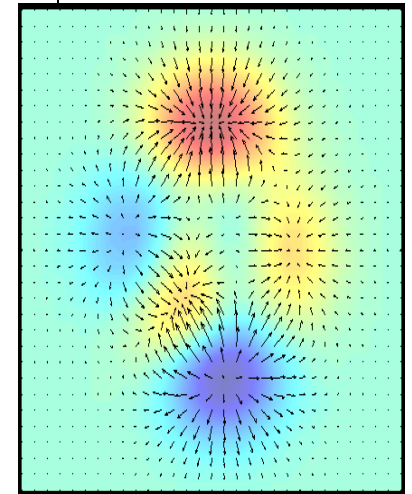




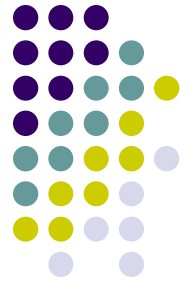
Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico MA-33A

Métodos Numéricos para Sistemas de Ecuaciones Lineales



Gonzalo Hernández Oliva



MN para SEL: Temario

- 1) Motivación – Aplicaciones SEL:
 - a) Interpolación Polinomial
 - b) Mínimos Cuadrados
 - c) Método Simplex – Optimización Lineal
- 2) Definiciones y Resultados Básicos
- 3) Métodos de Pivoteo (Directos) para SEL:
Gauss y Gauss-Jordan
- 4) Análisis de Error del Método de Gauss



MN para SEL: Temario

5) Matriz Inversa y Determinante

6) Factorización de Matrices

7) Métodos Iterativos para SEL

a) Método de Jacobi y Gauss-Seidel

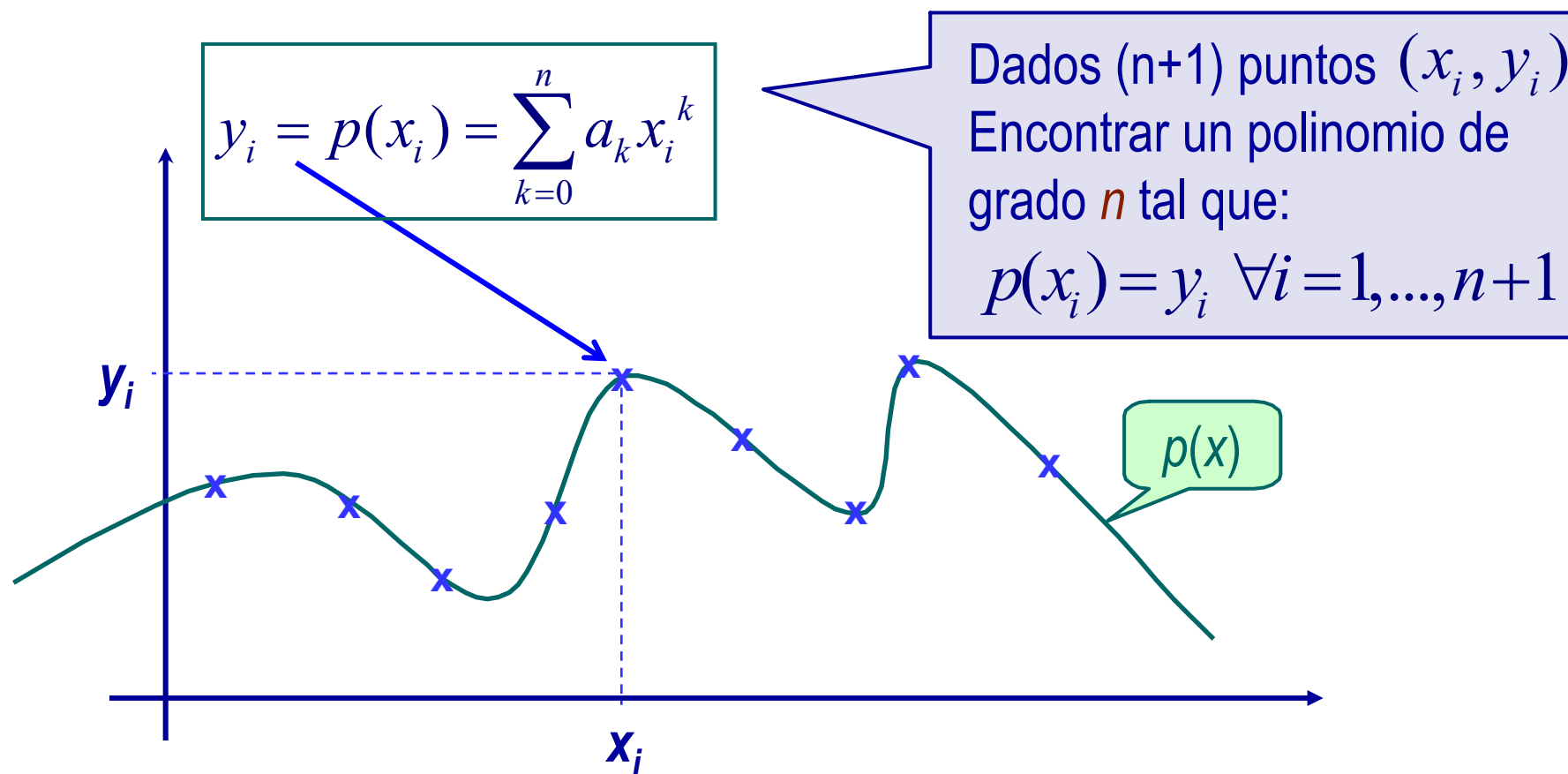
b) Método de Relajación SOR y Gradiente Conjugado

