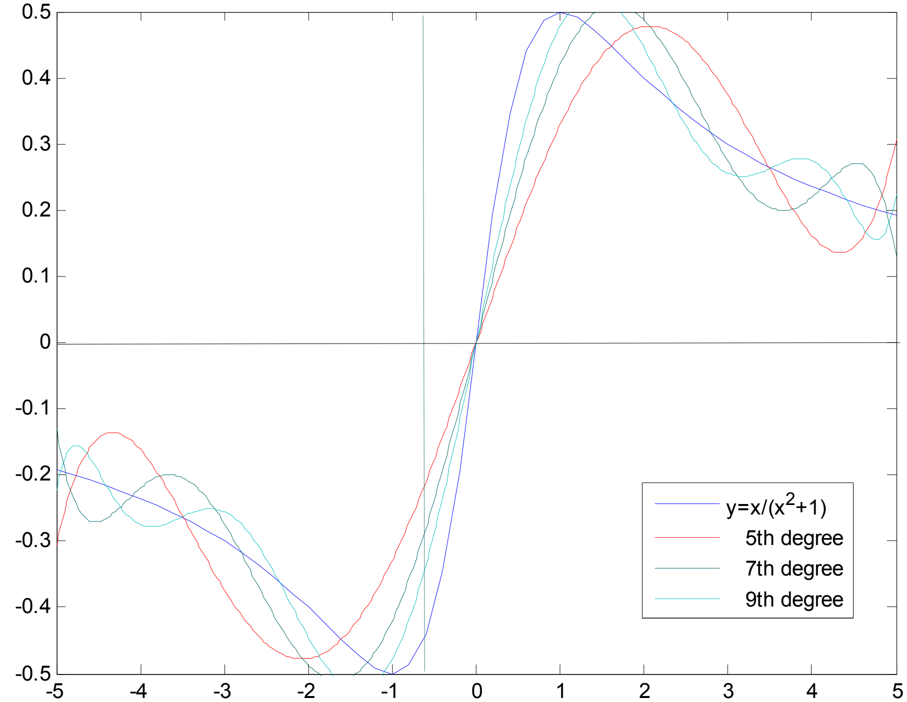
Universidad de Chile

Departamento de Ingeniería Matemática



MA-33A

Capítulo 3: Interpolación y Aproximación Funciones

Gonzalo Hernández

Interpolación y Aproximación de Funciones : Temario

1) Motivación
2) Interpolación de Lagrange, Newton, Hermite
3) Interpolación por Spline Cúbicos
4) Aproximación de Taylor
5) Aproximación por Mínimos Cuadrados: Discretos y Continuos
6) Interpolación y Aproximación Trigonométrica

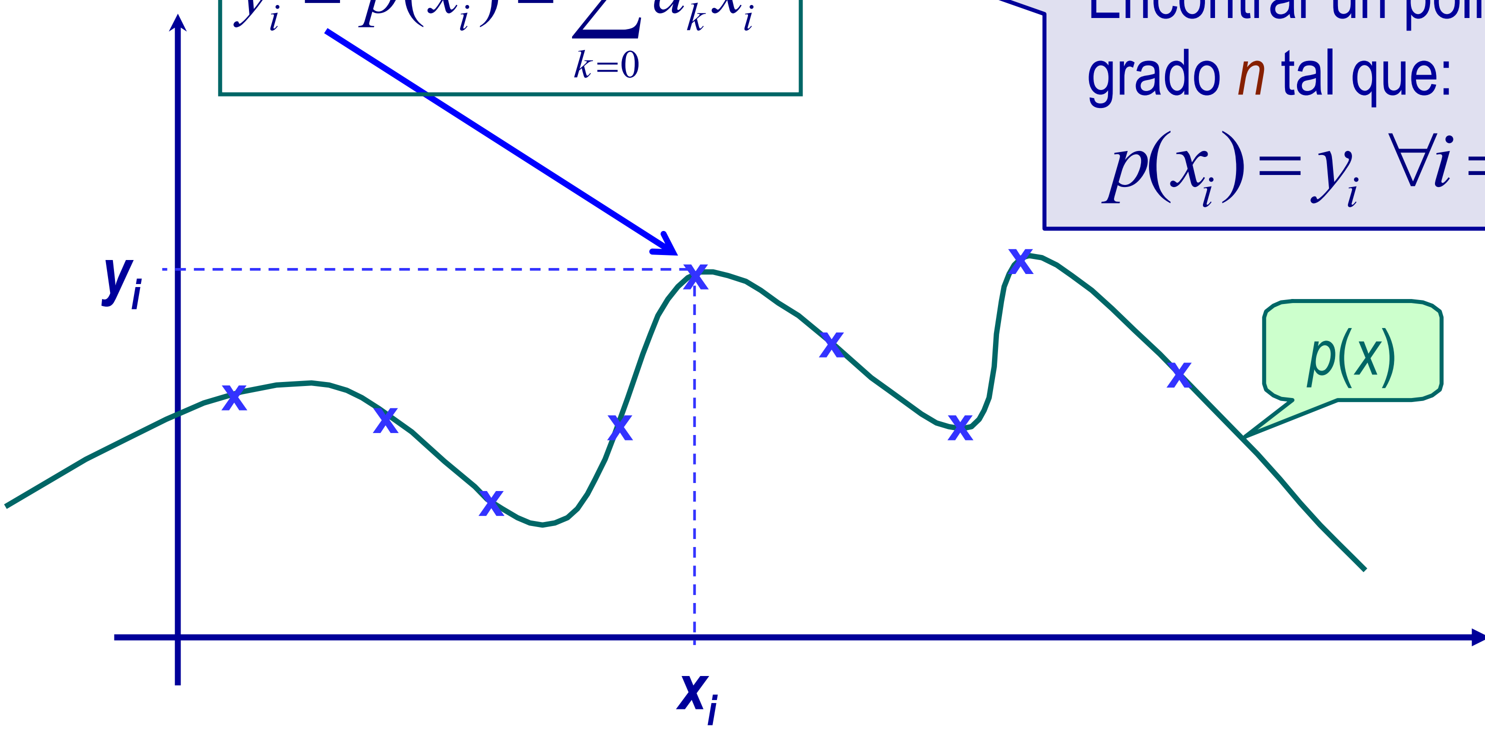
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial

$$y_i = p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k {x_i}^k$$

Dados (n+1) puntos (x_i, y_i)
Encontrar un polinomio de grado *n* tal que:

$$p(x_i) = y_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n+1$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

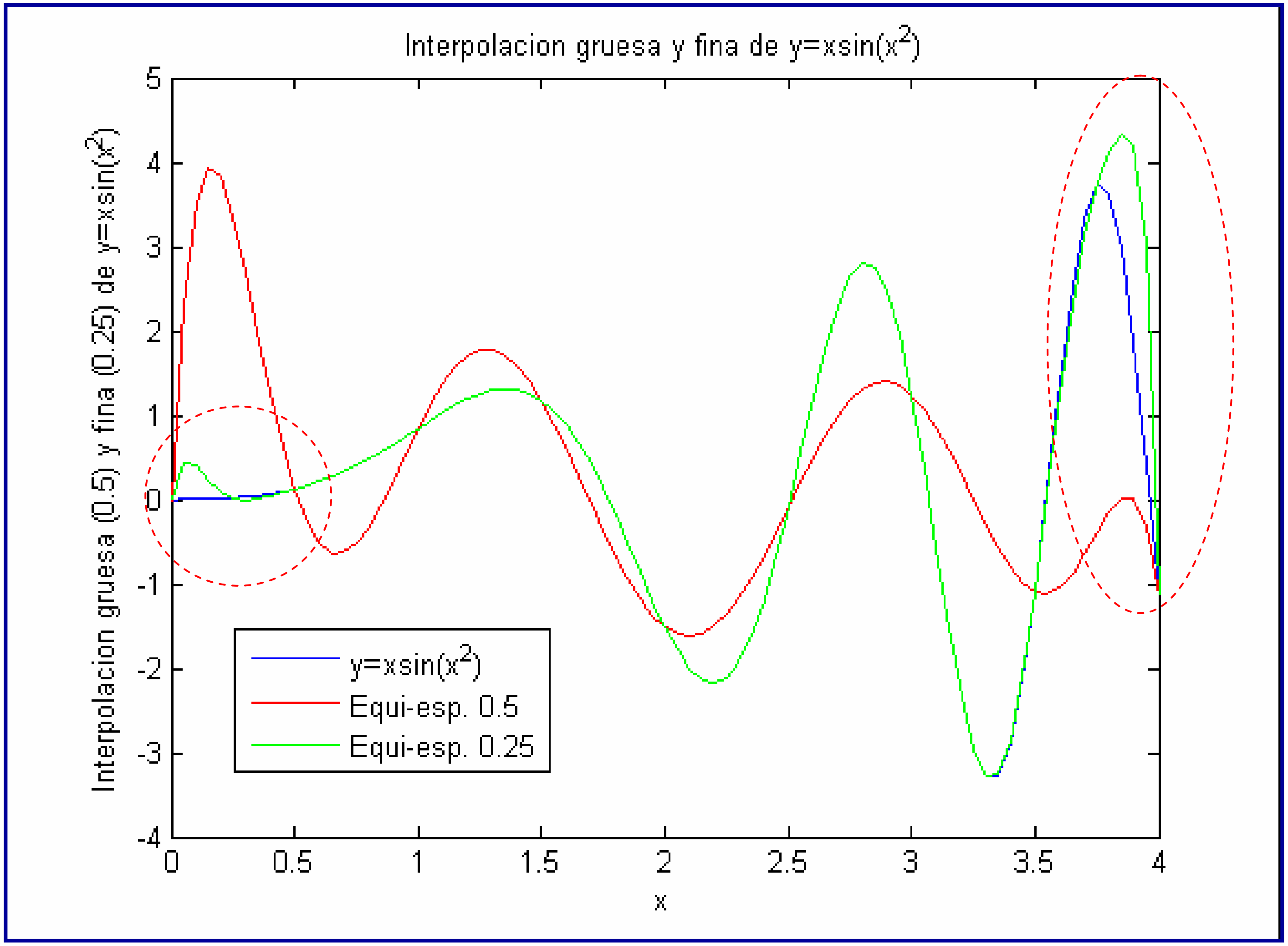
1) Motivación 1: Interpolación Polinomial

$$\boxed{\begin{aligned} y_i &= p(x_i)\ \forall i = 1,\ldots,(n+1) \\ y_i &= p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{\,k} \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

