Pauta Examen MA-33A-1

Dr. Gonzalo Hernández Oliva

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Se desea interpolar la funcion de dos variables $f(x,y) = \sin(\frac{\pi}{2}(x^2+y^2))$ y su gradiente $\nabla f(x,y)$, usando los puntos $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$. Para esto, siga los siguientes pasos:

   (a) Calcule el polinomio $p_0(x)$ que interpola la función $f(x,0)$ y a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$.

   (b) Calcule el polinomio $p_1(x)$ que interpola la función $f(x,1)$ y a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial x}$.

   (c) Calcule el polinomio $q_0(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}$

   (d) Calcule el polinomio $q_1(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial y}$

   (e) Calcule los polinomios $L_0(y)$ y $L_1(y)$ para los puntos $y_0 = 0,\ y_1 = 1$. A partir de $L_0(y)$ y $L_1(y)$, encuentre los polinomios de Hermite $H_0(y),\ \hat{H}_0(y),\ H_1(y)$ y $\hat{H}_1(y)$. ¿Cuales son sus propiedades?

   (f) Encuentre el polinomio $p(x,y)$, que interpola a $f(x,y)$ y su gradiente $\nabla f(x,y)$ en los puntos dados, es decir, $p(x,y) = f(x,y)$ y $\nabla p(x,y) = \nabla f(x,y),\ \forall x = x_0, x_1, x_2\ \forall y = y_0, y_1$.

   Hint: Suponga que $p(x,y) = \sum_{i=1}^{n} v(x)u(y)$, usando $p_j(x)$, $q_j(x)$, $H_j(y)$ y $\hat{H}_j(y)$, $j = 0,1$

2) Fugacidad f es el trabajo disponible en un proceso isotérmico. Para un gas ideal: $f(P) = P$, pero para gases reales se tiene que:

$$\ln\left(\frac{f(P)}{P}\right) = \int_0^P \frac{C(P)-1}{P} dP \tag{F}$$

donde la función $C(P)$ es el factor de compresibilidad, que se determinado experimentalmente.

   (a) Para el gas metano $C(P)$ varia cuadráticamente si $P \leq 10$ (P medido en $[atm]$): $C(0) = 1.00, C(1) = 0.99, C(10) = 0.94$. Calcule el polinomio cuadrático de interpolación.

   (b) Calcule $f(P = 10)$ utilizando (a) y la Regla de Simpson Compuesta con $h = 2.5$

   (c) Justifique el error obtenido..

3) La ecuación de Duffing se utiliza para modelar diferentes sistemas dinámicos (resortes, transformadores, etc). Su forma más general es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \delta\frac{dx(t)}{dt} + \left(\beta x^3(t) \pm \omega_0^2 x(t)\right) = \gamma\cos(\omega t + \phi) \tag{D}$$

donde las constantes $\delta, \beta, \gamma, \phi, \omega_0, \omega$ dependen del sistema bajo estudio. Para un transformador de fase nula se tiene que $\delta = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \phi = 0, \omega_0 = 1, \omega = \pi$ y $t \in [0,1]$.

   (a) Plantee el sistema de 2 edo no lineales asociado a (D)

   (b) Resuelva el sistema aplicando el Método RK de orden 2, para las condiciones iniciales: $x(0) = x_0 = 1, x'(0) = x'_0 = 0$. Considere $h = 0.5$.

Repuestas

1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \pi x \cos \frac{1}{2}\pi \left(x^2+y^2\right) \\ \pi y \cos \frac{1}{2}\pi \left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}$

(a) $p_0(x)$ interpola a $f(x,0) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2)$ y a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = \pi x \cos(\frac{\pi}{2}x^2)$

x	$f(x,0)$					
-1	1	0	$\frac{-1}{0+1} = -1$	$\frac{1+1}{0+1} = 2$	$\frac{0-2}{1+1} = -1$	0
-1	1	$\frac{0-1}{0+1} = -1$	$\frac{1}{0+1} = 1$	$\frac{1-1}{1+1} = 0$	$\frac{-2-0}{1+1} = -1$	
0	0	0	$\frac{1}{1-0} = 1$	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$		
0	0	1	$\frac{-1}{1-0} = -1$			
1	1	0				
1	1					

$\Longrightarrow p_0(x) = 1 + 0(x+1) - 1(x+1)^2 + 2(x+1)^2 x - 1(x+1)^2 x^2 = 2x^2 - x^4$