c) Análisis de Error de los Métodos Iterativos

d) Métodos para Vectores y Valores Propios

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



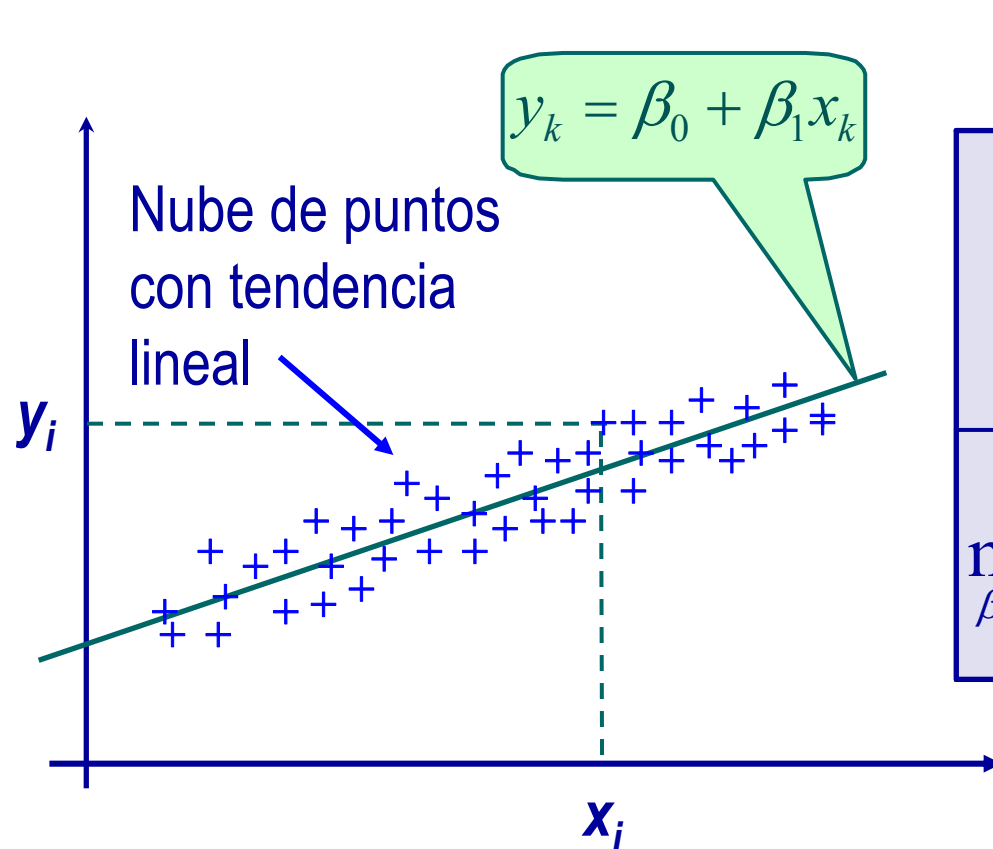
$$y_i = p(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, (n+1)$$

$$y_i = p(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados

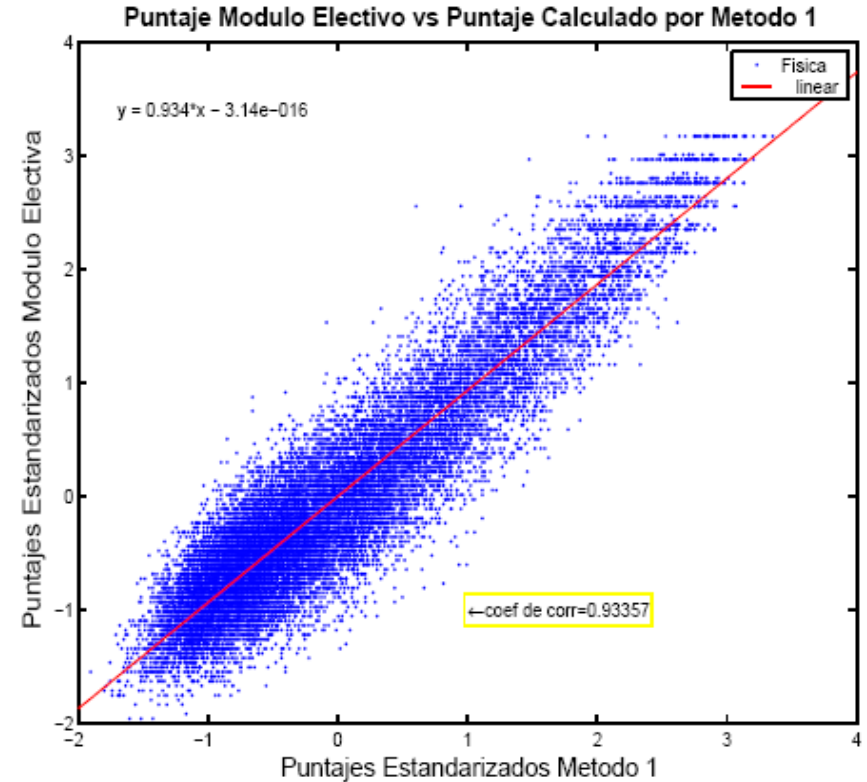
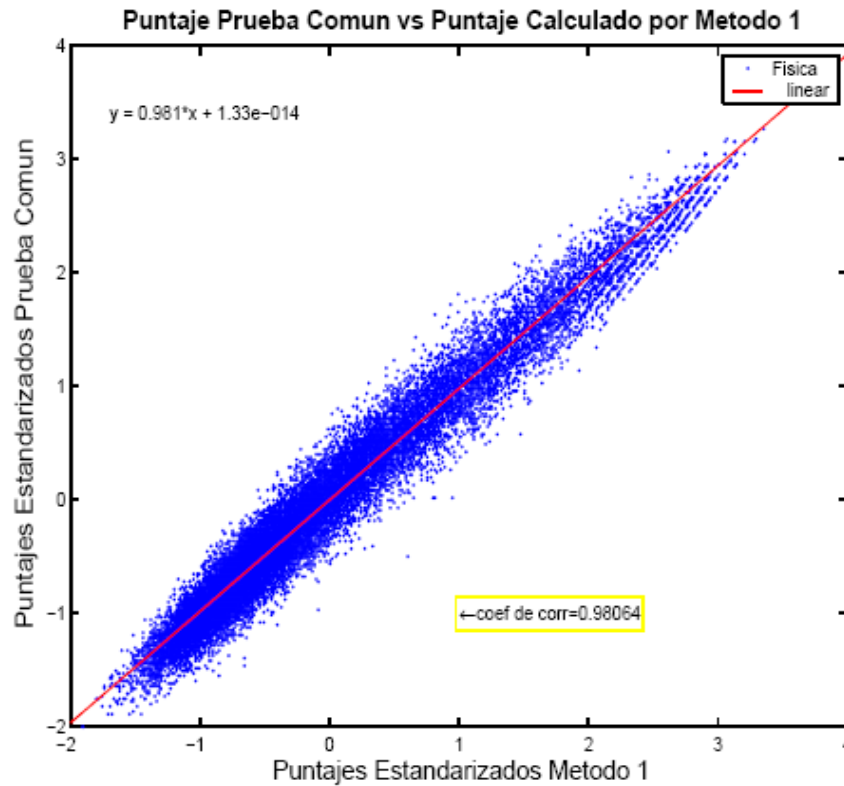
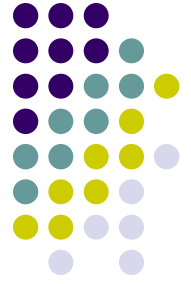