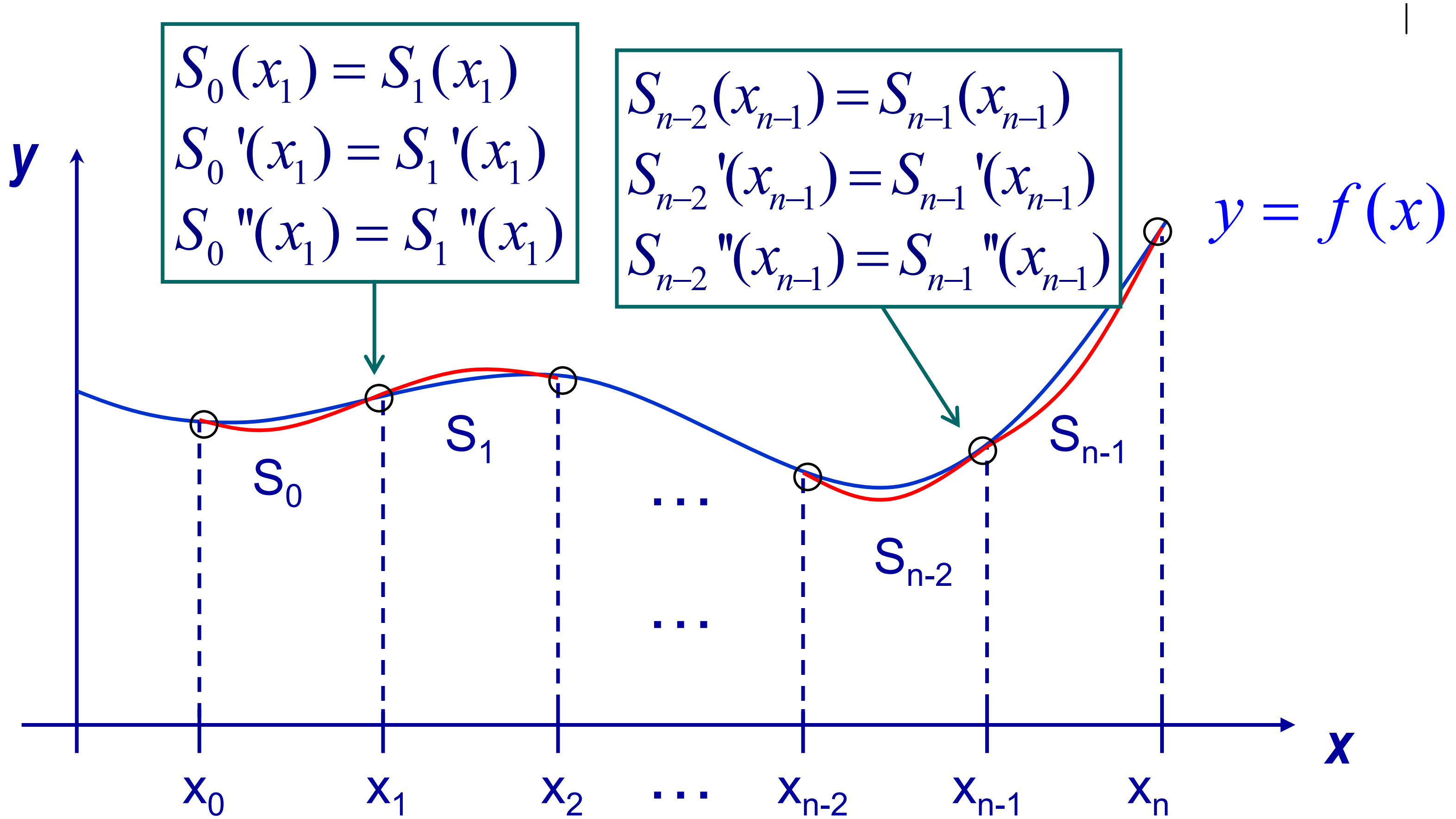
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación Polinomial



Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Motivación 1: Interpolación por Splines



$$\boxed{S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 2: Mínimos Cuadrados Contínuos

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MCC:

$$\boxed{\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b \left[f(x) - p_n(x)\right]^2 dx}$$

$$\boxed{\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}}$$

Matriz tipo Hilbert !

- Ecuaciones Normales:

coeficientes

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

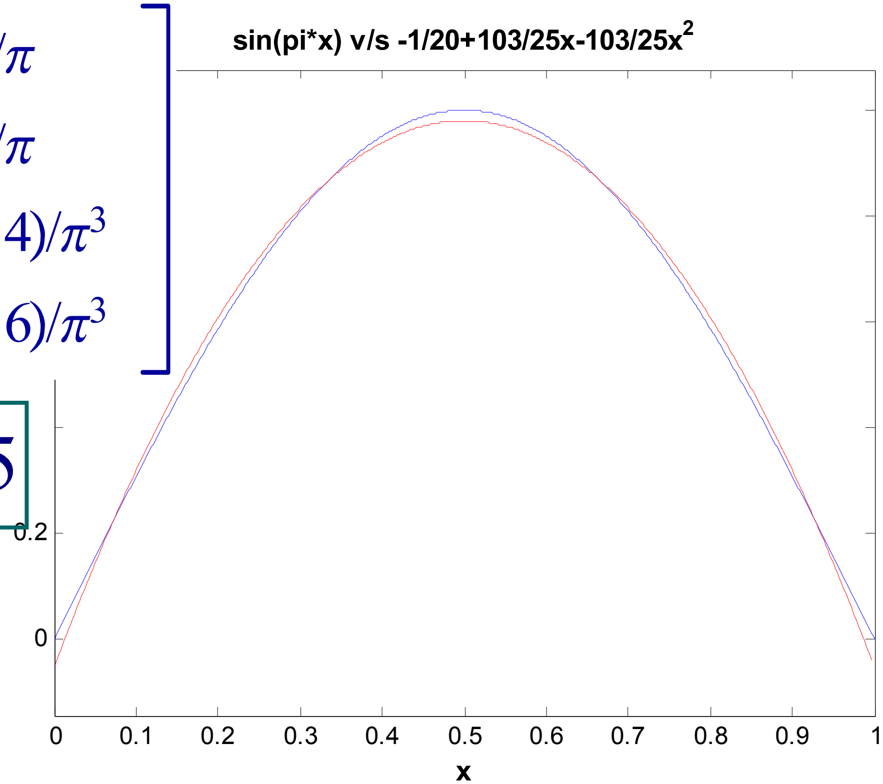
Interp. y Aprox. de Funciones:

1) Mot. 2: Mínimos Cuadrados Contínuos

- Sea $f(x) = \sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2 - 4)/\pi^3 \\ (\pi^2 - 6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05}$$



Interp. y Aprox. de Funciones:
2) Interpolación de Lagrange

- Teorema: Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son (n+1) puntos distintos y si f es una función que se evalúa en esos puntos $\Rightarrow \exists!$ polinomio de grado a lo más n que interpola f en estos puntos:

$$\boxed{p_L(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0,1,\ldots,n}$$

- Donde: $p_L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x)$

Interp. y Aprox. de Funciones:
2) Interpolación de Lagrange

- Y a su vez:

$$\boxed{L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}}$$

- Es fácil ver que:

$$L_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

- Error de interpolación Lagrange:

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange

- Teorema: Sean $x_0,x_1\ldots,x_n$ reales distintos en el intervalo [a,b] y $f \in \zeta^{n+1}[a,b]$

  Entonces: $\forall x \in [a,b] \exists \xi(x) \in (a,b)$ tal que

$$\boxed{f(x) = p_L(x) + R_L(x)}$$

Error Polinomio Lagrange

$$\boxed{R_L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
2) Interpolación de Lagrange: Ejercs.

- Determinar el polinomio de Lagrange de las siguientes funciones:

  $$f(x) = \cos(x), x\sin(x), xe^{x}, \ln(x^{2}+1), (1+x)^{1/3}$$

  en los puntos x = 0, 1, 2, 3, 4.

  Utilice este polinomio para evaluar:

  $$f(x) = -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5$$

  Obtenga una cota del error en [0,5].

  Determine error absoluto y relativo.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Lagrange: Ejercs.

