre: $paso1:\ \begin{array}{c}l_{11}=1\\u_{12}=0\end{array}$

$$paso2: i=2,3,4\quad \begin{array}{cc} i=2 & \begin{array}{c} l_{21}=3\\ l_{22}=12\\ u_{23}=\frac{1}{4}=0.25\end{array}\\ i=3 & \begin{array}{c} l_{32}=3\\ l_{33}=\frac{37}{4}=9.25\\ u_{34}=\frac{8}{37}\approx 0.2162\end{array}\\ i=4 & \begin{array}{c} l_{43}=2\\ l_{44}=\frac{354}{37}\approx 9.568\\ u_{45}=\frac{111}{354}\approx 0.3136\end{array}\end{array}$$

$paso3:\ \begin{array}{c}l_{54}=0\\l_{55}=1\end{array}$

Entonces: $L=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\3&12&0&0&0\\0&3&9.25&0&0\\0&0&2&9.568&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\ U=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0.25&0&0\\0&0&1&0.2162&0\\0&0&0&1&0.3136\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

$y=Uc$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\3&12&0&0&0\\0&3&9.25&0&0\\0&0&2&9.568&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0\\-32\\-134\\115\\0\end{bmatrix}\Rightarrow y=\begin{bmatrix}0\\-2.667\\-13.62\\14.87\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0.25&0&0\\0&0&1&0.2162&0\\0&0&0&1&0.3136\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}c=\begin{bmatrix}0\\-2.667\\-13.62\\14.87\\0\end{bmatrix}\Rightarrow c=\begin{bmatrix}0\\1.542\\-16.83\\14.87\\0\end{bmatrix}$$

B. Sujeta: $\begin{bmatrix}6&3&0&0&0\\3&12&3&0&0\\0&3&10&2&0\\0&0&2&10&3\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-32\\-134\\115\\0\end{bmatrix}$

Método de Crout:

Sujeta: $paso1:\ \begin{array}{c}l_{11}=6\\u_{12}=\frac{1}{2}=0.5\end{array}$

$$paso2: i=2,3,4\quad \begin{array}{cc} i=2 & \begin{array}{c} l_{21}=3\\ l_{22}=\frac{21}{2}=10.5\\ u_{23}=\frac{6}{21}=0.2857\end{array}\\ i=3 & \begin{array}{c} l_{32}=3\\ l_{33}=\frac{192}{21}\approx 9.143\\ u_{34}=\frac{42}{192}\approx 0.2188\end{array}\\ i=4 & \begin{array}{c} l_{43}=2\\ l_{44}=\frac{1836}{192}\approx 9.562\\ u_{45}=\frac{576}{1836}\approx 0.3137\end{array}\end{array}$$

$paso3:\ \begin{array}{c}l_{54}=3\\l_{55}=\frac{9288}{1836}\approx 5.059\end{array}$

Entonces: $L=\begin{bmatrix}6&0&0&0&0\\3&10.5&0&0&0\\0&3&9.143&0&0\\0&0&2&9.562&0\\0&0&0&3&5.059\end{bmatrix}\ U=\begin{bmatrix}1&0.5&0&0&0\\0&1&0.2857&0&0\\0&0&1&0.2188&0\\0&0&0&1&0.3137\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

$y=Uc$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9.562 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5.059 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \\ -134 \\ 115 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2188 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.048 \\ -13.66 \\ 14.88 \\ -8.826 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \begin{bmatrix} -0.979 \\ 1.958 \\ -17.52 \\ 17.65 \\ -8.826 \end{bmatrix}$$

ii. Con los datos obtenidos en la parte anterior la Spline nos queda:

A. Libre:

$$\begin{aligned} S_0 &= 220 + 18.79(x-1) + 0(x-1)^2 + 0.1713(x-1)^3 && si\ x \in [1,4] \\ S_1 &= 281 + 23.42(x-4) + 1.542(x-4)^2 - 2.041(x-4)^3 && si\ x \in [4,7] \\ S_2 &= 310 - 22.47(x-7) - 16.83(x-7)^2 + 5.283(x-7)^3 && si\ x \in [7,9] \\ S_3 &= 240 - 26.41(x-9) + 14.87(x-9)^2 - 1.652(x-9)^3 && si\ x \in [9,12] \end{aligned}$$

