Examen MA-33A-1

Dr. Gonzalo Hernández Oliva

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Se desea interpolar la funcion de dos variables $f(x,y) = \sin(\frac{\pi}{2}(x^2+y^2))$ y su gradiente $\nabla f(x,y)$, usando los puntos $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$. Para esto, siga los siguientes pasos:

   (a) Calcule el polinomio $p_0(x)$ que interpola la función $f(x,0)$ y a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$.

   (b) Calcule el polinomio $p_1(x)$ que interpola la función $f(x,1)$ y a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial x}$.

   (c) Calcule el polinomio $q_0(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}$

   (d) Calcule el polinomio $q_1(x)$ que interpola a $\frac{\partial f(x,1)}{\partial y}$

   (e) Calcule los polinomios $L_0(y)$ y $L_1(y)$ para los puntos $y_0 = 0,\ y_1 = 1$. A partir de $L_0(y)$ y $L_1(y)$, encuentre los polinomios de Hermite $H_0(y),\ \hat{H}_0(y),\ H_1(y)$ y $\hat{H}_1(y)$. ¿Cuales son sus propiedades?

   (f) Encuentre el polinomio $p(x,y)$, que interpola a $f(x,y)$ y su gradiente $\nabla f(x,y)$ en los puntos dados, es decir, $p(x,y) = f(x,y)$ y $\nabla p(x,y) = \nabla f(x,y),\ \forall x = x_0, x_1, x_2\ \forall y = y_0, y_1$.
   Hint: Suponga que $p(x,y) = \sum_{i=1}^{n} v(x)u(y)$, usando $p_j(x),\ q_j(x),\ H_j(y)$ y $\hat{H}_j(y),\ j = 0,1$

2) Fugacidad f es el trabajo disponible en un proceso isotérmico. Para un gas ideal: $f(P) = P$, pero para gases reales se tiene que:

$$\ln\left(\frac{f(P)}{P}\right) = \int_0^P \frac{C(P)-1}{P}\,dP \tag{F}$$

   donde la función $C(P)$ es el factor de compresibilidad que se determina experimentalmente.

   (a) Para el gas metano $C(P)$ varia cuadráticamente si $P \leq 10$ (P medido en $[atm]$): $C(0) = 1.00, C(1) = 0.99, C(10) = 0.94$. Calcule el polinomio cuadrático de interpolación.

   (b) Calcule $f(P = 10)$ utilizando (a) y la Regla de Simpson Compuesta con $h = 2.5$

   (c) Justifique el error obtenido.

3) La ecuación de Duffing se utiliza para modelar diferentes sistemas dinámicos (resortes, transformadores, etc). Su forma más general es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \delta\frac{dx(t)}{dt} + \left(\beta x^3(t) \pm \omega_0^2 x(t)\right) = \gamma\cos(\omega t + \phi) \tag{D}$$

   donde las constantes $\delta, \beta, \gamma, \phi, \omega_0, \omega$ dependen del sistema bajo estudio. Para un transformador de fase nula se tiene que $\delta = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \phi = 0, \omega_0 = 1, \omega = \pi$ y $t \in [0,1]$.

   (a) Plantee el sistema de 2 edo no lineales asociado a (D)

   (b) Resuelva el sistema aplicando el Método RK de orden 2, para las condiciones iniciales: $x(0) = x_0 = 1, x'(0) = x'_0 = 0$. Considere $h = 0.5$.