- Para la función de error estadístico erf:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1) Determine el pol. de Taylor de orden 4.
2) Determine el pol. de Lagrange en x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, utilizando 1).
3) Determine cotas del error de estas aproximaciones.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite

- El polinomio osculante satisface:

  Dados:

  $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (n+1) reales distintos en [a,b]

  $m_0, m_1, \ldots, m_n$ (enteros no negativos)

  Si $f \in \zeta^m[a,b]\left(m = \max_{0 \le i \le n} m_i\right)$

  p(x) es el polinomio de menor grado tal que:

$$\boxed{\frac{d^k p}{dx^k}(x_i) = \frac{d^k f}{dx^k}(x_i) \quad \forall k = 0,\ldots,m_i \quad \forall i = 0,\ldots,n}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
2) Interpolación de Hermite

- Observación:
  1) Si $n = 0$ el polinomio osculante es el polinomio de Taylor
  2) Si $m_i = 0 \ \forall i=0,\ldots,n$, el polinomio osculante es el polinomio de Lagrange.
  3) Si $m_i = 1 \ \forall i=0,\ldots,n$, el polinomio osculante es el polinomio de Hermite.

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite

- Teorema: Si $f \in \zeta^m[a,b]$ y $x_0,x_1,\ldots,x_n$ son (n+1) reales distintos en [a,b], el único polinomio de grado a lo más (2n+1) que interpola f(x) y f'(x) en los puntos x_i es el polinomio de Hermite $H_{2n+1}(x)$ definido por:

$$\boxed{H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

2) Interpolación de Hermite

- Donde:

$$H_{nj}(x) = \left(1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x)\right)L^2_{n,j}(x)$$

$$\hat{H}_{nj}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$$

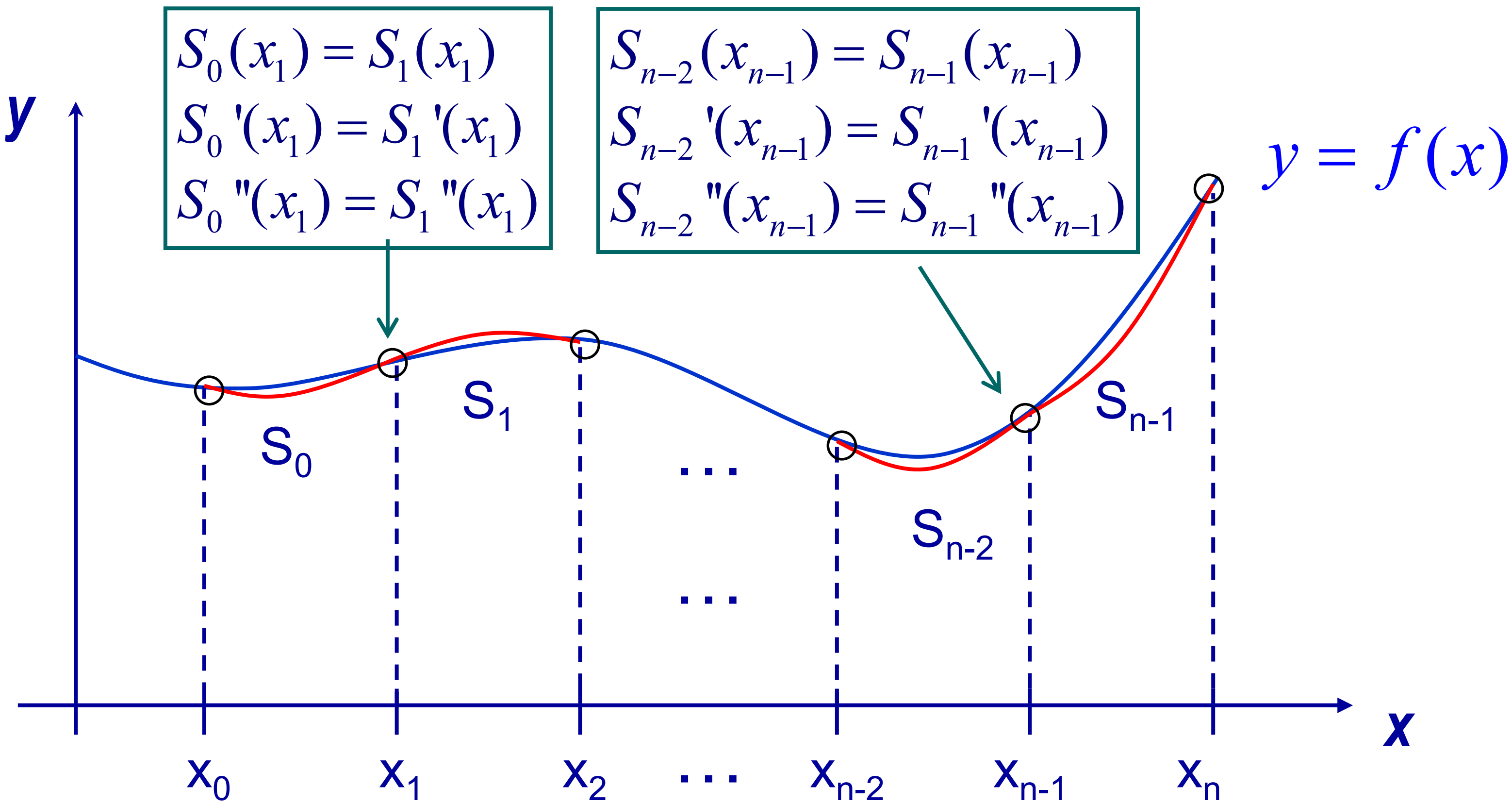
$L_{n,j}$: j-ésimo pol. de Lagrange de grado n.

- Si: $f \in \zeta^{2n+2}\left[a,b\right] \Rightarrow \forall x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b):$

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \ldots (x-x_n)^2}{(2n+2)} f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos



$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Dada una función f definida en [a,b] y (n+1) puntos $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$, el spline cúbico S de f satisface las siguientes condiciones :

a) S(x) es un polinomio cúbico en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ denotado por $S_j(x)$ para j=0,1,…,(n-1)

$$\begin{array}{ll}
S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x \in [x_0, x_1] \\
S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x \in [x_1, x_2] \\
\vdots & \vdots \\
S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3 & x \in [x_{n-1}, x_n]
\end{array}$$

n incógnitas

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

b) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ $\forall j=0,1,\ldots,(n-2)$: Continuidad

c) $S(x_j) = S_j(x_j) = f(x_j)$ $\forall j=0,1,\ldots,n$: Interpolación

d) $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$ $\forall j=0,1,\ldots,(n-2)$: Continuidad primera derivada

e) $S''_j(x_{j+1})=S''_{j+1}(x_{j+1})$ $\forall j=0,1,\ldots,(n-2)$: Continuidad segunda derivada

f) Condición de frontera:

i) $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (Frontera libre o natural)

ii) $S'(x_0)=f'(x_0)$ $S'(x_n)=f'(x_n)$ (Frontera sujeta)

Interp. y Aprox. de Funciones:
3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Para construir un spline cúbico de f se tiene que $\forall$j = 0,1,…,(n-1):

$$\boxed{S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3}$$

- Aplicando la condición c) $\forall$j = 0,1,…,(n-1):

$$\boxed{S_j(x_j)=a_j=f(x_j)\ \forall j=0,1,\ldots n}$$

$$a_{j+1}=S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})=$$
$$=a_j+b_j(x_{j+1}-x_j)+c_j(x_{j+1}-x_j)^2+d_j(x_{j+1}-x_j)^3$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Definimos: $\boxed{h_j = x_{j+1} - x_j \ \ \forall j = 0,1,\ldots,n-1}$
- Luego: $\boxed{a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3}$ 1
- Se define $b_n=S'(x_n)$ y $b_j=S'(x_j)$ $\forall j=0,1,\ldots,n-1$

  Aplicando la condición d) $\forall j=0,1,\ldots,n-1$:

  $\boxed{b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2}$ 2
- Se define $c_n=S''(x_n)/2$ y aplicando la cond. e):

  $\boxed{c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \ \ \forall j = 0,1,\ldots n-1}$ 3

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Despejando d_j de 3 y sustituyendo en 1 y 2 se obtienen las ecuaciones:

$$\boxed{a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \ \forall j = 0,1,\ldots,n-1} \quad (4)$$

$$\boxed{b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \ \forall j = 0,1,\ldots,n-1} \quad (5)$$

- Despejando b_j en 4: (También b_{j-1})

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \ \forall j = 0,1,\ldots,n-1} \quad (6)$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación por Splines Cúbicos

- Se obtiene el siguiente SEL $\forall$j=1,…,n-1: 7

$$\boxed{h_{j-1}c_{j-1}+2(h_{j-1}+h_j)c_j+h_jc_{j+1}=\frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{3}{h_{j-1}}(a_j-a_{j-1})}$$

- A estas ecuaciones se debe adicionar las condiciones de frontera: Libre o Sujeta
- Este sist. de ecs. tiene variables: $c_0,c_1,\ldots,c_n$
- ¿Tiene solución única 7 ?

