TEMA 7

ANÁLISIS DE CIRCUITOS POR EL MÉTODO DE MALLAS.

7.1.-INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos visto como obtener las ecuaciones que nos permitan analizar un circuito, tomando como incógnitas las tensiones e intensidades de rama.

En este capítulo desarrollaremos un método general de análisis que nos permitirá reducir el número de ecuaciones del sistema a plantear para determinar su comportamiento.

La idea principal se basa en aplicar el segundo lema de Kirchhoff a todas las mallas del circuito, de forma que el 1er lema quede implícito.

7.2.-ANÁLISIS DE CIRCUITOS POR EL MÉTODO DE MALLAS

Antes de empezar a resolver un circuito por el método de mallas se debe intentar, siempre que sea posible, sustituir los generadores de corriente existentes en la red por generadores de tensión equivalentes (eq. de Thévenin). En el caso de que los generadores de corriente sean ideales (y no puedan ser transformados de forma simple) habrá que tenerlos en cuenta de forma explícita.

Igualmente, se estudiará por separado el caso en que se disponga de generadores dependientes.

A)SIN GENERADORES DE CORRIENTE.

El número de mallas sabemos que es **m = r - n + 1** , siendo **r** el número de ramas y **n** el de nudos.

El procedimiento sistemático consiste en suponer que circula una **corriente de malla** (“ficticia”) por cada malla (es conveniente asignar a todas ellas el mismo sentido: horario o antihorario) y aplicar el 2º lema de Kirchhoff a cada malla, sabiendo que las intensidades de rama (reales) son:

i)Si son ramas externas, que pertenecen a una sola malla, la intensidad de rama será igual a ±**intensidad de malla** a que pertenece. Se tomará el signo + si coinciden las referencias de polaridad de las mismas.

ii)Toda rama interna pertenecerá a dos mallas, de tal forma que si todas las corrientes de la malla tienen el mismo sentido, la intensidad de esa rama será la diferencia entre las corrientes de dichas mallas; el resultado vendrá afectado por un signo + si su referencia de polaridad coincide con la de la rama.

Ejemplo 1.: Plantear las ecuaciones de malla para el circuito de la Fig. 1.

En dicho circuito se han indicado las corrientes de malla (i1 e i2) y los sentidos que se han tomado para cada una (ambas en sentido horario).

El planteamiento de la 2ª ley de Kirchhoff para ambas mallas da como resultado el indicado a continuación.

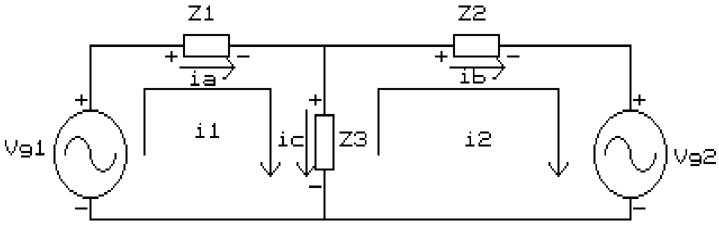

Figura 1

$$\left.\begin{aligned} v_{g1} &= i_1 \cdot Z_1 + \left(i_1 - i_2\right) \cdot Z_3 \\ -v_{g2} &= i_2 \cdot Z_2 + \left(i_2 - i_1\right) \cdot Z_3 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{g1} &= \left(Z_1 + Z_3\right)i_1 - Z_3 i_2 \\ -v_{g2} &= -Z_3 i_1 + \left(Z_2 + Z_3\right)i_2 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

b)CON GENERADORES DE CORRIENTE (IDEALES Y “NO REDUCIDOS”)

En este caso, una cosa que puede hacerse es asignar a cada generador de corriente presente en la red una tensión generadora desconocida (que vendrá determinada por el resto del circuito) y añadir las ecuaciones adicionales para las ramas con generador ideal de corriente.

