Pauta Control 2 MA-33A-1 2006-2

Profesor Dr. Gonzalo Hernandez - Auxiliar Gonzalo Rios

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Métodos Iterativos para SEL:

Coincidere un sistema $Ax = b$ de $n \times n$, con A definida positiva y tridiagonal.

(a) Determine el número de operaciones al aplicar al sistema el método de Gauss-Seidel, si se hicieron k_{GS} iteraciones.

Hint: Calcule de forma separada el número de operaciones para calcular $[diag(A) + low(A)]^{-1}, B, h$ y de cada iteración: $x^{k+1} = Bx^k + h$

(b) Determine el número de operaciones al aplicar el método de la potencia para calcular $\rho(T_G)$ el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel T_G, suponiendo que fueron necesarias k_p iteraciones.

(c) Determine el número máximo de iteraciones k_{SOR} del método SOR aplicado al sistema $Ax = b$, tomando $\overline{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_G)}}$ y calculando $\rho(T_G)$ con el método de la potencia usando k_p iteraciones, tal que el método SOR sea más eficiente que el método de Gauss-Seidel con k_{GS} iteraciones.

Solución:

(a) Operaciones Gauss-Seidel:

i. Calcular $[diag(A) + low(A)]^{-1}$

$$diag(A) + low(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & ... & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

primera fila: $0 \times 2 + 1$ ops

segunda fila: $1 \times 2 + 1$ ops

tercera fila: $2 \times 2 + 1$ ops

cuarta fila: $3 \times 2 + 1$ ops

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (2(k-1) + 1) = n^2$

ii. Calcular $B = -[diag(A) + low(A)]^{-1} [up(A)] \Longrightarrow n - 1$

iii. Calcular $h = [diag(A) + low(A)]^{-1} b \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$

iv. Iterar una vez $x^{k+1} = Bx^k + h \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 1) + (2(n-1) - 1) + n = n + n^2 - 2$

v. Método con k_{GS} iteraciones $\Longrightarrow n^2+n-1+n+n^2-2+ k_{GS}2n^2 = 2n^2(1+k_{GS})+2n-3$

(b) Operaciones Método de la Potencia

i. $y^m = T_G x^{(m-1)} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

ii. $x^m = \frac{y^m}{y^m_{p_m}} \Longrightarrow n$

iii. Con k_p iteraciones$\Longrightarrow k_p(\frac{n(n-1)}{2}+n) = k_p\frac{n(n+1)}{2}$

(c) Operaciones Método SOR

i. Plantear sistema $\Longrightarrow n^2+n-1+n+n^2-2+k_p\frac{n(n+1)}{2}+1 = 2(n^2+n-1)+k_p\frac{n(n+1)}{2}$

ii. Iterar $\Longrightarrow n+n^2-2+n+n+n = 4n+n^2-2$

iii. Con k_{SOR} iteraciones $\Longrightarrow\ 2(n^2+n-1)+k_p\frac{n(n+1)}{2}+k_{SOR}(4n+n^2-2)$

iv. Comparación con Gauss-Seidel

$2(n^2+n-1)+k_p\frac{n(n+1)}{2}+k_{SOR}(4n+n^2-2) \le 2n^2(1+k_{GS})+2n-3$

$\Longrightarrow k_{SOR} \le \frac{2n^2(1+k_{GS})+2n-3-\ 2(n^2+n-1)-k_p\frac{n(n+1)}{2}}{(4n+n^2-2)} = \frac{\left(2n^2(k_{GS}+1)-k_p\frac{n(n+1)}{2}-2n^2-1\right)}{4n+n^2-2}$

2) Interpolación Polinomial:

(a) Un spline cúbico sujeto S de la función f en el intervalo $[0,2]$ está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1+b_0x+2x^2-2x^3 & \text{si } x\in[0,1] \\ S_1(x) = 1+b_1(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3 & \text{si } x\in[1,2] \end{cases}$$

Aplicando las condiciones para determinar $S(x)$ obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

(b) Suponga que para interpolar una función f en los puntos x_0, x_1, x_2 se desea utilizar splines cuadráticas $S(x)$ definidas por: $S(x)$ es un polinomio cuadrático en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ dado por:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 \quad j = 0,1$$

i) Determine la cantidad de ecuaciones que se necesitan para obtener en forma única un spline cuadrático en los puntos x_0, x_1, x_2.

ii) Determine las condiciones y ecuaciones que debe satisfacer el spline cuadrático.