B. Sujeta:

$$\begin{aligned} S_0 &= 220 + 18.37(x-1) - 0.979(x-1)^2 + 0.3263(x-1)^3 && si\ x \in [1,4] \\ S_1 &= 281 + 40.79(x-4) + 1.958(x-4)^2 - 2.164(x-4)^3 && si\ x \in [4,7] \\ S_2 &= 310 - 35.17(x-7) - 17.52(x-7)^2 + 5.862(x-7)^3 && si\ x \in [7,9] \\ S_3 &= 240 - 14.31(x-9) + 17.65(x-9)^2 - 2.942(x-9)^3 && si\ x \in [9,12] \end{aligned}$$

iii. Newton:

x_k	y_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k \ldots x_{k+2}]$	$f[x_k \ldots x_{k+3}]$
1	220	$\frac{281-220}{3} = \frac{61}{3} \approx 20.33$	$\frac{9.667-20.33}{7-1} \approx -1.777$	$\frac{-8.933+1.777}{9-1} = -0.8945$	$\frac{0.325+0.8945}{12-1} \approx 0.1109$
4	281	$\frac{310-281}{3} = \frac{29}{3} \approx 9.667$	$\frac{-35-9.667}{9-4} \approx -8.933$	$\frac{-6.333+8.933}{12-4} = 0.325$	
7	310	$\frac{240-310}{2} = \frac{-70}{2} = -35$	$\frac{3.333-35}{12-7} \approx -6.333$		
9	240	$\frac{250-240}{3} = \frac{10}{3} = 3.333$			
12	250				

Entonces, el polinomio de Newton es:

$$p_N(x) = 220 + 20.33(x-1) - 1.777(x-1)(x-4) - 0.8945(x-1)(x-4)(x-7) + 0.1109(x-1)(x-4)(x-7)(x-9)$$

iv. Evaluemos en los meses faltantes:

Spline:

A. Libre:

Mes	kW
$Septiembre(x=2)$	239
$Octubre(x=3)$	259
$Diciembre(x=5)$	303.9
$Enero(x=6)$	317.7
$Marzo(x=8)$	276
$Mayo(x=10)$	226.8
$Junio(x=11)$	233.4

B. Sujeta:

Mes	kW
$Septiembre(x=2)$	237.7
$Octubre(x=3)$	255.4
$Diciembre(x=5)$	321.6
$Enero(x=6)$	353.1
$Marzo(x=8)$	263.2
$Mayo(x=10)$	240.4
$Junio(x=11)$	258.4

Polinomio de Newton:

Mes	kW
$Septiembre(x=2)$	227.2
$Octubre(x=3)$	251.7
$Diciembre(x=5)$	304.9
$Enero(x=6)$	316.2
$Marzo(x=8)$	284.4
$Mayo(x=10)$	180.1
$Junio(x=11)$	110.6

Entonces, el promedio del gasto anual es:

Spline:

A. Libre: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 239 + 259 + 303.9 + 317.7 + 276 + 226.8 + 233.4 \approx 3157$

Promedio: $\frac{3157}{12} \approx 263.1$

B. Sujeta: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 237.7 + 255.4 + 321.6 + 353.1 + 263.2 + 240.4 + 258.4 \approx 3231$
Promedio: $\frac{3231}{12} = 269.3$

Newton: $220 + 281 + 310 + 240 + 250 + 227.2 + 251.7 + 304.9 + 316.2 + 284.4 + 180.1 + 110.6 \approx 2976$
Promedio: $\frac{2976}{12} = 248$
Entonces, la mejor aproximación es la Spline Sujeta, luego la Spline Libre y finalmente el polinomio de interpolación.

2) Mínimos cuadrados

(a) Mínimos Cuadrados Ortogonales Lineales

i) $\min h^2 = \min\ (x_0 - x)^2 + (y_0 - (a + bx))^2$
$\frac{\partial h}{\partial x} = 2(x_0 - x)(-1) + 2(y_0 - (a + bx))(-b) = 0$
$(x_0 - x) + (y_0 - (a + bx))b = 0$
$x_0 - x + by_0 - ab - b^2x = 0$
$x(1 + b^2) = x_0 + by_0 - ab$
$\Rightarrow \hat{x}_0 = \frac{x_0+by_0-ab}{b^2+1}$
$\Rightarrow \hat{y}_0 = a + b\frac{x_0+by_0-ab}{b^2+1} = \frac{bx_0+b^2y_0+a}{b^2+1}$
$h^2_{\min} = (\hat{x}_0 - x_0)^2 + (\hat{y}_0 - y_0)^2 = (\frac{x_0+by_0-ab}{b^2+1} - x_0)^2 + (\frac{bx_0+b^2y_0+a}{b^2+1} - y_0)^2$
$= \left(\frac{by_0-ab-b^2x_0}{b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a-y_0+bx_0}{b^2+1}\right)^2 = \frac{(by_0-ab-b^2x_0)^2+(a-y_0+bx_0)^2}{(b^2+1)^2} = \frac{(a-y_0+bx_0)^2}{b^2+1}$