Ejemplo 2: Encontrar las intensidades de malla del siguiente circuito.

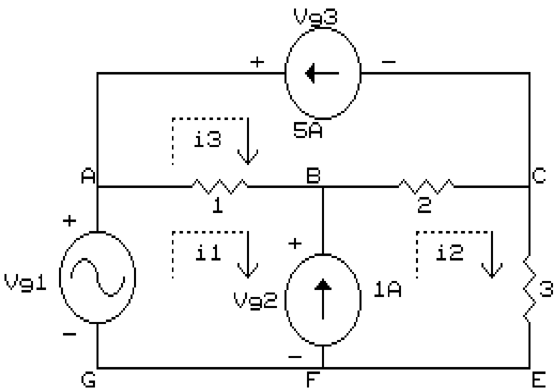

Figura 2

Como se ha indicado, consideraremos las tensiones en bornes de los generadores de corriente como si de un generador de tensión se tratase. Con ello, aplicando el segundo lema para las tres mallas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla 1: } 28 - v_{g2} = (i_1 - i_3)\cdot 1 \\ \text{Malla 2: } v_{g2} = (i_2 - i_3)\cdot 2 + i_2 \cdot 3 \\ \text{Malla 3: } -v_{g3} = (i_3 - i_2)\cdot 2 + (i_3 - i_1)\cdot 1\end{array}\right\} \quad \textbf{(3)}$$

Reordenando nos queda:

$$\left.\begin{array}{r}28 - v_{g2} = i_1 - i_3 \\ v_{g2} = 5i_2 - 2i_3 \\ -v_{g3} = -i_1 - 2i_2 + 3i_3\end{array}\right\} \quad \textbf{(4)}$$

Tenemos tres ecuaciones con cinco incógnitas: nos faltan dos ecuaciones más, que son:

$i_3 = -5 \quad ; \quad i_2 - i_1 = 1$

También puede resolverse este sistema con las últimas ecuaciones y plantear la ecuación de la malla ACEFG (que no incluye ningún generador de corriente. Esa ecuación es, en realidad, la suma de las ecuaciones de las mallas 1 y 2):

$$\left.\begin{array}{r}28 = 1\cdot I_1 + 5\cdot I_2 - 3\cdot I_3 \\ I_3 = -5 \\ I_2 - I_1 = 1\end{array}\right\} \quad \textbf{(5)}$$

La solución de dicho sistema es:

$I_1 = 3A$; $I_2 = 2A$; $I_3 = -5A$

7.3.-EXPRESIÓN MATRICIAL DE LAS ECUACIONES DE MALLAS

Lo siguiente que vamos a comentar, solamente podemos hacerlo cuando el circuito no tiene generadores de corriente (si existiesen, habría que eliminarlos previamente o usar el método anterior). Tampoco usaremos acoplamientos magnéticos (esto se verá en el siguiente punto).

Para sistematizar este método habrá que elegir (como en el caso general) todas las corrientes de malla con el mismo sentido de giro y aplicar:

$$\left[v_g\right] \equiv \begin{bmatrix}\sum (\pm v_g)_1 \\ \vdots \\ \sum (\pm v_g)_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_{11} \cdots Z_{1n} \\ \vdots \\ Z_{n1} \cdots Z_{nn}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}i_1 \\ \vdots \\ i_n\end{bmatrix} \equiv [Z]\cdot[i] \quad \textbf{(6)}$$

donde el signo de cada $\mathbf{v}_{g\,j}$ es el del “polo por donde sale” la corriente ficticia $\mathbf{i}_j$ de la malla **j**,

$\mathbf{Z}_{i\,i}$ = $\sum$ impedancias de la malla **i** = **Autoimpedancias**

$\mathbf{Z}_{i\,j}$ = -$\sum$ impedancias de la rama **i j** = **Impedancias mutuas**.