Solución:

(a) Un spline cúbico sujeto S

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1+b_0x+2x^2-2x^3 & \text{si } x\in[0,1] \\ S_1(x) = 1+b_1(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3 & \text{si } x\in[1,2] \end{cases}$$

aplicando las condiciones de $S(x)$:

i. continuidad: $S_0(1) = S_1(1)$

$1+b_0 = 1 \Longrightarrow b_0 = 0$

ii. continuidad de la derivada: $S_0'(1) = S_1'(1)$
$4 - 6 = b_1 - 8(1-1) + 21(1-1)^2 \Longrightarrow b_1 = -2$

Luego, como S es un spline cúbico sujeto:
$f'(0) = S'(0) = S_0'(0) = b_0 = 0$
$f'(2) = S'(2) = S_1'(2) = b_1 - 8(2-1) + 21(2-1)^2 = -2 - 8 + 21 = 11$

(b) Para interpolar una función f en los puntos x_0, x_1, x_2 con splines cuadráticas $S(x)$ definidas por: $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2$, si $[x_j, x_{j+1}]$

i) Como solo existen dos intervalo: $[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$, solo se necesitan 2 $S_j(x)$: $S_0(x)$ y $S_1(x)$, y como cada uno tiene 3 constantes que son incógnitas:
$S_0(x) : a_0,\ b_0,\ c_0$
$S_1(x) : a_1,\ b_1,\ c_1$
entonces, para encontrar estas 6 incógnitas, se necesitan 6 ecuaciones linealmente independientes.

ii) De forma análoga con la spline cúbica, la spline cuadrada debe cumplir:

A. Interpolar $x_0,\ x_1\ y\ x_2$
$S_0(x_0) = a_0 + b_0(x_0 - x_0) + c_0(x_0 - x_0)^2 = f(x_0)$
$S_0(x_1) = a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = f(x_1)$
$S_1(x_2) = a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = f(x_2)$

B. Continuidad: $S_0(x_1) = S_1(x_1)$
$a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = a_1 + b_1(x_1 - x_1) + c_1(x_1 - x_1)^2$

C. Continuidad de la derivada: $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$
$b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1)$

D. Continuidad de la 2° derivada:
$2c_0 = 2c_1$

El sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_0 - x_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (x_2 - x_1) & (x_2 - x_1)^2 \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(x_1 - x_0) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Interpolación y Aproximación por Mínimos Cuadrados:

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $p_L(x)$ de segundo grado. Calcule el error $E_L = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_L(x))^2 dx$

(b) Use los ceros del polinomio de Chebyshev $T_3(x)$ y las transformaciones del intervalo dado, y construya un polinomio interpolante $p_C(x)$ de segundo grado para $f(x)$ en $[x_0, x_2]$. Calcule el error $E_C = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_C(x))^2 dx$

(c) Se desea interpolar $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$. El polinomio resultante sería de grado n. Para aumentar la precisión a un bajo costo, se desea encontrar un polinomio $p(x)$ de grado $n+1$ tal que:

i) Interpole a $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$

ii) Minimice el error en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Este polinomio $p(x)$ tendrá la forma: $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$. Para determinarlo se puede resolver el problema de minimización con restricciones:

$$\min_{a_0, a_1, ..., a_{n+1}} \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx$$
$$s.a. : p(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, ..., n \tag{1}$$

Para resolver este problema $(*)$, se define el lagrangiano L según:

$$L(a_0, a_1, ..., a_{n+1}, b_0, b_1, ..., b_n) = \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx + \sum_{k=0}^{n} b_k (p(x_k) - f(x_k))$$

Entonces, la solución es equivalente a minimizar L respecto a los parámetros: $a_0, a_1, ..., a_{n+1}, b_0, b_1, ..., b_n$.