Interp. y Aprox. de Funciones:
3) Interpolación Spline Cúbico Libre

- Teo: Si se define f en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, entonces f tendrá un único spline cúbico natural (libre) que cumple con las condiciones de frontera $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.
- La forma matricial de 7 es …
- Ejercicio: Determinar el spline cúbico libre de $f(x)=\sin(\pi x)$ en los puntos: 0, ¼ , ½, ¾, 1

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Libre

- Forma matricial Spline libre 7:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
3) Interpolación Spline Cúbico Libre

- Forma matricial Spline libre 7:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Vector Lado Derecho}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interp. Spline Cúbico Libre: Ejemplo

- Dados los puntos equiespaciados:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$y_0 = \sin(0) = 0, y_1 = \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1, y_3 = \sin(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = \sin(\pi) = 0$$

- Se deben calcular primero:

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{4} \qquad a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} - \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} \\ \frac{3(a_4-a_3)}{h_3} - \frac{3(a_3-a_2)}{h_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interp. Spline Cúbico Libre: Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.9706 \\ -7.0294 \\ -4.9706 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.6723 \\ -5.1933 \\ -3.6723 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1344 \\ 2.2164 \\ 0 \\ -2.2164 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.8963 \\ -2.0281 \\ 2.0281 \\ 4.8963 \end{bmatrix}$$

$$b_k = (a_{k+1} - a_k)\frac{1}{h_k} - (c_{k+1} + 2c_k)\frac{h_k}{3} \quad \forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad 6$$

$$d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad 3$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto

- Teo: Si se define f en $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, entonces f tendrá un único spline cúbico sujeto que cumple con las condiciones de frontera $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$.
- La forma matricial de 7 es …

- Ejercicio: Determinar el spline cúbico sujeto de $f(x)=\cos(\pi x)$ en los puntos: 0, ¼ , ½, ¾, 1

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto

- Forma matricial Spline sujeto 7 :

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto

- Forma matricial Spline Sujeto 7 :

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \\
\frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\
\frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\
\vdots \\
\frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\
3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})
\end{bmatrix}}_{\text{Vector Lado Derecho}}
\qquad
\underbrace{\begin{bmatrix}
c_0 \\
c_1 \\
\vdots \\
c_{n-1} \\
c_n
\end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}}
$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

3) Interpolación Spline Cúbico Sujeto

Sea $f \in C^4[a,b]$ con $\max\limits_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| = M$. Si S es la spline sujeta determinada en los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, entonces:

$$\boxed{\max_{a \le x \le b} |f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} \max_{0 \le j \le (n-1)} (x_{j+1} - x_j)^4}$$

Cota del Error SC Sujeta

Sea $g \in C^2[a,b]$ cualquier función que satisface las condiciones de interpolación sujetas en: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ para una función f:

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x_k) = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n \\ g'(x_0) = f'(x_0), g'(x_n) = f'(x_n) \end{array}}$$

Entonces, si S es la spline sujeta determinada en esos mismos puntos:

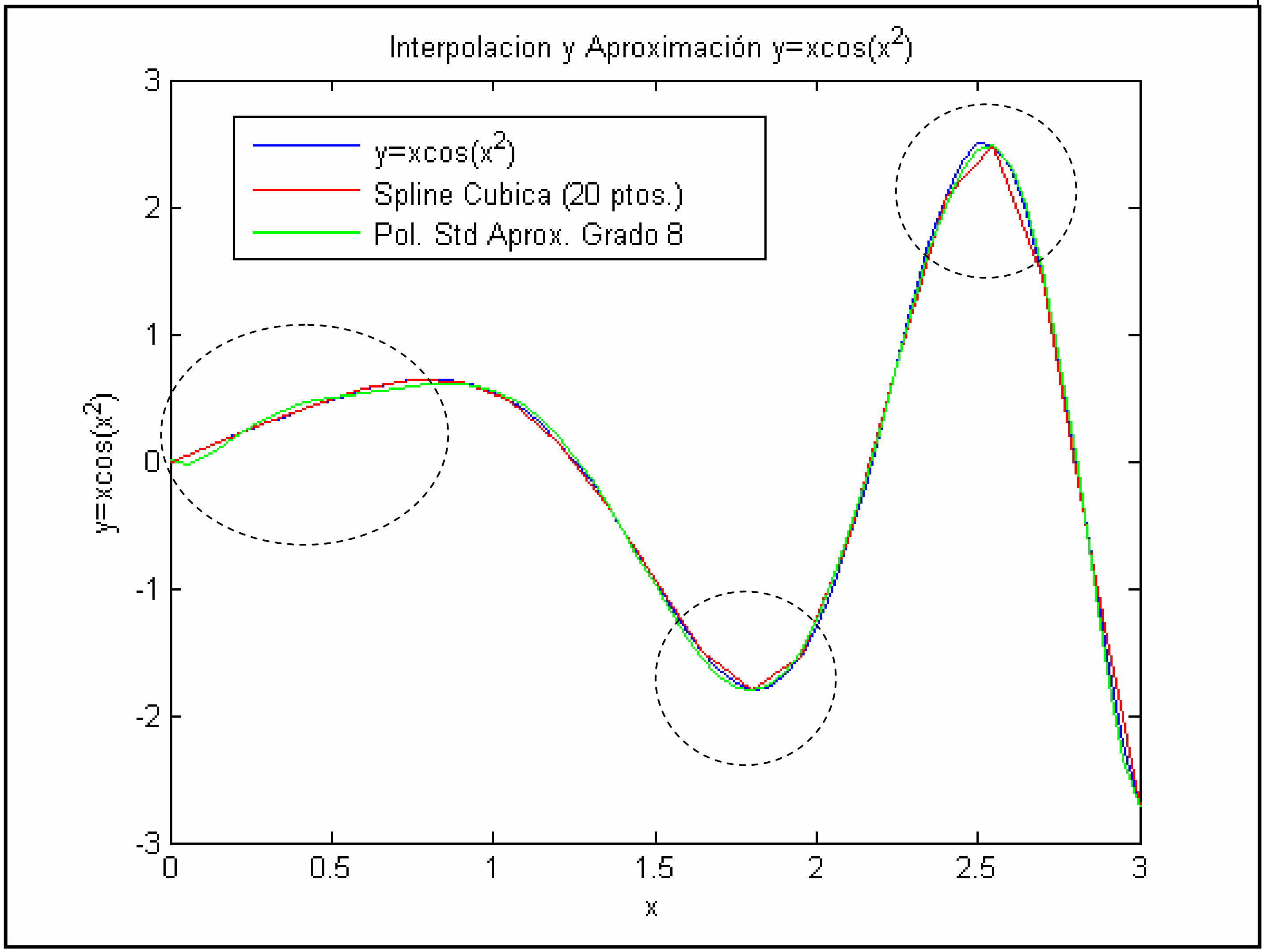
$$\boxed{\int_b^a |S(x)|^2 dx \le \int_b^a |g(x)|^2 dx}$$

Mínima Oscilación SC Sujeta

La spline sujeta S es la que oscila menos de todas las funciones "suaves" que interpolan a f

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Interpolación v/s Aproximación:

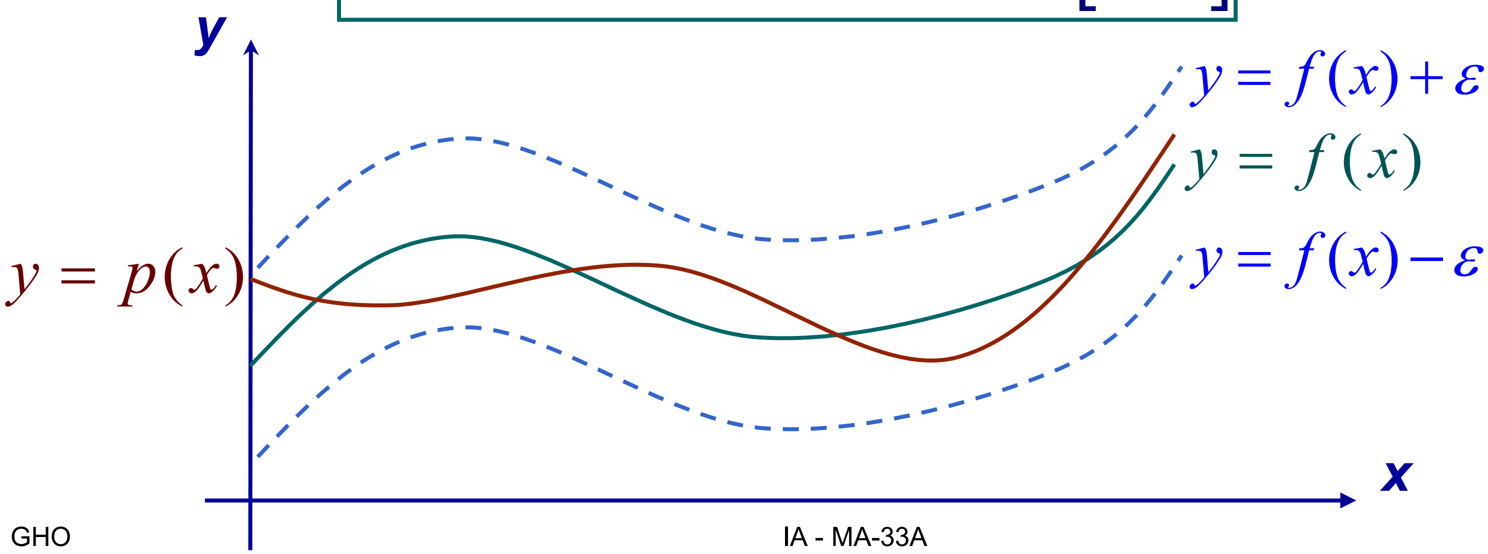


Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Resultado Teórico Básico

- Teorema de Aproximación de Weierstrass: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua: $(\forall\ \varepsilon > 0)\ \ (\exists\, p(x))$ polinomio tal que:

$$\boxed{|f(x)-p(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in[a,b]}$$



Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor:

- Teorema de Taylor: Suponga que:

$f \in \mathbb{C}^n[a,b], f^{(n+1)}$ existe en $[a,b], x_0 \in [a,b]$

Para cada $x \in [a,b]$ $\exists\ \xi(x)$ entre x y x_0 tal que:

$$\boxed{f(x) = p_n(x) + R_n(x)}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
4) Polinomio Taylor: Ejemplo 1