Para el ejemplo 1 tendríamos:

$$\begin{bmatrix} +v_{g1} \\ -v_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

Siempre que no existan en el circuito generadores dependientes, la matriz [Z] será simétrica (incluso si tiene acoplamientos magnéticos).

7.4.-ANÁLISIS POR MALLAS EN CIRCUITOS CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

Veremos dos casos por separado: cuando las inducciones mutuas están en mallas distintas y cuando en una misma malla coexisten varias inducciones mutuas.

a)Mallas con solamente una inducción mutua como máximo.

Veremos el planteamiento general con un ejemplo.

Ejemplo 3: Plantear las ecuaciones de mallas para el siguiente circuito.

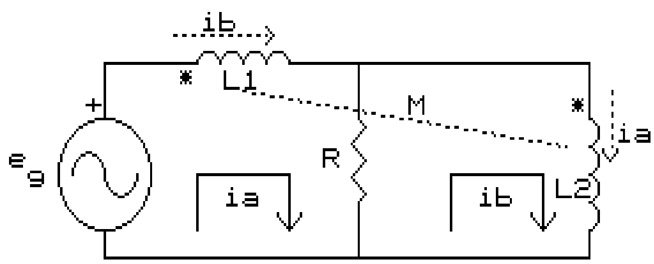

Figura 3

Las ecuaciones serán:

$$\left.\begin{aligned} e_g &= L_1 D i_a + (i_a - i_b) R + i_b M D \\ 0 &= (i_b - i_a) R + L_2 D i_b + M D i_a \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(8)}$$

Las que, si reordenamos, quedarán como:

$$\left.\begin{aligned} e_g &= (R + L_1D)i_a + (-R + MD)i_b \\ 0 &= (-R + MD)i_a + (R + L_2D)i_b \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(9)}$$

Para obtener el signo de M se ha pintado a trazos la intensidad que posee el acoplamiento. Si ese sentido coincide con el de la corriente de malla se pondrá positivo, y si no negativo.

En este caso la escritura directa del sistema de ecuaciones resulta algo más complicada si el circuito presenta ramas acopladas magnéticamente, pero todos los conceptos expuestos hasta ahora siguen teniendo validez.

Como es lógico, las tensiones de excitación de malla se obtienen igual que para el caso sin acoplamientos.

En lo que respecta a las tensiones en los elementos pasivos, deberán tenerse en cuenta no sólo las debidas a las intensidades de estos elementos, sino también las debidas a las intensidades de los elementos con los que estén acoplados.

Supongamos dos ramas de un circuito formado por dos bobinas acopladas magnéticamente, como las de la figura 4.

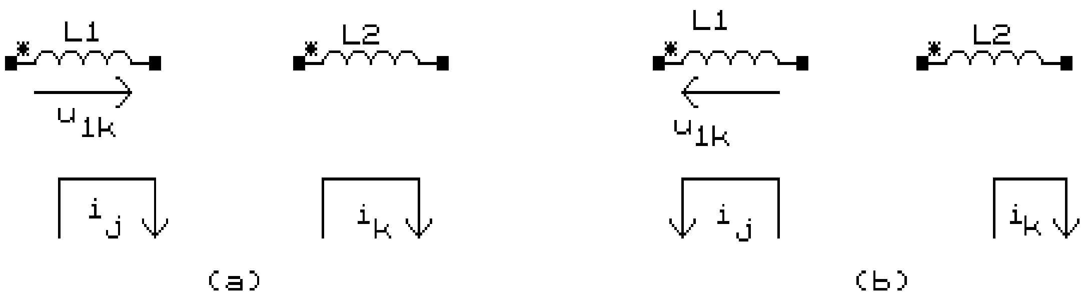

Figura 4

Consideramos la bobina L_1 como perteneciente al lazo j y la L_2 como perteneciente al lazo k. Tomando la referencia de u_{1k} coincidente con la de i_j, el paso de la intensidad de lazo i_k por L_2 da lugar a una diferencia de potencial en L_1 de valor $\mathbf{u_{1k} = \pm M \cdot D \cdot i_k}$ con signo + para la Fig. 4 a, en que las referencias de i_j e i_k entran por terminales correspondientes y signo menos en caso contrario, como sucede en la Fig. 4 b.