Aplique este método para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con los puntos $x_0 = 1$ y $x_2 = 4$. Calcule el error $E_P = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p(x))^2 dx$

(d) Los tres polinomios anteriores, $p_L(x)$, $p_C(x)$ y $p(x)$ son de segundo grado e interpolan y/o aproximan a $f(x) = \frac{1}{x}$. Compare los tres polinomios considerando:

i) Los errores totales en el intervalo $[x_0, x_2]$

ii) Los errores en los puntos $x_0,\ x_1,\ x_2$

iii) La cota superior de los errores para todo punto en el intervalo $[x_0, x_2]$

Concluya cual de los tres polinomios calculados anteriormente es mejor. Explique.

Solución:

(a) Polinomio de Lagrange

$f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}{4-1} = \frac{1}{8}$
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{4-2} = -\frac{1}{8}$	
2	4	$\frac{1}{4}$		

$p_L(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)(x-2) = \frac{7}{4} - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2$

$p_L(x) = \frac{7}{4} - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2$

(b) Polinomio de Chebyshev

Los ceros del $T_3(x)$ son:

$\bar{x}_1 = \cos(\frac{2*1-1}{2*3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{6}) = 0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76 \simeq 0.866$

$\bar{x}_2 = \cos(\frac{2*2-1}{2*3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\bar{x}_3 = \cos(\frac{2*3-1}{2*3}\pi) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -0.866\,025\,403\,784\,438\,646\,76 \simeq -0.866$

Debemos transformar el intervalo $[-1,1]$ a $[1,4]$

Largo $[-1,1] = 1+1 = 2$

Largo $[1,4] = 4-1 = 3$

$\frac{3}{2}[-1,1] = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

Trasladar $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ a $[1,4] \Longrightarrow$sumar $\frac{5}{2}$

$I(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x$

Calcular los puntos:

$\tilde{x}_1 = I(\bar{x}_1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}0.866 = 3.799 \simeq 3.8$

$\tilde{x}_2 = I(\bar{x}_2) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}0 = 2.5$

$\tilde{x}_3 = I(\bar{x}_3) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}0.866 = 1.201 \simeq 1.2$

Calcular $p_C(x)$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	3.8	$\frac{1}{3.8} \simeq 0.263$	$\frac{0.4-0.263}{2.5-3.8} = \frac{0.137}{-1.3} \simeq -0.105$	$\frac{-0.333+0.105}{1.2-3.8} = \frac{-0.228}{-2.6} \simeq 0.087\,7$
2	2.5	$\frac{1}{2.5} = 0.4$	$\frac{0.833-0.4}{1.2-2.5} = \frac{0.433}{-1.3} \simeq -0.333$	
3	1.2	$\frac{1}{1.2} \simeq 0.833$		

$p_C(x) = 0.263 - 0.105(x-3.8) + 0.087\,7(x-3.8)(x-2.5) = 0.087\,7x^2 - 0.657\,51x + 1.495\,15$

$\Longrightarrow p_C(x) = 0.087\,7x^2 - 0.657\,51x + 1.495\,15$

Obs: se podían aproximar los números finales también.

(c) Lagrangiano

i. $L(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1) = \int_1^4 (\frac{1}{x} - a_0 - a_1x - a_2x^2)^2 dx + b_0(a_0 + a_1 + a_2 - \frac{1}{1}) + b_1(a_0 + 4a_1 + 16a_2 - \frac{1}{4})$

ii. minimizar $L : \nabla L = \vec{0}$

A. $\frac{\partial L}{\partial a_0} = -2\int_1^4 (\frac{1}{x} - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right))dx + b_0 + b_1 = 0$

$-2\left[\ln 4 - 3a_0 - \frac{16-1}{2}a_1 - \frac{64-1}{3}a_2\right] + b_0 + b_1 = 0$

$6a_0 + 15a_1 + 42a_2 + b_0 + b_1 = 2\ln 4$

B. $\frac{\partial L}{\partial a_1} = -2\int_1^4 x(\frac{1}{x} - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right))dx + b_0 + 4b_1 = 0$

$-2\left[3 - \frac{16-1}{2}a_0 - \frac{64-1}{3}a_1 - \frac{256-1}{4}a_2\right] + b_0 + 4b_1 = 0$