ii) $E_\perp(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(a-y_i+bx_i)^2}{b^2+1}$

$$\min E_\perp(a,b) \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{\partial E_\perp}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2(a-y_i+bx_i)}{b^2+1} = 0 \\ \frac{\partial E_\perp}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2(a-y_i+bx_i)x_i(b^2+1)-2b(a-y_i+bx_i)^2}{(b^2+1)^2} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i) = 0 \Rightarrow a + b\bar{x} = \bar{y}$
$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\, x_i(b^2 + 1) - b\,(a - y_i + bx_i)^2 = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\,[x_i(b^2 + 1) - b\,(a - y_i + bx_i)] = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\,[x_ib^2 + x_i - ba + by_i - b^2x_i] = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\,[x_i - ba + by_i] = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\, x_i - ab\sum\limits_{i=0}^{n} (a - y_i + bx_i) + b\sum\limits_{i=0}^{n} (a - y_i + bx_i)\, y_i = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\, x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} (a - y_i + bx_i)\, y_i = 0$
$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2S_{xy} = 0$
Entonces tenemos el sistema
$a + b\bar{x} = \bar{y}$
$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2S_{xy} = 0$

iii) Remplazando (Esto no habia que hacerlo)
$(\bar{y} - b\bar{x})\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - b\bar{x})b\bar{y} - bS_y + b^2S_{xy} = 0$
$\bar{y}\bar{x} - b\bar{x}^2 - S_{xy} + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\bar{y}^2 - b^2\bar{x}\bar{y} - b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2S_{xy} = 0$
$b^2(S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) + b(S_x^2 - S_y^2) - (S_{xy} - \bar{x}\bar{y}) = 0$
$b^2 + b\frac{(S_x^2-S_y^2)}{(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})} - 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2-S_y^2)}{2(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})} \pm \sqrt{\frac{(S_x^2-S_y^2)^2-4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}}$
Ahora bien, si
$\bar{y} > 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2-S_y^2)}{2(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})} + \sqrt{\frac{(S_x^2-S_y^2)^2-4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}}$
$\bar{y} < 0 \Rightarrow b = -\frac{(S_x^2-S_y^2)}{2(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})} - \sqrt{\frac{(S_x^2-S_y^2)^2-4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}{4(S_{xy}-\bar{x}\bar{y})^2}}$
$a = \bar{y} - b\bar{x}$

(b) Mínimos Cuadrados Ortogonales Polinomiales

i) Ecuación a minimizar: $\min h^2 = (x-x_0)^2 + (p(x)-y_0)^2$. Para encontrar el punto hay que derivar con respecto a x e igualar a cero. Luego, al resolver el sistema, se encontrarán n soluciones, y al evaluar h^2 en cada una de estas, se escoje la que hace a h^2 menor.

ii) La recta $y = a + b\hat{x}$ cumple que $b = p'(\hat{x})$ y $p(\hat{x}) = a + b\hat{x}$
$\Rightarrow y(x) = p(\hat{x}) + p'(\hat{x})(x-\hat{x}) = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x}) + xp'(\hat{x})$ (Taylor de 1° orden)

iii) Por la parte (a) - i) $h^2_{\min} = \frac{(a-y_0+bx_0)^2}{b^2+1}$., donde $a = p(\hat{x}) - \hat{x}p'(\hat{x})$ y $b = p'(\hat{x})$
$\Rightarrow h^2_{\min} = \frac{\left(p(\hat{x})-\hat{x}p'(\hat{x})-y_0+p'(\hat{x})x_0\right)^2}{p'(\hat{x})^2+1}$

iv) Dados los puntos $(x_i, y_i),\ i = 1...n$, el problema a minimizar es:
$E_\perp(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\left(p(\hat{x})-\hat{x}p'(\hat{x})-y_i+p'(\hat{x})x_i\right)^2}{p'(\hat{x})^2+1}$. Para resolverlo se debe derivar según $a_j,\ j = 0...m$, donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$. Luego queda un sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ variables no lineal a resolver. El resultado siempre existe ya que el el error no es acotado superiormente pero si inferiormente, ya que siempre $E_\perp(p) \geq 0$, por lo que el mínimo existe. En el caso que $n \leq m+1$, el polinomio resultante sería el polinomio interpolante, ya que en ese caso, $E_\perp(p) = 0$. En el caso que $x_i = x_j$ pero $y_i \neq y_j$, con $i, j \in \{1, ..., n\}$, el método también encuentra una solución, ya que el mínimo siempre existe, pero en el caso que $n \leq m+1$, el polinomio interpola solo los puntos con una única imagen, y se aproxima en los puntos con multiples imagenes.