La expresión de u_{1k} nos dice que, debido al acoplamiento entre las ramas de L_1 y L_2, existe una impedancia operacional mutua entre los lazos j y k de valor ±MD.

Si el circuito hubiese sido:

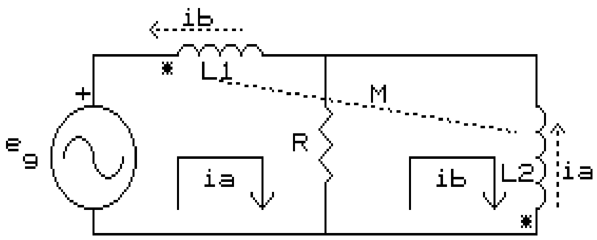

Figura 5

Las ecuaciones serían:

$$\left.\begin{aligned} e_g &= L_1 Di_a + R\left(i_a - i_b\right) - MDi_b \\ 0 &= R\left(i_b - i_a\right) + L_2 Di_b - MDi_a \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} e_g &= \left(L_1 D + R\right)i_a + (-R - MD)i_b \\ 0 &= (-R - MD)i_a + \left(R + L_2 D\right)i_b \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

En cualquiera de los dos casos, observamos que la matriz es simétrica.

b)En el caso de tener en una misma malla dos o más bobinas acopladas magnéticamente, hay que repetir el proceso para cada inducción mutua. De nuevo lo mejor es ver lo que ocurre con un ejemplo.

Ejemplo 4: Plantear las ecuaciones de mallas para el circuito de la Fig. 6.

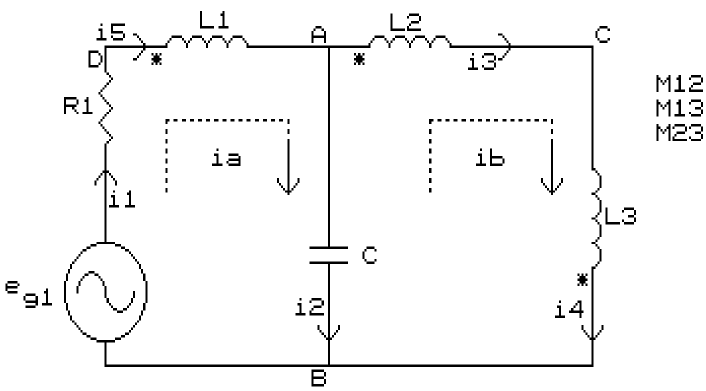

Figura 6

El planteamiento de las ecuaciones de malla es:

$$\left.\begin{aligned} e_{g_1} &= R_1 i_a + L_1 D i_a + \frac{1}{CD}\left(i_a - i_b\right) + M_{12} D i_b - M_{13} D i_b \\ 0 &= \frac{1}{CD}\left(i_b - i_a\right) + \left(L_2 + L_3\right) D i_b + M_{12} D i_a - M_{23} D i_b - M_{13} D i_a - M_{23} D i_b \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(12)}$$

Reordenando:

$$\left.\begin{aligned} e_{g_1} &= \left(R_1 + L_1 D + \frac{1}{CD}\right) i_a + \left(-\frac{1}{CD} + M_{12} D - M_{13} D\right) i_b \\ 0 &= \left(-\frac{1}{CD} + M_{12} D - M_{13} D\right) i_a + \left(\frac{1}{CD} + L_2 D + L_3 D - 2 M_{23} D\right) i_b \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(13)}$$

Veamos un último ejemplo.