Dados n puntos (x_i, y_i)
Encontrar la recta que mejor los "representa":

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{k=1}^n [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k)]^2$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados



- Sea $f \in \zeta[a, b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MCC:

$$\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx$$

$$\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}$$

Matriz tipo Hilbert !

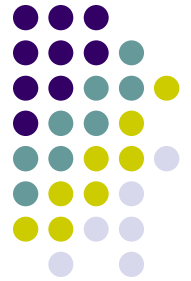
- Ecuaciones Normales:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

coeficientes

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

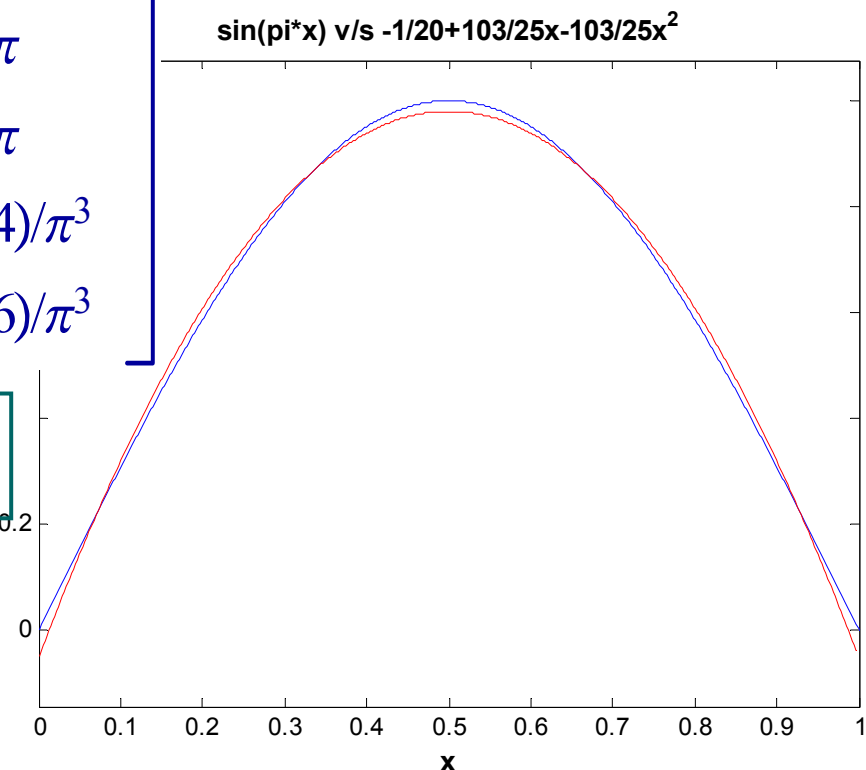
1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados



- Sea $f(x) = \sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2 - 4)/\pi^3 \\ (\pi^2 - 6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

$$p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05$$

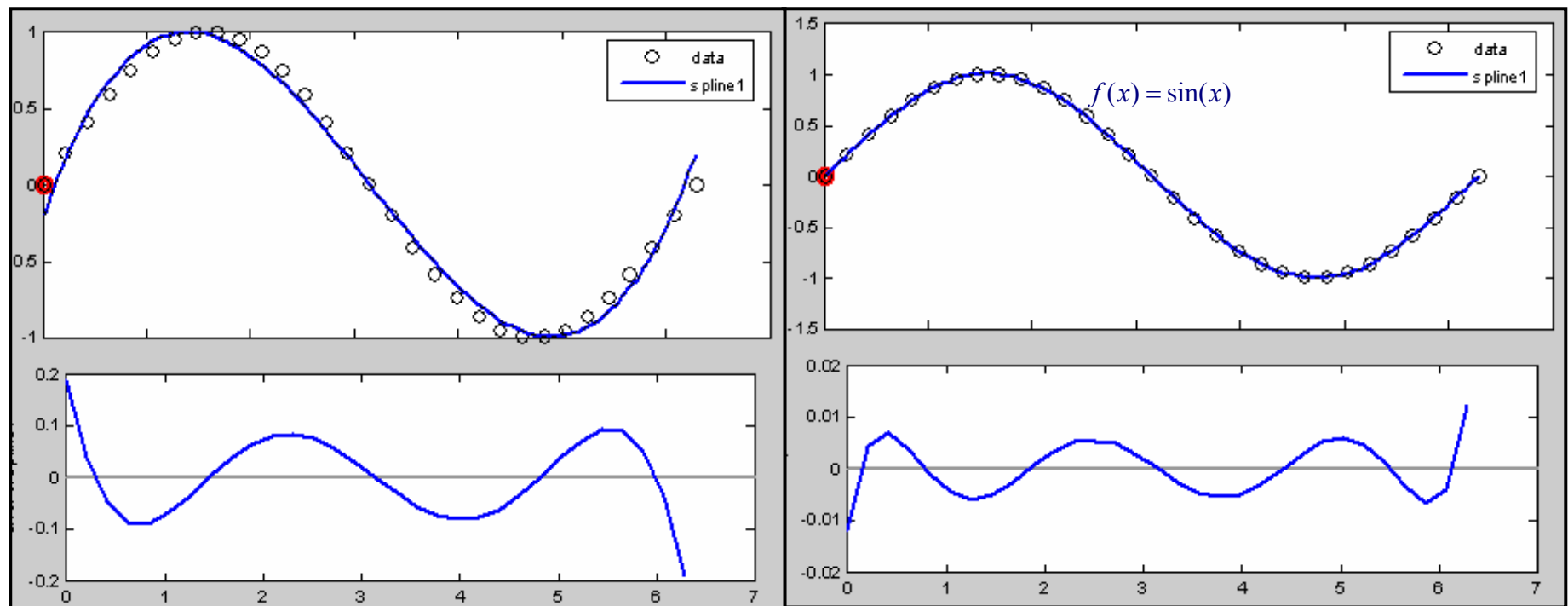


MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados



Ejemplo 1:

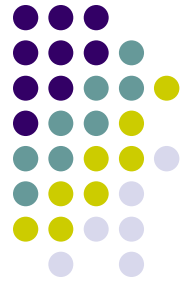


$$f(x) = \sin(x)$$

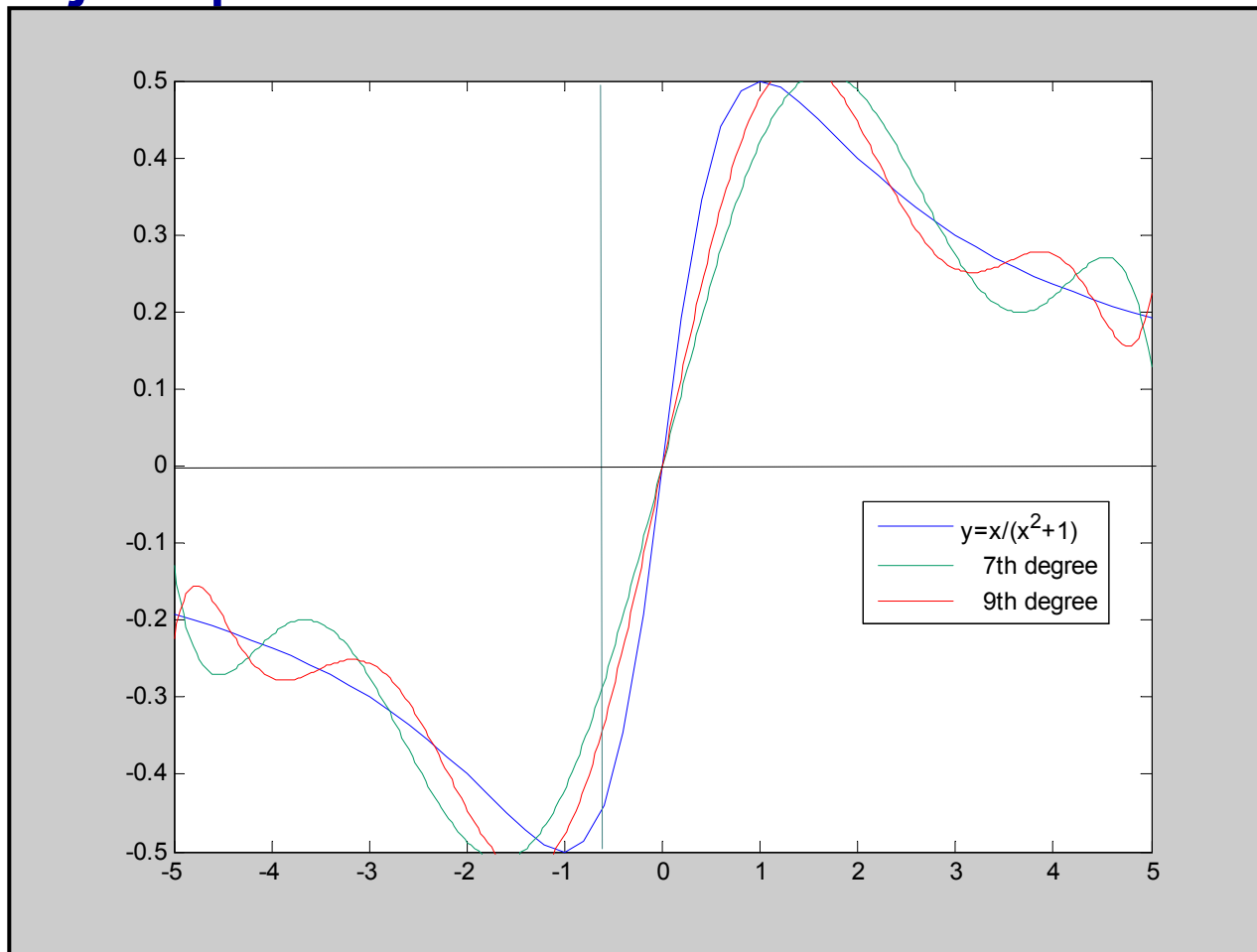
$$p(x) = \sum_{k=0}^{5,6} a_k x_i^k$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 2: Mínimos Cuadrados