(c) Minimos Cuadrados Ordinarios y Ortogonales
Con los puntos: $(0,1),\ (2,3)\ (3,2)$.

i) De la parte a.ii), el sistema que resuelve es:
$a + b\bar{x} = \bar{y}$
$a\bar{x} - S_{xy} + b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + ab\bar{y} - b\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2S_{xy} = 0$
Donde:
$n = 3$
$\bar{x} = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}$
$\bar{y} = \frac{1+3+2}{3} = 2$
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0+4+9 = 13$
$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1+9+4 = 14$
$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i = \frac{0+6+6}{3} = 4$
Reemplanzando:
$a + b\frac{5}{3} = 2 \Rightarrow a = 2 - \frac{5}{3}b$
$a\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + ab2 - b\frac{14}{3} + b^24 = 0$
$\Rightarrow \left(2 - \frac{5}{3}b\right)\frac{5}{3} - 4 + b\frac{13}{3} + \left(4 - \frac{10}{3}b\right)b - b\frac{14}{3} + b^24 = 0$
$\Rightarrow b^2 + \frac{4}{3}b - 1 = 0$
$\Rightarrow b_1 = -1.869 \qquad b_2 = \frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{2}{3} = 0.5352$
como todos los $y_i > 0$
$\Rightarrow b = 0.5352$
$\Rightarrow a = 1.108$
$L_1 = 1.108 + 0.5352x$

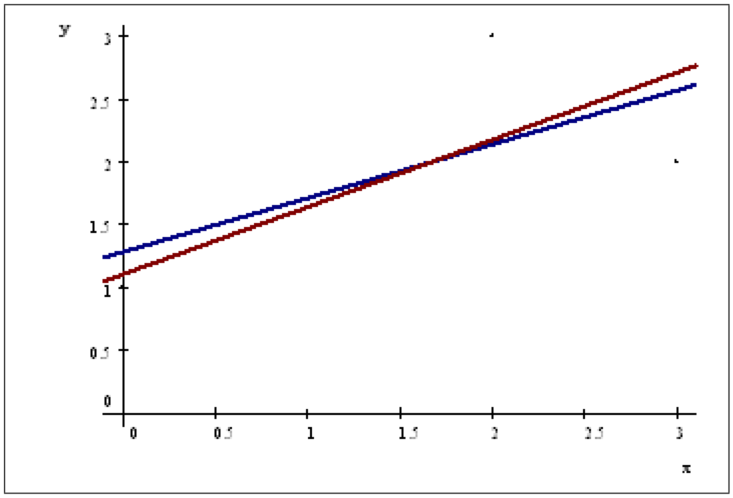
ii) El sistema a resolver es:
$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.286 \\ 0.4286 \end{bmatrix}$$
$L2 = 1.286 + 0.4286x$

iii) Grafique y compare $L1$ y $L2$..

Rojo: $L_1 = 1.108 + 0.5352x$

Azul: $L2 = 1.286 + 0.4286x$

Negro: $(0, 1)$, $(2, 3)$ $(3, 2)$.



$L1$ tiene menor intercepto que $L2$, pero mayor pendiente, además se puede observar que el punto en donde ambas rectas se intercepta corresponde a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{3}, 2)$. La diferencia entre ambas rectas se basa en el hecho que $L2$ solo concidera el error en el eje y, por lo que su pendiente será la que menor haga la suma de los errores verticales, mientras que $L1$ concidera el error ortogonal, que es el error del eje x y del eje y, por lo que su pendiente será la que haga menor el error del eje x y del eje y. Esta concideración se basa en el hecho de que si el error de los datos es solo del eje x, la recta $L1$ tiene la propiedad que el error $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \hat{x}_i|$, donde $\hat{x}_i$ es tal que $L2(\hat{x}_i) = y_i$ es menor que cualquier otra recta.