Ejemplo 5: Plantear las ecuaciones de mallas para el circuito de la Fig. 7

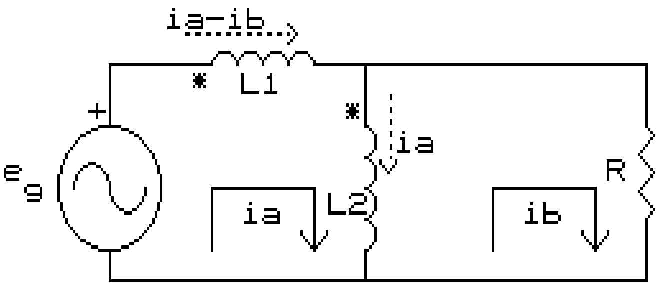

Figura 7

La solución es:

$$\left.\begin{aligned} e_{g_1} &= L_1 D i_a + L_2 D\left(i_a - i_b\right) + MD\left(i_a - i_b\right) + MD i_a \\ 0 &= L_2 D\left(i_b - i_a\right) + i_b R - MD i_a \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(14)}$$

Reordenando, se tendría:

$$\left.\begin{aligned} e_{g_1} &= \left(L_1 + L_2 + 2M\right) D i_a + \left(-L_2 - M\right) D i_b \\ 0 &= \left(-L_2 - M\right) D i_a + \left(L_2 D + R\right) i_b \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(15)}$$

7.5.-USO DE LAS MATRICES EN EL MÉTODO DE ANÁLISIS POR MALLAS

Como ya vimos anteriormente, el procedimiento se puede sistematizar con matrices, siguiendo una serie de reglas.

7.5.1.-CIRCUITOS SIN ACOPLAMIENTOS MAGNÉTICOS

Es lo visto hasta ahora (prescindiendo de fuentes dependientes, que veremos en detalle más adelante). Para el caso de conservar fuentes de corriente independientes, ya vimos que había que introducir las tensiones en bornes como otra variable, a la vez que se añadían tantas ecuaciones como fuentes tuviésemos, que nos relacionaban las intensidades de malla con las de los generadores.

7.5.2.-CIRCUITOS CON ACOPLAMIENTOS MAGNÉTICOS

En este punto vamos a añadir las reglas necesarias para automatizar la obtención de las impedancias propias y mutuas de un circuito, con el fin de acelerar la resolución de éstos. Las reglas a añadir para esos acoplamientos magnéticos son:

-La impedancia operacional mutua entre dos mallas j y k, $\mathbf{Z_{jk}}$, viene dada por la suma de las impedancias propias de los elementos pasivos que pertenezcan simultáneamente a las mallas j y k, debiéndose añadir un término de la forma **±MD** por cada acoplamiento que exista entre las ramas que pertenece a la malla j, con las rama que pertenezcan a la malla k. El signo dependerá, como se ha explicado, de las referencias de polaridad de las intensidades de lazo i_j e i_k.

- Si las dos bobinas pertenecen al mismo lazo, al k, por ejemplo, el paso de i_k por cada una de ellas daría lugar a una diferencia de potencial en la otra de la misma forma, por tanto:
La impedancia operacional propia del lazo básico k, $\mathbf{Z_{kk}}$, viene dada por la suma de las impedancias propias de todos los elementos pasivos que pertenecen a la malla k, más un término de la forma **±2MD** por cada par de bobinas acopladas magnéticamente contenidas en la misma malla. Se tomará para ese término el signo más si la intensidad de lazo i_k entra por terminales correspondientes en ambas bobinas y se tomará el signo menos en caso contrario.

Retomemos algunos de los ejemplos vistos hasta este momento.