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	**2**	**2.5**	**2.666666**	**2.7083333**	**2.718281828**
0.5	**1.5**	**1.625**	**1.645833**	**1.6484375**	**1.6487212707**
0.3	**1.3**	**1.345**	**1.3495**	**1.3498375**	**1.34985880757**
0.1	**1.1**	**1.105**	**1.10516667**	**1.10517083**	**1.10517091807**
0.01	**1.01**	**1.01005**	**1.01005017**	**1.01005017**	**1.010050167**
0.001	**1.001**	**1.0010005**	**1.00100050000**	**1.00100050017**	**1.00100050016**

Interp. y Aprox. de Funciones:

4) Polinomio Taylor: Ejemplo 2

- Determine el polinomio de Taylor de quinto orden para la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

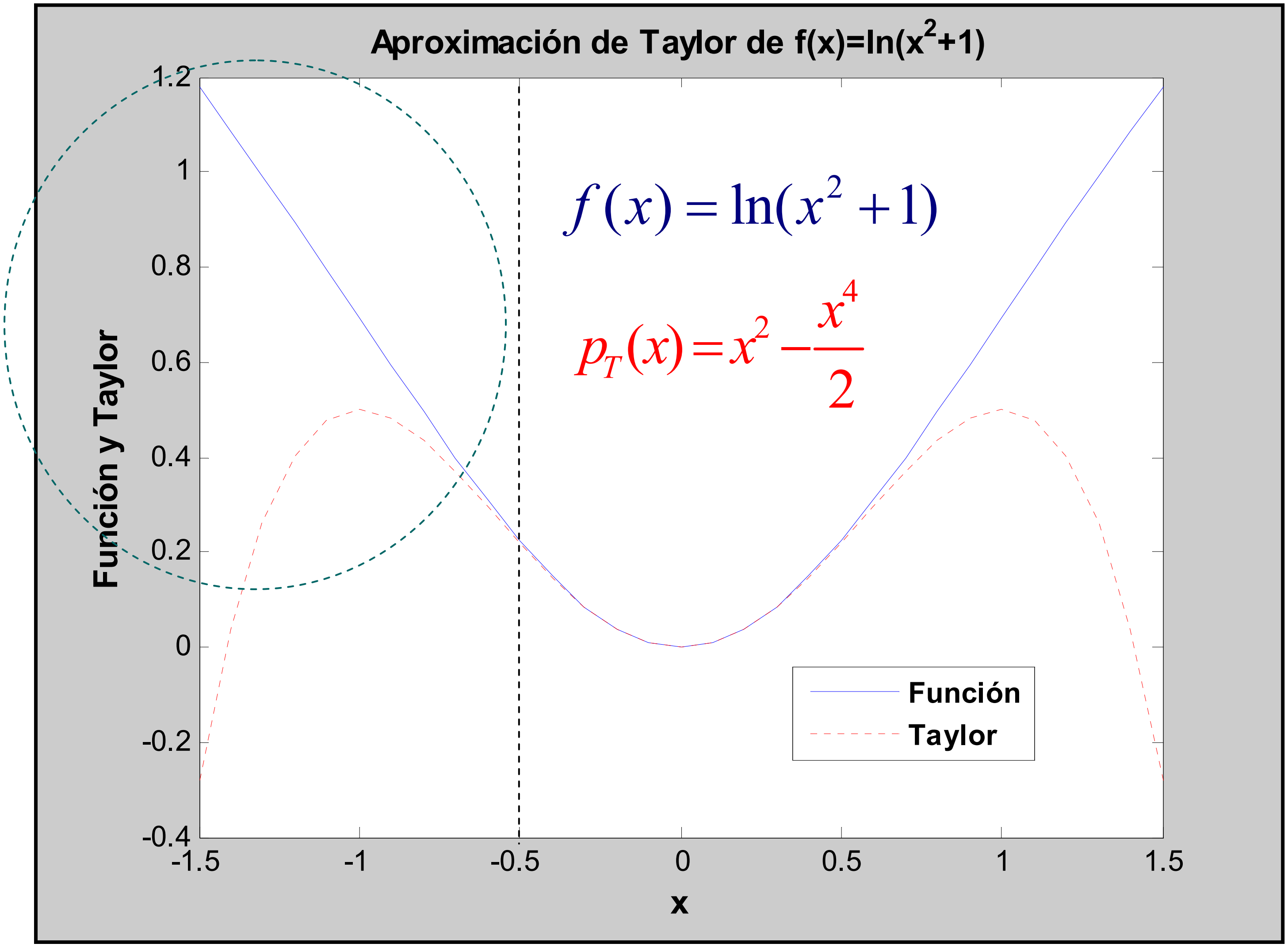
en torno a $x_0 = 0$

- Utilice estos polinomios que aproximan a f para calcular:

$$f(0.5), p_5(0.5) \text{ y } f(1.0), p_5(1.0)$$

- Cual es el error relativo ?

Interp. y Aprox. de Funciones:
4) Polinomio Taylor: Ejemplo 2



Interp. y Aprox. de Funciones:
4) Polinomio de Taylor: Ejercicios

- Ejemplos Polinomio de Taylor de f en torno a $x_0=0$:

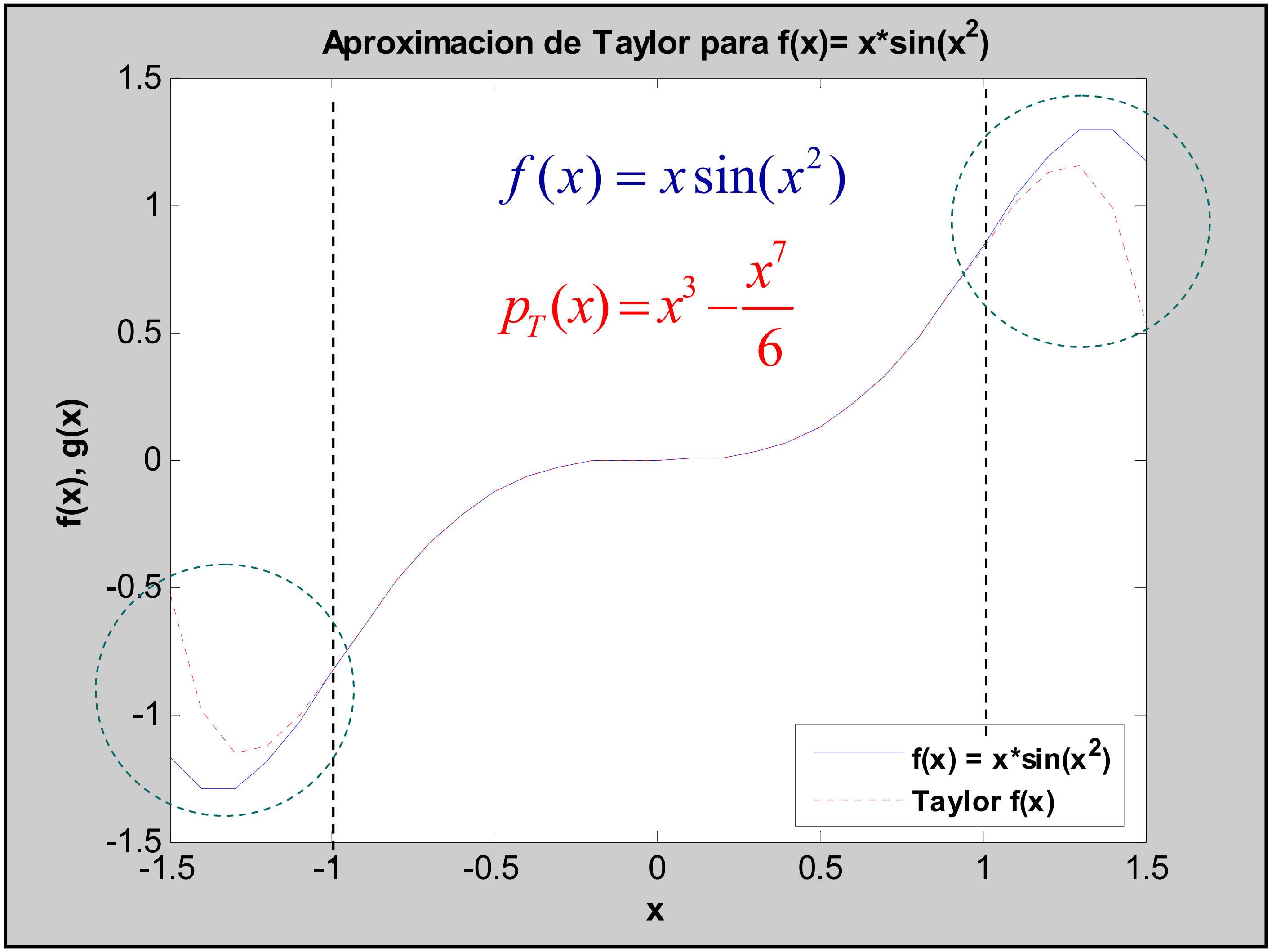
$$f(x) = \sin(x), \cos(x), \sin(x^2), x\sin(x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x) = \ln(x^2+1), x\ln(x^2+1)$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{(1+x)^m} \Rightarrow p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m+k-1}{k} x^k$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
4) Polinomio de Taylor: Ejercicios



Interp. y Aprox. de Funciones:
4) Polinomio de Taylor:

- El polinomio de Taylor no entrega una buena aproximación de una función en un intervalo.
- Si se quiere aproximar una función en un intervalo, se puede utilizar:

1) Interpolación o aproximación polinomial (Standard, Legendre, Chebyshev, etc)
2) Interpolación Aproximación Trigonométrica
3) Técnicas recientes

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Discreto

- Regresión Cuadrática y Cúbica:

$$\min \varepsilon_T = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 x_k^2)]^2$$

$$\min \varepsilon_T = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 x_k^2 + \beta_3 x_k^3)]^2$$

- Ecuaciones Normales: Sol. única para $x_i \neq$s

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \sum_{k=1}^{n} x_k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \sum_{k=1}^{n} x_k^4 & \sum_{k=1}^{n} x_k^5 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^3 & \sum_{k=1}^{n} x_k^4 & \sum_{k=1}^{n} x_k^5 & \sum_{k=1}^{n} x_k^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^3 y_k \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:
5) Aproximación Método MC Discreto

- Regresión Polinomial: (n < m–1)

$$\boxed{\min \varepsilon_T = \sum_{i=1}^{m}[y_i - p_n(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{m}\left[y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k\right]^2}$$

- Ecuaciones Normales: Sol. única para $x_i \neq$s

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \sum_{i=1}^m x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Standard MC Continuo

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar un polinomio $p_n(x)$ de grado n según MC:

$$\boxed{\min_{p_n(x)} \varepsilon_T = \int_a^b \left[f(x) - p_n(x) \right]^2 dx}$$

Matriz tipo Hilbert !

$$\boxed{\delta_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}}$$

i,j=0,…,n

- Ecuaciones Normales:

coeficientes

$$\begin{bmatrix} \int_a^b x^0 dx & \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^n dx \\ \int_a^b x^1 dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \cdots & \int_a^b x^{n+1} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^n dx & \int_a^b x^{n+1} dx & \int_a^b x^{n+2} dx & \cdots & \int_a^b x^{2n} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0 f(x) dx \\ \int_a^b x^1 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n f(x) dx \end{bmatrix}$$

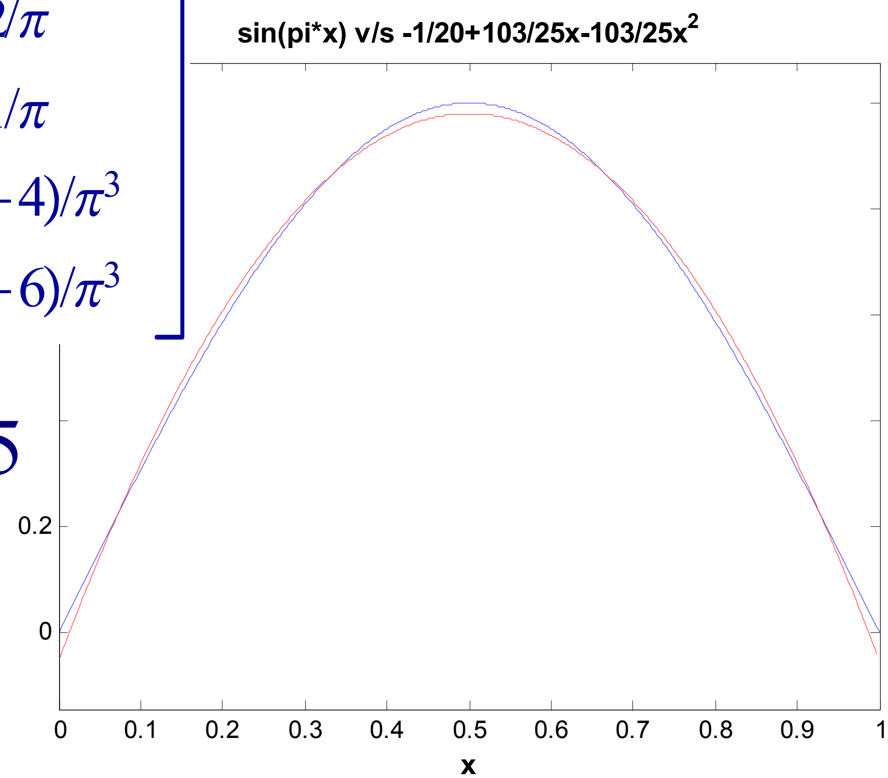
!

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aprox. Standard MC Continuo: Ejemplo

- Sea $f(x)=\sin(\pi x)$. Determinemos $p_3(x)$ polinomio de grado 3 según MC std. en [0,1]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2-4)/\pi^3 \\ (\pi^2-6)/\pi^3 \end{bmatrix}$$

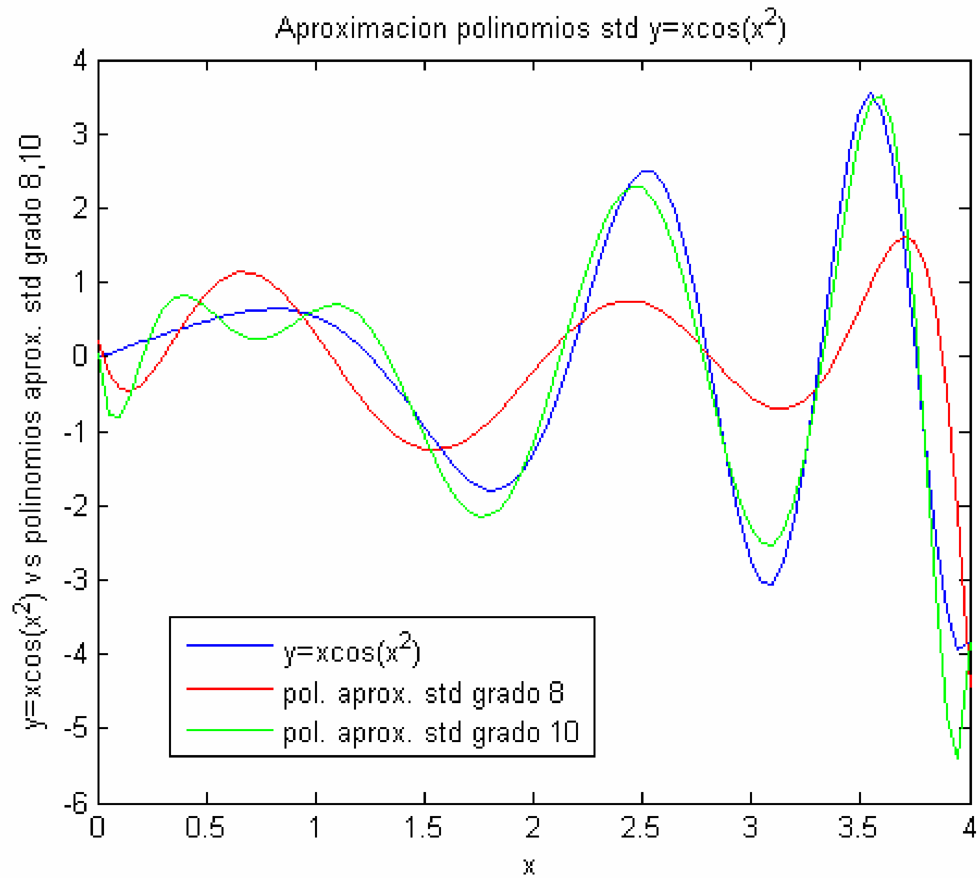


$$p_3(x) = -4.12x^2 + 4.12x - 0.05$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aprox. Standard MC Continuo: Ejemplo

- Sea $f(x) = x\cos(x^2)$. Polinomios de grado $p_{8,10}(x)$ 8,10 MC standard en [0,4]:



Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

- El conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es linealmente independiente en [a,b] si:

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

- Implica que: $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$

- Si ϕ_j es un polinomio de grado j $\forall$ j=0,…,n $\Rightarrow \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente para cualquier intervalo [a,b].

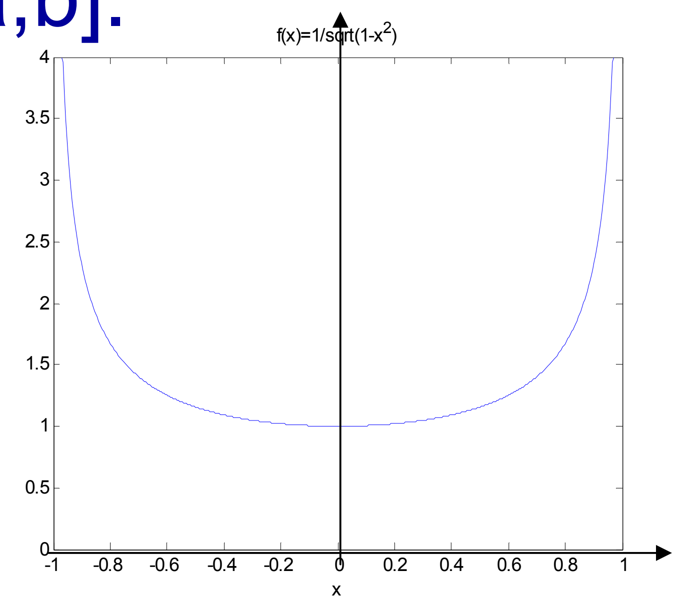
Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

- Una función $\omega(x)$ es una función de peso en [a,b] si $\omega(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ y $\omega(x) \neq 0$ en cualquier subintervalo de [a,b].

- Por ejemplo:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



- Sean $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ (n+1) funciones l.i en [a,b].

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

- Sea $f \in \zeta[a,b]$. Se quiere determinar una función $p(x)$ de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

$\phi_0, \ldots, \phi_n$ funciones l.i.

