



Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos, Constanza Maturana
Fecha: 10 de Octubre

Pauta Control 3

- 1) Se desea resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-x} \quad (*)$$

Se quiere utilizar el método de Newton, pero se debe determinar el punto inicial x_0 . Lo que se sabe es que existe una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

Para calcular la solución del problema se propone la siguiente metodología:

- (a) Demuestre que existe una solución de la ecuación $(*)$ en el intervalo $[0, 1]$.
- (b) Encuentre la base modificada de Legendre $P_n^*(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, tal que mantenga la ortogonalidad.

n	0	1	2	3
$P_n(x)$	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$

Hint: Calcule los valores de $\int_0^1 (P_n^*(x))^2 dx$, $\forall n = 0, 1, \dots, 3$, utilizando los valores de

$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx$ y un cambio de variable adecuado. Recuerde que esta base es ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$.

- (c) Aproxime la ecuación no lineal $(*)$ a través de mínimos cuadrados, usando la base modificada de Legendre.
- (d) Aplique el método de Graeffe para calcular la solución de la ecuación aproximada en $[0, 1]$.
- (e) Defina como x_0 la solución de la ecuación aproximada. Ahora, calcule la solución de la ecuación $(*)$ aplicando el método de Newton, con un error de 10^{-3} .

Obs: Para calcular integrales sin primitiva conocida, use la regla de Simpson Compuesto con un n adecuado dependiendo del caso. Use 4 cifras significativas en los cálculos.

Solución

1. Se desea resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-x} \quad (*)$$

(a) Existencia de solución en $[0,1]$

Si definimos $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x}$, entonces las raíces de $f(x)$ son soluciones de $(*)$.

Veamos que $f(x)$ tiene una raíz en $[0,1]$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-1} \approx \frac{1}{6}(e^0 + 4 \times e^{-\frac{1}{8}} + e^{-\frac{1}{2}}) - e^{-1} \approx 0.4882 > 0$$

Por TVM $\Rightarrow \exists \bar{x} \in [0,1], f(\bar{x}) = 0$.

Aquí basta aproximar la integral con Simpson compuesto $n = 1$, ya que no se requiere mucho precisión y por la forma de $e^{-\frac{u^2}{2}}$ en $[0,1]$, que se aproxima bien con un polinomio cuadrático

(b) La base modificada de Legendre $P_n^*(x)$ en el intervalo $[0,1]$

$$I_{i,j} = \int_{-1}^1 P_j(x) P_m(x) dx, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \frac{x+1}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} dx$$

$$I_{i,j} = \int_0^1 P_j(2u-1) P_m(2u-1) 2du$$

$$\Rightarrow P_n^*(x) = P_n(2x-1), \quad n = 0 \dots 3, \text{ además, } \int_0^1 P_j^*(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2} I_{i,j}, \text{ luego}$$

n	0	1	2	3
$P_n^*(x)$	1	$2x-1$	$\frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1)$	$\frac{1}{2}(5(2x-1)^3-3(2x-1))$
$\int_{-1}^1 (P_n^*(x))^2 dx$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$

(c) Aproximación de la ecuación

Vamos a aproximar $f(x)$ por

$$p(x) = a + b(2x-1) + c \frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1) + d \frac{1}{2}(5(2x-1)^3-3(2x-1))$$

$$\min E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

Luego, como la base es ortogonal, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 P_0^*(x) f(x) dx \\ \int_0^1 P_1^*(x) f(x) dx \\ \int_0^1 P_2^*(x) f(x) dx \\ \int_0^1 P_3^*(x) f(x) dx \end{bmatrix}$$

Calculemos la integral del lado derecho. Para esto, vamos a calcular las integrales con la base usual, y luego usaremos estos resultados para calcular las integrales:

$$\text{i. } I_0 = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx - \int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx + e^{-1} - 1$$

$$e^{-1} - 1 \approx -0.6321$$

Aproximemos la primera integral: $\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Como sabemos que el x solo se va a mover en el intervalo $[0, 1]$, por la forma de $e^{-\frac{u^2}{2}}$, esta se puede aproximar bien con Simpson Compuesto $n = 1$

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \approx \frac{x}{6} \left(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

$$\text{Luego, } \int_0^1 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x \left(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

$$\int_0^1 x dx = 0.5$$

$$\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{8}} dx = \left(-4e^{-\frac{1}{8}x^2} \right) \Big|_0^1 = 4(1 - e^{-\frac{1}{8}}) \approx 0.4700$$

$$\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.3935$$

$$I_0 = \frac{1}{6} (0.5 + 4 \times 0.4700 + 0.3935) - 0.6321 \approx \frac{2.776}{6} - 0.6321 \approx 0.4627 - 0.6321$$

$$\Rightarrow I_0 \approx -0.1694$$

Obs: El valor real es $I_0 \approx -0.1699655$

$$\text{ii. } I_1 = \int_0^1 x \left(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 x \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx - \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx, \text{ haciendo } u = x, v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1, v = -e^{-x}$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1} \approx 0.2642$$