(b) $p_1(x)$ interpola a $f(x,1) = \sin(\frac{\pi}{2}(x^2+1))$ y a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial x} = \pi x \cos \frac{1}{2}\pi \left(x^2+1\right)$

x	$f(x,1)$					
-1	0	π	$\frac{1-\pi}{0+1} = 1-\pi$	$\frac{-1-1+\pi}{0+1} = \pi - 2$	$\frac{2-\pi}{1+1} = 1 - \frac{\pi}{2}$	0
-1	0	$\frac{1-0}{0+1} = 1$	$\frac{0-1}{0+1} = -1$	$\frac{-1+1}{1+1} = 0$	$\frac{2-\pi}{1+1} = 1 - \frac{\pi}{2}$	
0	1	0	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	$\frac{1-\pi+1}{1-0} = 2-\pi$		
0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{-\pi+1}{1-0} = 1-\pi$			
1	0	$-\pi$				
1	0					

$\Longrightarrow p_1(x) = 0 + \pi(x+1) + (1-\pi)(x+1)^2 + (\pi-2)(x+1)^2 x + (1-\frac{\pi}{2})(x+1)^2 x^2$

(c) $q_0(x)$ interpola a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \pi 0 \cos \frac{1}{2}\pi \left(x^2+0\right) = 0$

$\Longrightarrow q_0(x) = 0$

(d) $q_1(x)$ interpola a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial y} = \pi \cos \frac{1}{2}\pi \left(x^2+1\right)$

x	$\frac{\partial f(x,1)}{\partial y}$		
-1	$-\pi$	π	$\frac{-\pi-\pi}{1+1} = -\pi$
0	0	$-\pi$	
1	$-\pi$		

$\Longrightarrow q_1(x) = -\pi + \pi(x+1) - \pi(x+1)x$

(e) $L_0(y) = 1 - y$ polinomio de lagrange para $y = 0$

$L_1(y) = y$ polinomio de lagrange para $y = 1$

$H_0(y) = (1 - 2(y-0)(-1))\left(1-y\right)^2 = \left(1-y\right)^2(2y+1)$

$\hat{H}_0(y) = (y-0)\left(1-y\right)^2 = y\left(1-y\right)^2$

$H_1(y) = (1 - 2(y-1)(1))y^2 = y^2(3-2y)$

$\hat{H}_1(y) = (y-1)y^2 = y^2(y-1)$

Estos polinomios cumplen:

$H_j(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$

$\frac{dH_j(y_i)}{dy} = \{ \ 0 \quad \text{si} \quad j = i \ \vee \ j \neq i$

$\hat{H}_j(y_i) = \{ \ 0 \quad \text{si} \quad j = i \ \vee \ j \neq i$

$\frac{d\hat{H}_j(y_i)}{dy} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$

(f) Finalmente:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p_0(x)H_0(y) + p_1(x)H_1(y) + q_0(x)\hat{H}_0(y) + q_1(x)\hat{H}_1(y) \\ &= (2x^2 - x^4)(1-y)^2(2y+1) + \\ &\quad (\pi(x+1) + (1-\pi)(x+1)^2 + (\pi-2)(x+1)^2x + (1-\frac{\pi}{2})(x+1)^2x^2)y^2(3-2y) + \\ &\quad (-\pi + \pi(x+1) - \pi(x+1)x)y^2(y-1) \end{aligned}$$

2) Fugacidad

$$\ln\left(\frac{f(P)}{P}\right) = \int_0^P \frac{C(P)-1}{P}dP$$

(a) Polinomio cuadrático de interpolación.

$C(0) = 1.00,\ C(1) = 0.99,\ C(10) = 0.94.$

$C(P) = 1\frac{(P-1)(P-10)}{10} + \frac{99}{100}\frac{(P)(P-10)}{9} + \frac{94}{100}\frac{(P-1)(P)}{90} = \frac{248}{1125}P^2 - \frac{9947}{4500}P + 1 = 0.220\,44P^2 - 2.2104P + 1$

(b) Calcule $f(P=10)$ utilizando (a) y la Regla de Simpson Compuesta con $h = 2.5$.