Para el circuito de la Fig. 4, podemos poner:

$$\begin{bmatrix} e_{g_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

siendo:

$Z_{aa} = R + L_1 D$
$Z_{ab} = Z_{ba} = -R + MD$
$Z_{bb} = R + L_2 D$

Para el circuito de la Fig. 5 se tendría:

$$\begin{bmatrix} e_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

siendo:

$Z_{aa} = R + L_1D$
$Z_{ab} = Z_{ba} = -R - MD$
$Z_{bb} = R + L_2D$

Para el circuito de la Fig. 6 se tendría:

$$\begin{bmatrix} e_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

siendo:

$Z_{aa} = R_1 + 1/CD + L_1D$
$Z_{ab} = Z_{ba} = -1/CD + M_{12}D - M_{13}D$
$Z_{bb} = 1/CD + L_2D + L_3D - 2M_{23}D$

Para el circuito de la Fig. 7 se tendría:

$$\begin{bmatrix} e_{g_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

siendo:

$Z_{aa} = L_1D + L_2D + 2MD$
$Z_{ab} = Z_{ba} = -L_2D - MD$
$Z_{bb} = R + L_2D$

7.6.-ANÁLISIS DE CIRCUITOS CON FUENTES DEPENDIENTES

En el caso de que tengamos alguna fuente dependiente de tensión (si es de corriente se podrá transformar en una de tensión usando algún método conocido), será preciso introducir ecuaciones adicionales a las anteriores, que relacionen la f.e.m. o corriente de la fuente controlada con las corrientes de malla; en este caso, el conjunto total dará lugar a una matriz de impedancias que ya no será simétrica.

Ejemplo 6: Resolver el circuito de la Fig.8, utilizando el método de mallas.

Primeramente reconvertiremos el generador de corriente en uno de tensión, el cual se indica en la Fig. 8 b.

$$V_g = 5 \cdot 0.5 \cdot v_1 = 2.5 \cdot v_1 \; ; \; R = 5\Omega.$$

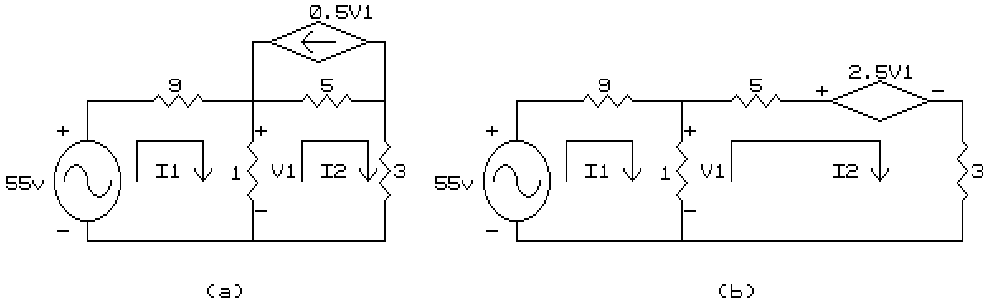

Figura 8

Las ecuaciones de malla son:

$$\left.\begin{aligned} 55 &= (9+1)I_1 - 1\cdot I_2 \\ -2.5V_1 &= -1\cdot I_1 + (1+5+3)\cdot I_2 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(20)}$$

En forma matricial quedaría:

$$\begin{bmatrix} 55 \\ -2.5V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(21)}$$

La relación entre la señal de control V_1 y las corrientes de malla I_1 e I_2 es:

$$V_1 = (I_1 - I_2)\cdot 1$$

de donde resultan las ecuaciones generales:

$$\begin{bmatrix} 55 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 15 & 6.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(22)}$$

cuya solución es $I_1 = 5.38$ A ; $I_2 = 1.24$A

Vemos que la matriz de impedancias deja de ser simétrica.