Por argumentos anteriores:

$$\int_0^1 x \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 \left(1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

Para $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} dx$ usamos Simpson:

$$\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} dx \approx \frac{1}{6} \left(0 + 4 \times \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{32}} + e^{-\frac{1}{8}} \right) = \frac{(e^{-\frac{1}{32}} + e^{-\frac{1}{8}})}{6} \approx \frac{1.852}{6} \approx 0.3087$$

Para $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ usamos Simpson:

$$\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{6} \left(0 + 4 \times \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{8}} + e^{-\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{1.489}{6} \approx 0.2482$$

$$I_1 \approx \frac{1}{6} (0.3333 + 4 \times 0.3087 + 0.2482) - 0.2642 \approx \frac{1.816}{6} - 0.2642 \approx 0.3027 - 0.2642$$

$$\Rightarrow I_1 \approx 0.0385$$

Obs: El valor real es $I_1 \approx 0.03902$

$$\text{iii. } I_2 = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 x^2 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx - \int_0^1 x^2 e^{-x} dx =$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx, \text{ haciendo } u = x^2, v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 2x, v = -e^{-x}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x e^{-x} dx - e^{-1}$$

De la parte anterior tenemos que $\int_0^1 x e^{-x} dx \approx 0.2642$, luego

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \approx 2 \times 0.2642 - e^{-1} \approx 0.5284 - 0.3679 = 0.1605$$

$$\int_0^1 x^2 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x^3 (1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = 0.25$$

Para $\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{8}} dx$, haciendo $u = x^2, v' = x e^{-\frac{x^2}{8}} \Rightarrow u' = 2x, v = -4e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$$\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{8}} dx = -x^2 4e^{-\frac{1}{8}x^2} \Big|_0^1 + 8 \int_0^1 x e^{-\frac{1}{8}x^2} dx = 8 \int_0^1 x e^{-\frac{1}{8}x^2} dx - 4e^{-\frac{1}{8}}$$

De la parte anterior tenemos que $\int_0^1 x e^{-\frac{1}{8}x^2} dx \approx 0.4700$

$$\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{8}} dx \approx 8 \times 0.4700 - 4 \times 0.8825 \approx 3.76 - 3.53 = 0.23$$

De forma similar, con $\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, u = x^2, v' = x e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = 2x, v = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2 \int_0^1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - e^{-\frac{1}{2}}$$

De la parte anterior, $\int_0^1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx 0.3935$

$$\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 2 \times 0.3935 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.787 - 0.6065 \approx 0.1805$$

$$I_2 \approx \frac{1}{6} (0.25 + 4 \times 0.23 + 0.1805) - 0.1605 \approx \frac{1.351}{6} - 0.1605 \approx 0.2252 - 0.1605$$

$$\Rightarrow I_2 \approx 0.0647$$

Obs: El valor real es $I_2 \approx 0.0644693$

$$\text{iv. } I_3 = \int_0^1 x^3 \left(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 x^3 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx - \int_0^1 x^3 e^{-x} dx$$

Para $\int_0^1 x^3 e^{-x} dx$, con $u = x^3, v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 3x^2, v = -e^{-x}$

$$\int_0^1 x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} \Big|_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

De la parte anterior, $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \approx 0.1605$

$$\int_0^1 x^3 e^{-x} dx \approx 3 \times 0.1605 - e^{-1} \approx 0.4815 - 0.3679 = 0.1136$$

$$\int_0^1 x^3 \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du dx \approx \frac{1}{6} \int_0^1 x^4 (1 + 4e^{-\frac{x^2}{8}} + e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = 0.2$$

Para $\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx$, haciendo $u = x^3$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{8}} \Rightarrow u' = 3x^2$, $v = -4e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$$\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx = -4x^3 e^{-\frac{1}{8}x^2} \Big|_0^1 + 12 \int_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{8}x^2} dx$$

Por la parte anterior, $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{8}x^2} dx \approx 0.3087$, luego

$$\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{8}} dx \approx 12 \times 0.3087 - 4 \times e^{-\frac{1}{8}} \approx 0.1744$$

De forma similar para $\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, haciendo $u = x^3$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = 3x^2$, $v =$

$$-e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Por la parte anterior, $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \approx 0.2482$, luego

$$\int_0^1 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 3 \times 0.2482 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.1381$$

$$I_3 \approx \frac{1}{6}(0.2 + 4 \times 0.1744 + 0.1381) - 0.1136 \approx \frac{1.146}{6} - 0.1136 \approx 0.191 - 0.1136 = 0.0774$$