El calculo exacto es:

$\ln\left(\frac{f(10)}{10}\right) = \int_0^{10}\frac{C(P)-1}{P}dP = \int_0^{10}\frac{\frac{248}{1125}P^2 - \frac{9947}{4500}P + 1 - 1}{P}dp = \int_0^{10}(\frac{248}{1125}P - \frac{9947}{4500})dP = -\frac{4987}{450} \Rightarrow f(10) = 10e^{-11.082}$

El calculo aproximado es:

$\int_0^{10}(\frac{248}{1125}p - \frac{9947}{4500})dp \approx \frac{2.5}{3}(g(0) + 4g(2.5) + 2g(5) + 4g(7.5) + g(10)) = \frac{2.5}{3}(\frac{248}{1125}(0 + 4\times 2.5 + 2\times 5 + 4\times 7.5 + 10) - 12\times\frac{9947}{4500})$

$= \frac{2.5}{3}(\frac{248}{1125}\times 60 - 12\times\frac{9947}{4500}) = \frac{2.5}{3}(\frac{992}{75} - \frac{9947}{375}) = -\frac{5}{6}\times\frac{4987}{375} = -\frac{4987}{450} \approx -11.082$

$\ln\left(\frac{f(10)}{10}\right) = -11.082 \Longrightarrow f(10) = 10e^{-11.082} = 0.000\,153\,868\,086\,005\,899\,727\,25$

(c) La Regla de Simpson es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

3) La ecuación de Duffing

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x^3(t) - x(t) = \cos(\pi t)$ para $t \in [0,1]$.

(a) Plantee el sistema de 2 edo no lineales asociado a (D):

Haciendo el cambio de variables:

$y_1(t) = x(t)$

$y_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

La ecuación queda de la forma:

$\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) + y_1^3(t) - y_1(t) = \cos(\pi t)$

Transformando la ecuación al sistema de 2 edo's:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1(t)}{dt} \\ \frac{dy_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ \cos(\pi t) + y_1(t) - y_2(t) - y_1^3(t) \end{bmatrix}$$

(b) Resuelva el sistema aplicando el Método RK de orden 2, para las condiciones iniciales: $x(0) = x_0 = 1, x'(0) = x'_0 = 0$. Considere $h = 0.5$.

Las iteraciones son:

i. $k = 0$

$t_0 = 0$

$y_{1,0} = x(0) = 1$

$y_{2,0} = x'(0) = 0$

$q_{1,0}^1 = hf_1(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 0.5 \times 0 = 0$

$q_{2,0}^1 = hf_2(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 0.5 \times (\cos(\pi 0) + 1 - 0 - 1) = 0.5$

$q_{1,0}^2 = hf_1(t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, y_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 0.5 \times \frac{0.5}{2} = 0.125$

$q_{2,0}^2 = hf_2(t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{q_{1,0}^1}{2}, y_{2,0} + \frac{q_{2,0}^1}{2}) = 0.5 \times (\cos(\pi \frac{0.5}{2}) + 1 - \frac{0.5}{2} - 1) = 0.228\,56$

Luego:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= y_{1,0} + q_{1,0}^2 = 1 + 0.125 = 1.125 \\ y_{2,1} &= y_{2,0} + q_{2,0}^2 = 0 + 0.228\,56 = 0.228\,56 \end{aligned}$$

ii. $k = 1$

$t_1 = 0.5$

$y_{1,1} = 1.125$

$y_{2,1} = 0.228\,56$

$q_{1,1}^1 = hf_1(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 0.5 \times 0.228\,56 = 0.114\,28$

$q_{2,1}^1 = hf_2(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 0.5 \times (\cos(\pi 0.5) + 1.125 - 0.228\,56 - 1.125^3) = 0.5 \times (0.896\,44 - 1.423\,8) = -0.263\,68$

$q_{1,1}^2 = hf_1(t_1 + \frac{h}{2}, y_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, y_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2}) = 0.228\,56 - \frac{0.263\,68}{2} = 0.096\,72$

$q_{2,1}^2 = hf_2(t_1 + \frac{h}{2}, y_{1,1} + \frac{q_{1,1}^1}{2}, y_{2,1} + \frac{q_{2,1}^1}{2}) = 0.5 \times (\cos(\pi 0.75) + (1.125 + \frac{0.114\,28}{2}) - (0.228\,56 - \frac{0.263\,68}{2}) - (1.125 + \frac{0.114\,28}{2})^3)$

$= 0.5 \times (-0.707\,11 + 1.182\,1 - 0.096\,72 - 1.182\,1^3) = 0.5 \times (0.378\,27 - 1.651\,8) = 0.5 \times (-1.273\,5) = -0.636\,75$

Luego:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= y_{1,1} + q_{1,1}^2 = 1.125 + 0.096\,72 = 1.221\,7 \\ y_{2,2} &= y_{2,1} + q_{2,1}^2 = 0.228\,56 - 0.636\,75 = -0.408\,19 \end{aligned}$$