Ejemplo 2:



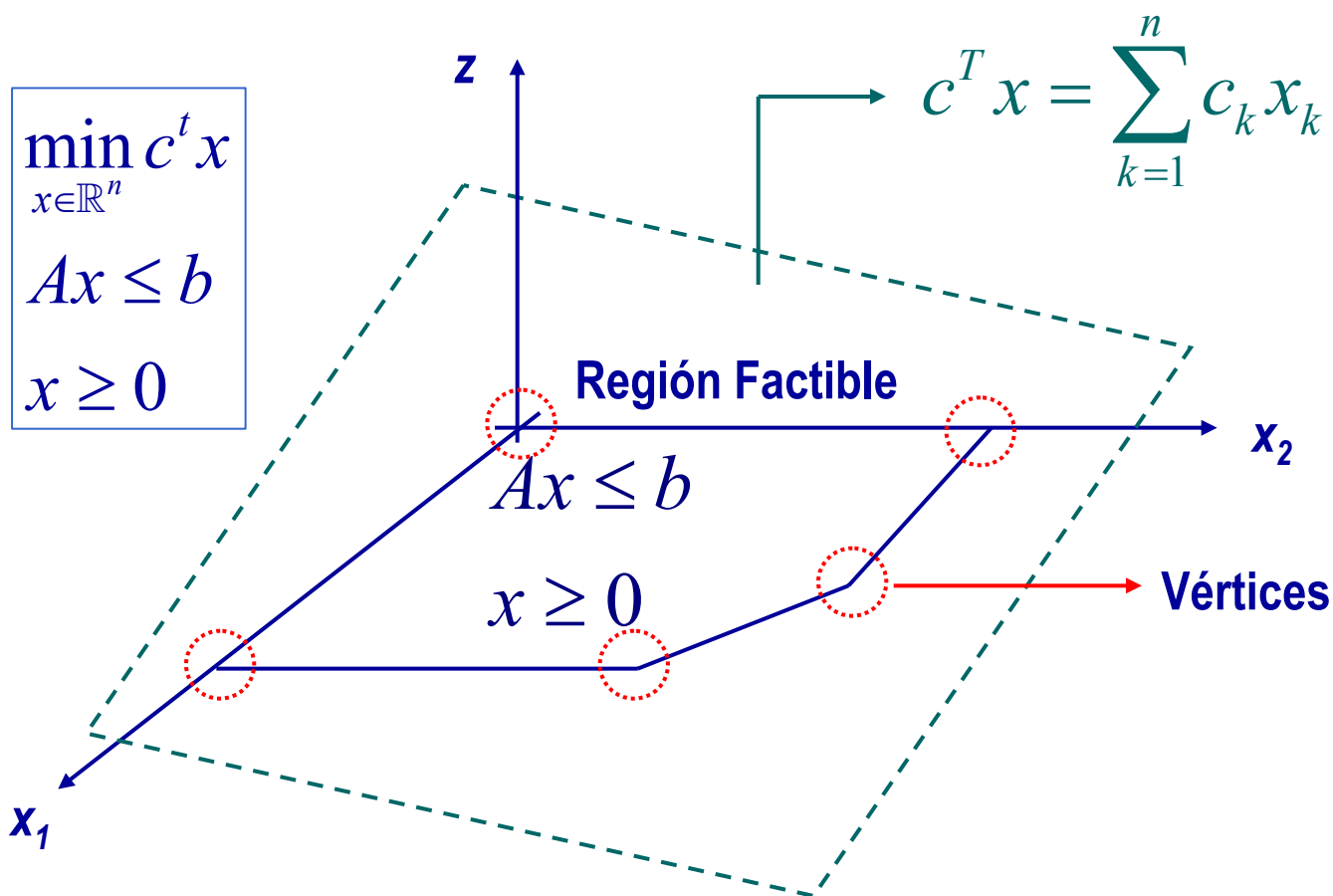
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^7 a_k x_i^k$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^9 a_k x_i^k$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

1) Motivación 3: Programación Lineal



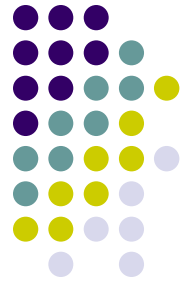


MN para Sist. de Ecs. Lineales:

2) Defs. y Resultados Básicos 1

- Resolver un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas consiste en determinar los valores de las variables: x_1, x_2, \dots, x_n tales que, dados: $A = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$) se satisfagan las ecuaciones: $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

2) Defs. y Resultados Básicos 2

- Todo SEL se puede resolver bien numéricamente ?
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ invertible y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces es posible demostrar que si se perturba A o b se tiene:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (1)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (2)$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

2) Defs. y Resultados Básicos 3



- La norma de $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define según:

$$\|C\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \right\} = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{j=1}^n |c_{1j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |c_{nj}| \right\}$$

- Se define el número de condicionamiento* de A según:

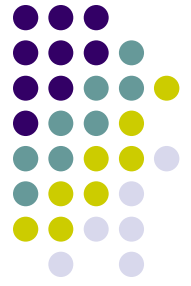
$$\text{cond}_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$$

- Se tiene que: $\text{cond}(A) \geq 1$.