- que aproxime $f(x)$ según el criterio de MC para el peso $\omega(x)$:

$$\min_{a_0, \ldots, a_n} \varepsilon_T = \int_a^b \omega(x)[f(x) - p(x)]^2 dx$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

$$\boxed{\min_{a_0,\ldots,a_n} \varepsilon_T = \int_a^b \omega(x)\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \right]^2 dx}$$

$$\begin{bmatrix} \int_a^b (\omega\phi_0^2)(x)dx & \int_a^b (\omega\phi_0\phi_1)(x)dx & \cdots & \int_a^b (\omega\phi_0\phi_n)(x)dx \\ \int_a^b (\omega\phi_1\phi_0)(x)dx & \int_a^b (\omega\phi_1^2)(x)dx & \cdots & \int_a^b (\omega\phi_1\phi_n)(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b (\omega\phi_n\phi_0)(x)dx & \int_a^b (\omega\phi_n\phi_1)(x)dx & \cdots & \int_a^b (\omega\phi_n^2)(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b (\omega f\phi_0)(x)dx \\ \int_a^b (\omega f\phi_1)(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b (\omega f\phi_n)(x)dx \end{bmatrix}$$

- Si las funciones $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ son ortogonales con respecto a $\omega(x)$ en [a,b] se tiene que:

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

$$\boxed{\int_a^b (\omega\phi_j\phi_k)(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ \alpha_j \text{ si } j = k \end{cases}}$$

$$\boxed{\alpha_j = \int_a^b (\omega\phi_j^{\ 2})(x)dx > 0}$$

- En este caso, las ecuaciones normales quedan diagonales:

$$\begin{bmatrix} \int_a^b (\omega\phi_0^2)(x)dx & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_a^b (\omega\phi_1^2)(x)dx & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_a^b (\omega\phi_n^2)(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b (\omega f\phi_0)(x)dx \\ \int_a^b (\omega f\phi_1)(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b (\omega f\phi_n)(x)dx \end{bmatrix}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Método MC Continuo

- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ definidos recursivamente es ortogonal en [a,b] con respecto a la función de peso $\omega(x)$: **(cualquiera)**

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi_0(x) = 1 \quad \phi_1(x) = x - B_1 \\ \phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2 \end{array}}$$

$$\boxed{B_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\left[\phi_{k-1}(x)\right]^2 dx}{\int_a^b \omega(x)\left[\phi_{k-1}(x)\right]^2 dx} \qquad \mathrm{C}_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)dx}{\int_a^b \omega(x)\left[\phi_{k-2}(x)\right]^2 dx}}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de Legendre definidos recursivamente es ortogonal en [-1,1] c/r a la f. de peso $\omega(x)=1$:

$$\phi_0(x)=1 \quad \phi_1(x)=x-B_1$$
$$\phi_k(x)=(x-B_k)\phi_{k-1}(x)-C_k\phi_{k-2}(x) \quad \forall k\geq 2$$

$$B_k=\frac{\int_{-1}^{1} x\left[\phi_{k-1}(x)\right]^2 dx}{\int_{-1}^{1}\left[\phi_{k-1}(x)\right]^2 dx} \qquad C_k=\frac{\int_{-1}^{1} x\phi_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)dx}{\int_{-1}^{1}\left[\phi_{k-2}(x)\right]^2 dx}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

- Polinomios de Legendre $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$

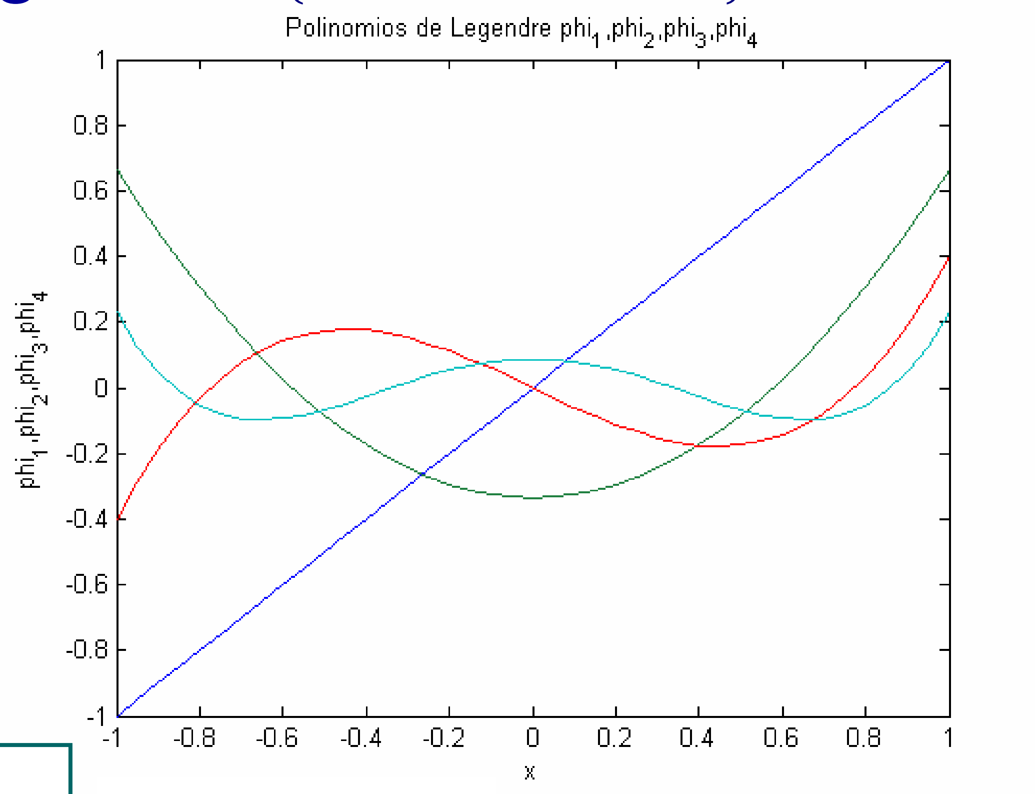
$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{3}$$

$$\phi_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{5}x$$

$$\phi_4(x) = x^4 - \tfrac{6}{7}x^2 + \tfrac{3}{35}$$



$$\phi_k(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2 - 1)^k\right]$$

Fórmula
De Rodrigues

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Legendre

- Teo: El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de Legendre definidos recursivamente es ortogonal en [-1,1] c/r a la f. de peso $\omega(x)=1$:

Gram Schmidt

$$\psi_0(x) = 1 \quad \psi_1(x) = x$$

$$\psi_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \psi_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\psi_{k+1}(x) = \left(\tfrac{2k+1}{k+1}\right) x\psi_k(x) - \left(\tfrac{k}{k+1}\right)\psi_{k-1}(x) \quad \forall k \geq 2$$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2 - 1)^k\right]$$

Fórmula De Rodrigues

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: El conjunto de polinomios $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ de Chebyshev definidos recursivamente es ortogonal en [-1,1] c/r a la f.p. $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$:

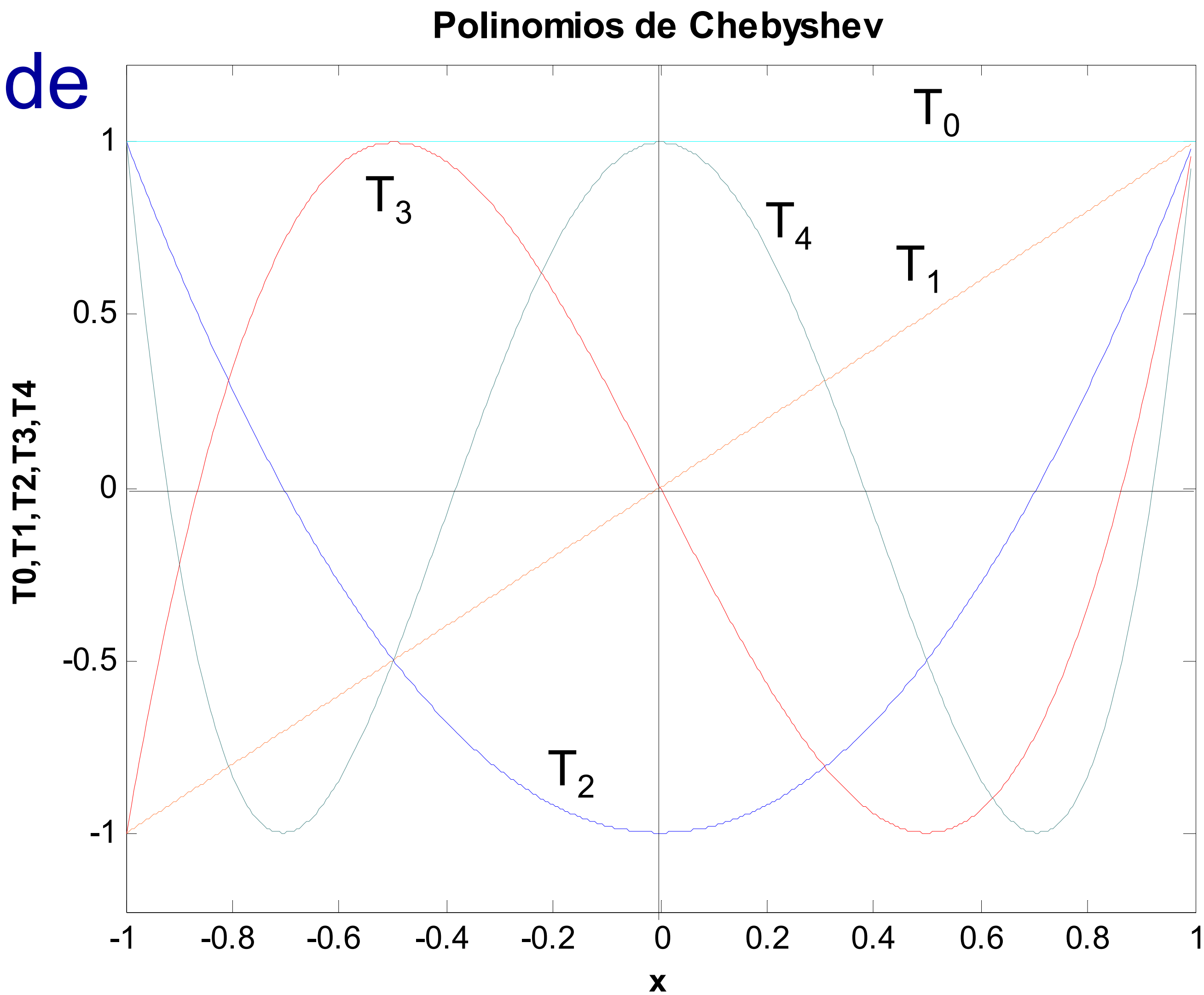
$$\boxed{\begin{array}{l} T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \forall k \geq 1 \end{array}}$$