Obs: El valor real es $I_3 \approx 0.0647895$

Finalmente:

$$\int_0^1 P_0^*(x)f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = I_0 = -0.1694$$

$$\int_0^1 P_1^*(x)f(x)dx = 2 \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx = 2I_1 - I_0 = 2 \times 0.0385 + 0.1694 = 0.2464$$

$$\int_0^1 P_2^*(x)f(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)f(x)dx = 6I_2 - 6I_1 + I_0$$

$$= 6 \times 0.0647 - 6 \times 0.0385 - 0.1694 = -0.0122$$

$$\int_0^1 P_3^*(x)f(x)dx = \int_0^1 (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)f(x)dx = 20I_3 - 30I_2 + 12I_1 - I_0$$

$$= 20 \times 0.0774 - 30 \times 0.0647 + 12 \times 0.0385 + 0.1694 = 0.2384$$

$$\Rightarrow p(x) = -0.1694 + 3 \times 0.2464(2x - 1) - 5 \times 0.0122(6x^2 - 6x + 1)$$

$$+ 7 \times 0.2384(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$$

$$\Rightarrow p(x) = 33.38x^3 - 50.43x^2 + 21.87x - 2.638$$

(d) Graeffe

Sabemos que las raíces de $p(x)$ son las mismas raíces que

$$p_0(x) = x^3 - \frac{50.43}{33.38}x^2 + \frac{21.87}{33.38}x - \frac{2.638}{33.38} = x^3 - 1.511x^2 + 0.6552x - 0.07903$$

$$\text{i. } p_0(x)p_0(-x) = (x^3 - 1.511x^2 + 0.6552x - 0.07903)(-x^3 - 1.511x^2 - 0.6552x - 0.07903)$$

$$p_1(x^2) = -x^6 + 0.9727x^4 - 0.1905x^2 + 0.006246$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } p_1(x)p_1(-x) &= (-x^3 + 0.9727x^2 - 0.1905x + 0.006246)(x^3 + 0.9727x^2 + 0.1905x + 0.006246) \\ p_2(x^2) &= -x^6 + 0.5651x^4 - 0.02414x^2 + 0.00003901 \end{aligned}$$

Luego,

$$x_1 \approx \sqrt[4]{0.5651} \approx 0.8670$$

$$x_2 \approx \sqrt[4]{\frac{0.02414}{0.5651}} \approx 0.4546$$

$$x_3 \approx \sqrt[4]{\frac{0.00003901}{0.02414}} \approx 0.2005$$

Evalutando en $p_0(x)$

$$p_0(x_1) = (0.8670)^3 - 1.511(0.8670)^2 + 0.6552(0.8670) - 0.07903 \approx 0.004941$$

$$p_0(x_2) = (0.4546)^3 - 1.511(0.4546)^2 + 0.6552(0.4546) - 0.07903 \approx 0.0005071$$

$$p_0(x_3) = (0.2005)^3 - 1.511(0.2005)^2 + 0.6552(0.2005) - 0.07903 \approx -0.0003448$$

(e) Newton

En las primeras iteraciones basta con Simpson Compuesto de $n = 1$

Llamando $x_0 = 0.2005$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\int_0^x e^{-\frac{u}{2}} du - e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}}$$

$$\text{i. } \int_0^{0.2005} e^{-\frac{u}{2}} du \approx \frac{0.2005}{6} (1 + 4e^{-\frac{(0.1003)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.2005)^2}{2}}) \approx 0.1992$$

$$g(x_0) = 0.2005 - \frac{0.1992 - e^{-0.2005}}{e^{-\frac{0.2005}{2}} + e^{-0.2005}} \approx 0.2005 + \frac{0.6191}{1.798} \approx 0.5448 = x_1$$

$$\text{ii. } \int_0^{0.5448} e^{-\frac{u}{2}} du \approx \frac{0.5448}{6} (1 + 4e^{-\frac{(0.2724)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.5448)^2}{2}}) \approx 0.5191$$

$$g(x_1) = 0.5448 - \frac{0.5191 - e^{-0.5448}}{e^{-\frac{0.5448}{2}} + e^{-0.5448}} \approx 0.5448 + \frac{6.086 \times 10^{-2}}{1.442} \approx 0.587 = x_2$$

$$\text{iii. } \int_0^{0.587} e^{-\frac{u}{2}} du \approx \frac{0.587}{6} (1 + 4e^{-\frac{(0.2935)^2}{2}} + e^{-\frac{(0.587)^2}{2}}) \approx 0.5550$$

$$g(x_2) = 0.587 - \frac{0.5550 - e^{-0.587}}{e^{-\frac{0.587}{2}} + e^{-0.587}} \approx 0.587 + \frac{9.928 \times 10^{-4}}{1.3978} \approx 0.5877 = x_3$$

iv. Para ver si $|f(x_3)| < 10^{-3}$, debemos calcular la integral con mayor precisión, luego

$$\int_0^{0.5877} e^{-\frac{u}{2}} du \approx \frac{0.5877}{12} (1 + 4e^{-\frac{0.147^2}{2}} + 2e^{-\frac{0.2939^2}{2}} + 4e^{-\frac{0.4408^2}{2}} + e^{-\frac{0.5877^2}{2}}) \approx 0.5555$$

$$f(x_3) = 0.5555 - e^{-0.5877} \approx 0.5555 - 0.5556 = -0.0001$$

$$\Rightarrow |f(x_3)| = 10^{-4} < 10^{-3}$$

Solución: $\bar{x} = 0.5877$