*Revisar cálculo del $\text{cond}(A)$ en Matlab

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

2) Defs. y Resultados Básicos 4



- Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.484 & 0.372 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A + \delta A = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.423 \\ 0.48\textcircled{3} & 0.372 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.127 \\ 0.112 \end{bmatrix} \Rightarrow x' = \begin{bmatrix} -0.4536 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$

- Se tiene: $\text{cond}(A) = 0.973 \times 7833.3 = 7621.8 !!!$
- El sistema es mejor condicionado si se tiene que $\text{cond}(A)$ esta cerca de 1 (Mat. de Hilbert)

MN para Sist. de Ecs. Lineales

3) Método de Gauss 1

Sin Anulación de Pivote:

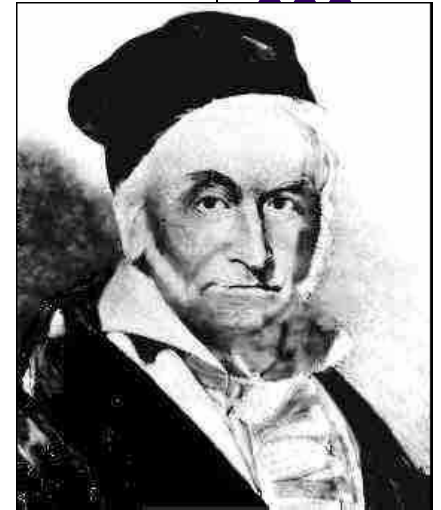
- Parte 1: Eliminación de variables bajo la diagonal en las ecuaciones mediante operaciones elementales:

→ Multiplicar una ecuación por un real

→ Sumar dos ecuaciones

Se entonces producen ceros bajo la diagonal.

- Parte 2: Sustitución backward de las variables en las ecuaciones



MN para Sist. de Ecs. Lineales

3) Método de Gauss 2



Sustitución Backwards:

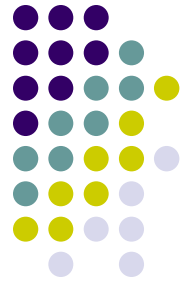
$$x_n = \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}}$$
$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right) \quad k = (n-1), \dots, 1$$

Veamos un ejemplo.

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

3) Método de Gauss 3

Estrategias de Pivoteo



- En la iteración k de la primera etapa del método de Gauss es posible que el pivote a_{ji}^k (elementos de la diagonal de la ecuación i) se anule. En este caso se permuta la ecuación i con la ecuación m de mayor pivote en módulo (pivoteo parcial):

$$|a_{mi}^k| \geq |a_{ji}^k| \quad \text{para todo } j = i+1, \dots, n$$

- Investigue la estrategia de pivoteo completo


MN para Sist. de Ecs. Lineales:

3) Método de Gauss 4: # de Ops



- Una medida de la eficiencia de un algoritmo es el tiempo que demora en ejecutarse, el cual es proporcional al número de operaciones aritméticas (ops)

$$\text{Ops_Gauss}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (n - i)(2n - 2i + 6) \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{n-1}} \right\} \begin{array}{l} \text{Parte 1} \\ O(n^3) \end{array}$$



$$+ \sum_{i=1}^n (2i - 1) \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\} \begin{array}{l} \text{Parte 2} \\ O(n^2) \end{array}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

3) Método de Gauss - Jordan:



- El método de Gauss – Jordan consiste en aplicar 2 veces la primera parte del método de Gauss, es decir: triangularizar superior e inferiormente la matriz A

$$\text{Ops_G-J}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(2n-2i+6) + \sum_{i=1}^{n-1} 4i + n$$

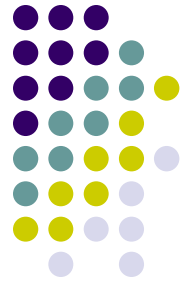
Parte 1 $O(n^3)$

Parte 2 $O(n^2)$

\pm, \times, \div

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

4) Análisis de Error del M. de Gauss:



- Es posible hacer un análisis de propagación de errores, que se obtienen al realizar las operaciones aritméticas de la primera y segunda etapa del método de Gauss o Gauss – Jordan
- Se demuestra que esta propagación de errores disminuye si se utiliza alguna técnica de pivoteo (parcial o completo)

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

5) Matriz Inversa y Determinante 1:



- Matriz inversa A: Se aplica el método de Gauss – Jordan al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

5) Matriz Inversa y Determinante 2:



- El $\det(A)$ se puede definir recursivamente mediante la fórmula de Laplace:

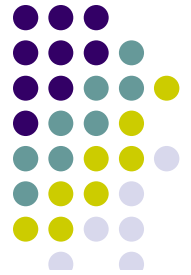
$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

↓
**Fórmula válida
para cualquier
fila i o columna j**

↓
**Matriz Cofactor ij de A
Se obtiene eliminando
fila i y columna j**

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

5) Matriz Inversa y Determinante 3:

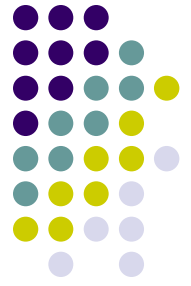


Propiedades del Determinante:

- a) Si todos los coeficientes de una fila o columna de A son ceros $\Rightarrow \det(A) = 0$
- b) Si dos o más filas o columnas de A son linealmente dependientes $\Rightarrow \det(A) = 0$
- c) Si se reemplaza la fila i (F_i) por la fila j (F_j) donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow \det(A') = -\det(A)$
- d) Si se reemplaza la fila i (F_i) por $(F_i + \lambda F_j)$ donde $i \neq j$ entonces $\Rightarrow \det(A') = \det(A)$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

5) Matriz Inversa y Determinante 4:



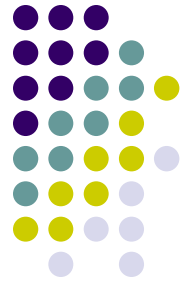
Propiedades del Determinante:

- e) Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- f) $\det(A^t) = \det(A)$
- g) Si A es invertible: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- h) Si A es una matriz triangular inferior, superior o diagonal:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

5) Matriz Inversa y Determinante 5:



- Para calcular el $\det(A)$ se aplica el método de Gauss y la descomposición $A = LU$:
- Efectivamente, si se puede triangularizar la matriz A , entonces:

$$PA = LU \Rightarrow \det(A) = \det(P^T LU)$$

$$\det(A) = \det(P^T) \det(L) \det(U) = \det(P^T) \det(U)$$

$$\det(U) = \prod_{k=1}^n u_{kk}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 1: $A=LU$

- Descomposición $A = LU$ (Alg. Gauss)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-1n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}}_U = A = LU$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 2: Crout

- Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarias

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 3: Crout

- Una matriz A cuadrada tridiagonal puede ser factorizada según $A=LU$ donde:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Factorización de Matrices 4: Crout

- Método de Crout para matrices tridiagonales:

$$\begin{aligned}\text{Paso 1: } l_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Paso 2: Para } i=2, \dots, n-1 \quad l_{i(i-1)} &= a_{i(i-1)} \\ l_{ii} &= a_{ii} - l_{i(i-1)} u_{(i-1)i} \\ u_{i(i+1)} &= \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Paso 3: } l_{n(n-1)} &= a_{n(n-1)} \\ l_{nn} &= a_{nn} - l_{n(n-1)} u_{(n-1)n}\end{aligned}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Fact. de Matrices 5: Cholesky

- Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$
- Teorema: Si A es definida positiva:
 - a) $\det(A) \neq 0$
 - b) $a_{kk} > 0$ para todo $k=1, \dots, n$
 - c) $\max_{1 \leq k, j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_{kk}|$
 - d) $(a_{ij})^2 < a_{ii} a_{jj} \quad \forall i \neq j$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Fact. de Matrices 6: Cholesky



- Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $\det(A_{kk}) > 0$ para todo $k=1, \dots, n$.

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matriz cofactor principal } k$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

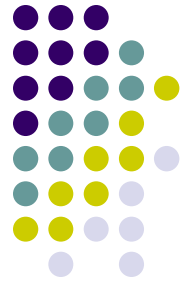
6) Fact. de Matrices 7: Cholesky



- Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^T$ donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} > 0$ para todo $i=1, \dots, n$.
- En este caso para resolver un SEL $Ax = b$ se debe aplicar la sustitución forward - backward

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Fact. de Matrices 8: Met. Cholesky



Paso 1: $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Paso 2: Para $j=2,\dots,n$ $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$

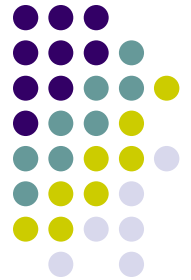
Paso 3: Para $i=2,\dots,n-1$ $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}$

Para $j=(i+1),\dots,n$ $l_{ji} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right)}{l_{ii}}$

Paso 4: $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 \right)^{1/2}$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

6) Fact. Matrices 9: Ortogonalización



- Factorización QR:

$$A = QR$$

Q matriz ortogonal: $Q^t Q = I$ (Gram-Schmidt)

$$R = Q^t A$$

- Factorización SVD:

$$A_{n \times m} = U S V^t$$

$U_{n \times n}$, $V_{m \times m}$ matrices ortogonales

$S_{n \times m}$ matriz valores singulares (raíz v.p. $A^t * A$)



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 1:

Métodos Iterativos:

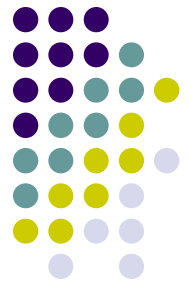
$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \quad \forall k \geq 0$$

Los métodos para SEL son de la forma:

$$F(x^{(k)}) = Bx^{(k)} + h$$

donde $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h \in \mathbb{R}^n$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 2:

- En general se construyen B y h de la siguiente forma:

Sean M y $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que:

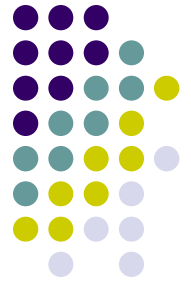
M es invertible y $A = M - N$

Entonces:

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

- Esto sugiere definir:

$$B = M^{-1}N \quad y \quad h = M^{-1}b$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 3:

- Luego, si descomponemos $A = (a_{ij})$ invertible según:

$$A = \text{diag}(A) + \text{low}(A) + \text{up}(A)$$

- Donde $\text{diag}(A)$, $\text{low}(A)$, $\text{up}(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se definen según:

$$\text{diag}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 4:



$$\text{low}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

$$\text{up}(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

- En base a estas definiciones se tienen los métodos de Jacobi y Gauss - Seidel



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 5:

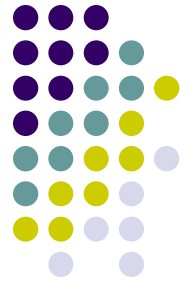
- Jacobi: define M y N según:

$$M = \text{diag}(A)$$

$$N = -[\text{low}(A) + \text{up}(A)]$$

$$B = -\text{diag}(A)^{-1} [\text{low}(A) + \text{up}(A)]$$

$$h = \text{diag}(A)^{-1} b$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 6:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ $i = 1, \dots, n$ es el vector de la iteración k del método de Jacobi, entonces satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3 \dots$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 7:

- Gauss - Seidel: define M y N según

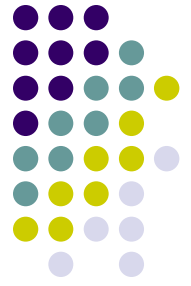
$$M = [\text{diag}(A) + \text{low}(A)] \quad N = -\text{up}(A)$$

$$B = -[\text{diag}(A) + \text{low}(A)]^{-1} [\text{up}(A)]$$

$$h = [\text{diag}(A) + \text{low}(A)]^{-1} b$$

- J y G-S convergen $\forall x^0$ si A es estrictamente diagonal dominante:

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \quad \forall k = 1, \dots, n$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 8:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ $i = 1, \dots, n$ es el vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel, satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$k = 1, 2, 3 \dots$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 9:

- Si $x^{(k)} = (x_i^{(k)})$ $i = 1, \dots, n$ es el vector de la iteración k del método de SOR, satisface la siguiente fórmula iterativa:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \omega \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \right)}{a_{ii}}$$
$$1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3 \dots$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 10:

- Para matrices tridiagonales y definidas positivas, el valor óptimo de ω está dado por la fórmula:

$$\overline{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T)}}$$

- Donde:

$$T_J = -[Diag(A)]^{-1} (Low(A) + Up(A))$$

$$T_G = -[Diag(A) + Low(A)]^{-1} Up(A)$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 11:

- Si A es definida positiva, el método del gradiente conjugado está dado por:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) = \frac{1}{2} x^t A x - x^t b \Leftrightarrow A x = b$$

Paso 0: $x^0 \in \mathbb{R}^n, g^0 = A x^0 - b, d^0 = -g^0$

Paso 1: $\alpha^k = -\frac{(g^k)^t d^k}{(d^k)^t A d^k}$

Paso 2: $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 12:



- Método del gradiente conjugado:

Paso 3: $g^{k+1} = Ax^{k+1} - b$

Paso 4: $\beta^k = \frac{(g^{k+1})^t A d^k}{(d^k)^t A d^k}$

Paso 5: $d^{k+1} = -g^{k+1} + \beta^k d^k$

- Si no hay errores de redondeo el método del gradiente conjugado converge en a lo más n iteraciones.



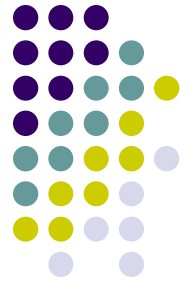
MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 13:

Análisis de Error de los Métodos Iterativos

- Es posible hacer un análisis de propagación de errores que se obtienen al realizar las operaciones aritméticas de las iteraciones del método de Jacobi y Gauss – Seidel
- Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y $Ax = b$:

$$\frac{\|x - x^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{\text{cond}(A)} \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|}$$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 14:

- Si A es una matriz cuadrada, el polinomio en λ definido por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

es el polinomio característico de A

- El polinomio p es de grado n y tiene a lo más n raíces distintas (complejas). Estas raíces de p se denominan valores propios de A .



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 15:

- Definición: El radio espectral de A : $\rho(A)$ se define como:

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$$

donde λ_i es un valor propio de A

- Proposición: Si A es una matriz cuadrada:
 - a) $\|A\|_2 = \rho(A^t A)^{1/2}$
 - b) $\rho(A) \leq \|A\|$



MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 16:

- La relación entre métodos iterativos para SEL y valores propios la establece los siguientes resultados:
- Proposición: Si x^k es la iteración k de un método iterativo para un SEL que tiene la forma:

$$x^{k+1} = Tx^k + c \quad y \quad Ax = b$$

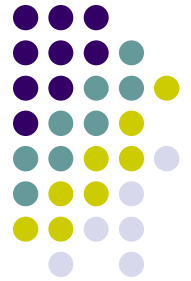
Entonces:

Para $k \rightarrow \infty$

$$\|x^k - x\| \approx \rho(T)^k \|x^0 - x\|$$

MN para Sist. de Ecs. Lineales:

7) Métodos Iterativos para SEL 17:



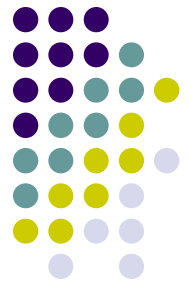
- Proposición: Si x^k es la iteración k de un método iterativo para un SEL que tiene la forma:

$$x^{k+1} = Tx^k + c \quad y \quad Ax = b$$

Entonces: $x^k \rightarrow x$ ssi $\rho(T) < 1$

- Proposición: Si los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen se tiene que:

$$0 \leq \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$$



Bibliografía

- 1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
- 2) J. Stoer & R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Springer, 1992.
- 3) G. Hernández O.: Apuntes de Cálculo Numérico 2007