- Se utilizan para ubicar los puntos interpolantes debido a que minimizan el error de interpolación de Lagrange

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

Polinomios de Chebyshev



Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: El polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ de grado n≥1 tiene n ceros simples en [-1,1] definidos por:

$$\boxed{\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1,2,\ldots,n}$$

- Adicionalmente $T_n(x)$ alcanza sus extremos en:

$$\boxed{\hat{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad T_n(\hat{x}_k) = (-1)^k \quad k = 0,1,2,\ldots,n}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Teo: Si $p_{L,C}(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n definido en los ceros del polinomio de Chebyshev $T_n(x)$, se tiene que:

$$\boxed{\max_{x\in[-1,1]}\left|f(x)-p_{L,C}(x)\right| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}$$

Para cualquier $f \in \zeta^{n+1}[-1,1]$

Interp. y Aprox. de Funciones:

5) Aproximación Polinomios de Chebyshev

- Ejemplo: Interpolación de $f(x) = xe^x$ en [0,1.5]

x	$f(x) = xe^x$	$p_L(x)$	$\lvert f(x) - p_L(x) \rvert$	$p_{L,C}(x)$	$\lvert f(x) - p^C{}_L(x) \rvert$
0.15	0.1743	0.1969	0.0226	0.1868	0.0125
0.35	0.4967	0.5121	0.0154	0.5064	0.0097
0.75	1.588	1.572	0.016	1.571	0.017
1.15	3.632	3.650	0.018	3.644	0.012
1.35	5.208	5.237	0.029	5.224	0.016

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Interpolación Trigonométrica

- Teorema de Interpolación Trigonométrica:

  Considere 2m puntos (x_j, y_j) j=0,1,…,2m-1,

  con: $x_j = -\pi + j\pi/m$ (dist. uniforme en [-π,π]).

  Dados los coeficientes:

  $a_k \quad \forall k = 0,\ldots,n \qquad b_k \quad \forall k = 1,\ldots,n-1$

  Se define la función de interpolación

$$\boxed{S_n(x_j) = a_0 + a_n \cos(nx_j) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j)\right)}$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Interpolación Trigonométrica

- Los coeficientes a_k, b_k que minimizan el error de interpolación trigonométrico :

$$\boxed{\min_{a_k, b_k} \varepsilon_T = \sum_{j=0}^{2m-1} \left[y_j - S_n(x_j) \right]^2}$$

- Están dados por:

$$a_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos(kx_j) \quad \forall k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin(kx_j) \quad \forall k = 1,2,\ldots,n-1$$

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aproximación Trigonométrica

- Teo: Las funciones $F_n = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ son orto-nales en [-π,π] para la función de peso $\omega(x) = 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{2} \\ \phi_k(x) &= \cos(kx) \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ \phi_{n+k}(x) &= \sin(kx) \quad k = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}}$$

- El conjunto de funciones generado por F_n se denomina polinomios trigonométricos Π_n

Interp. y Aprox. de Funciones:

6) Aproximación Trigonométrica

- Para una función $f \in \zeta[-\pi,\pi]$ la aproximación de mínimos cuadrados en $\prod_n$ es de la forma:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nx) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

- donde los coeficientes a_k, b_k están dados por:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

k=0,1,…,n

k=1,2,…,n-1

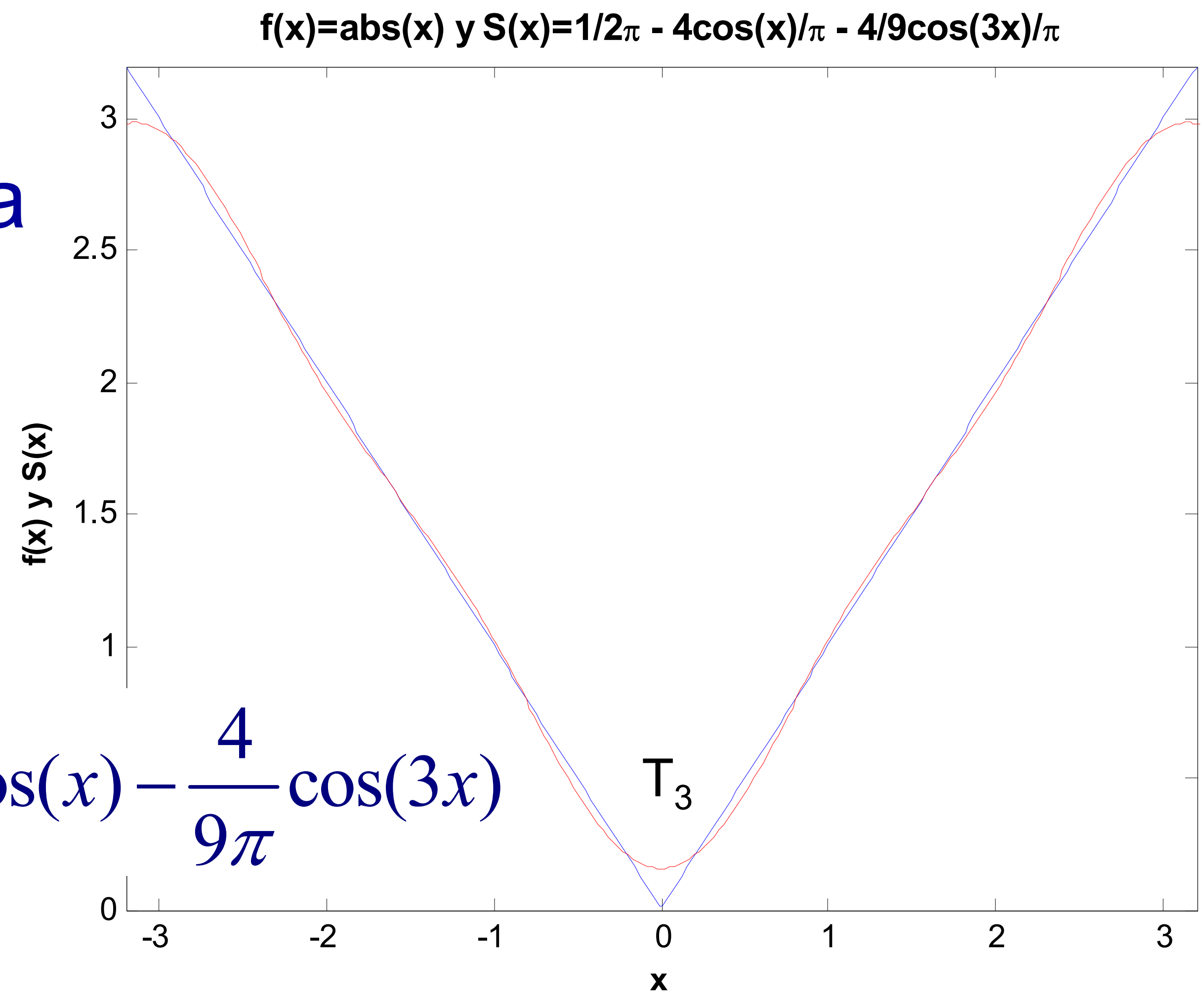
Interp. y Aprox. de Funciones:
6) Aproximación Trigonométrica

Aproximación trigonométrica de:

$$f(x) = |x|$$

$$x \in [-\pi, \pi]$$

$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x)$$



Interp. y Aprox. de Funciones:
6) Aprox. – Interp. Trigonométrica

- Ejercicios

1) Determine los polinomios trigonométricos continuos de $S_2(x)$ y $S_3(x)$ de x^2
2) Determine el polinomio trigonométrico continuo $S_n(x)$ de e^x
3) Determine el pol. trigonométrico discreto $S_3(x)$ de $f(x) = e^x\cos(x)$ para $m = 4$ en $[-\pi,\pi]$
4) Determine el pol. trigonométrico discreto $S_4(x)$ de $f(x)= x^2\sin(x)$ para $m = 5$ en $[0,1]$

Interp. y Aprox. de Funciones:
Bibliografía

1) R. Burden & J. D. Faires, Análisis Numérico, Séptima Edición, Thomson Learning, 2002.
2) J. Stoer & R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Springer, 1992.
3) G. Hernández: Apuntes de Cálculo Numérico 2007