7.7.-IMPEDANCIA DE ENTRADA

En los circuitos con una sola fuente es importante conocer los bornes de conexión o entrada. En la Fig. 9, la tensión aplicada se designa por V_1 y la intensidad de corriente absorbida es I_1. Puesto que sólo hay una fuente V_1, la corriente I_1 viene dada por la expresión:

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) \qquad \textbf{(23)}$$

Se define la impedancia de entrada como una relación entre V_1 e I_1:

$$Z_{input,1} \equiv \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} \qquad \textbf{(24)}$$

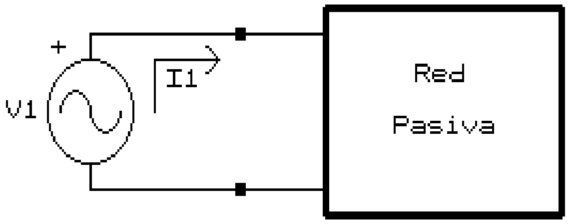

Figura 9

Veamos como sería para una red de, por ejemplo, 3 mallas (y una fuente en cada):

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & Z_{23} \\ V_3 & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_Z}\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & Z_{23} \\ V_3 & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}V_1 + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}V_2 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_Z}V_3 \qquad \textbf{(25)}$$

siendo:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{22} & Z_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(26)}$$

7.8.-IMPEDANCIA DE TRANSFERENCIA

Una tensión aplicada en una parte de un circuito provoca una corriente en todas las ramas del mismo. Por ejemplo, una fuente de tensión conectada a una red pasiva produce una corriente de salida en una parte del circuito donde se conectaría una impedancia de carga. Se dice entonces que el circuito tiene una impedancia de transferencia.

Consideremos el circuito pasivo de la Fig. 10, donde la fuente de tensión se ha denominado V_r y la corriente de salida I_s. La ecuación de la corriente de malla para I_s contienen solamente un término, el debido a V_r, en el determinante del numerador:

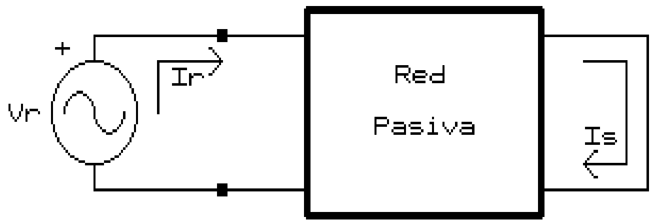

Figura 10

$$I_s = 0 \cdot \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_Z} \right) + \ldots + V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Z} \right) + \ldots \qquad \textbf{(27)}$$

La **impedancia de transferencia** es la relación entre V_r e I_s:

$$Z_{transfer,rs} \equiv \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}} \qquad \textbf{(28)}$$

Como la matriz de impedancias es simétrica (en ausencia de generadores dependientes), se tendrá que $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$, con lo cual:

$$Z_{transfer,rs} = Z_{transfer,sr} \qquad \textbf{(29)}$$

Esto expresa una importante propiedad de los circuitos lineales. Si una determinada tensión en una malla r produce una determinada elevación de corriente en una malla s, entonces la misma tensión en la malla s produce la misma corriente en la malla r (Teorema de reciprocidad).

Consideremos ahora el caso más general con n-mallas y con varias fuentes de tensión. La solución para la corriente de malla k puede escribirse en función de las impedancias de entrada y de transferencia:

$$I_k = \frac{V_1}{Z_{transfer,1k}} + \ldots + \frac{V_{k-1}}{Z_{transfer,(k-1)k}} + \frac{V_k}{Z_{input,k}} + \frac{V_{k+1}}{Z_{transfer,(k+1)k}} + \ldots + \frac{V_n}{Z_{transfer,nk}} \qquad \textbf{(30)}$$

Esta expresión no aporta nada nuevo matemáticamente, pero escrita en esta forma ilustra muy claramente el Principio de Superposición, poniendo de manifiesto cómo las impedancias controlan el efecto de las tensiones sobre una corriente de malla concreta. Si una determinada fuente se suprime y la corriente de malla se ve poco afectada, entonces es que la impedancia de transferencia es muy grande. La fuente V_k y las fuentes adyacentes a la malla k deberán contribuir de forma importante a la corriente I_k.