$15a_0 + 42a_1 + \frac{255}{2}a_2 + b_0 + 4b_1 = 6$

C. $\frac{\partial L}{\partial a_2} = -2\int_1^4 x^2(\frac{1}{x} - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right))dx + b_0 + 16b_1 =$

$= 0 - 2\left[\frac{16-1}{2} - \frac{64-1}{3}a_0 - \frac{256-1}{4}a_1 - \frac{1024-1}{5}a_2\right] + b_0 + 16b_1 = 0$

$42a_0 + \frac{255}{2}a_1 + \frac{2046}{5}a_2 + b_0 + 16b_1 = 15$

D. $\frac{\partial L}{\partial b_0} = a_0 + a_1 + a_2 - 1 = 0$

$a_0 + a_1 + a_2 = 1$

E. $\frac{\partial L}{\partial b_1} = a_0 + 4a_1 + 16a_2 - \frac{1}{4} = 0$
$a_0 + 4a_1 + 16a_2 = \frac{1}{4}$

iii. Sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Forma alternativa: otra forma de construir el sistema era darse cuenta que la comatriz superior de $3x3$ correspondia a la misma que la de mínimos cuadrados con base $\{1, x, x^2\}$ que es:

$$A_{3\times 3} = 2 \begin{bmatrix} \int_1^4 dx & \int_1^4 xdx & \int_1^4 x^2dx \\ \int_1^4 xdx & \int_1^4 x^2dx & \int_1^4 x^3dx \\ \int_1^4 x^2dx & \int_1^4 x^3dx & \int_1^4 x^4dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} \end{bmatrix}$$

$$b_3 = 2 \begin{bmatrix} \int_1^4 \frac{1}{x}dx \\ \int_1^4 dx \\ \int_1^4 xdx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ln 4 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Luego, las dos filas de abajo eran las 2 restricciones de interpolación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

y como la matriz era simétrica, se obtenia:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

iv. Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ln 4 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{6} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{42}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 15 & 42 & \frac{255}{2} & 1 & 4 & 6 \\ 42 & \frac{255}{2} & \frac{2046}{5} & 1 & 16 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & \frac{45}{2} & \frac{576}{5} & -6 & 9 & -14\ln 4 + 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -6 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\ln 4 + 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 9 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\ln 4 + \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{45}{2}}{\frac{9}{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & \frac{45}{2} & \frac{576}{5} & -6 & 9 & -14\ln 4 + 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -6 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\ln 4 + 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 9 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\ln 4 + \frac{1}{4} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11\ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2\ln 4 + 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\ln 4 - \frac{7}{4} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{10}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{10}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11\ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2\ln 4 + 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\ln 4 - \frac{7}{4} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11\ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{73}{9}\ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{43}{9}\ln 4 + \frac{79}{12} \end{bmatrix}
$$

v. $$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11\ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{73}{9}\ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{43}{9}\ln 4 + \frac{79}{12} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 42 & 1 & 1 & 2\ln 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{45}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -5\ln 4 + 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 11\ln 4 - 15 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{73}{9}\ln 4 + \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{56}{27}\ln 4 + \frac{101}{36} \end{bmatrix}
$$

$b_1 = \frac{-\frac{56}{27}\ln 4 + \frac{101}{36}}{-\frac{4}{3}} = \frac{14}{9}\ln 4 - \frac{101}{48}$

$b_0 = \frac{-\frac{73}{9}\ln 4 + \frac{34}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{14}{9}\ln 4 - \frac{101}{48}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{44}{9}\ln 4 - \frac{329}{48}$

$a_2 = \frac{11\ln 4 - 15 - \frac{3}{2}(\frac{14}{9}\ln 4 - \frac{101}{48} + \frac{44}{9}\ln 4 - \frac{329}{48})}{\frac{27}{10}} = \frac{40}{81}\ln 4 - \frac{125}{216}$

$a_1 = \frac{-5\ln 4 + 6 - \frac{45}{2}(\frac{40}{81}\ln 4 - \frac{125}{216}) + \frac{3}{2}\left(\frac{44}{9}\ln 4 - \frac{329}{48}\right) - \frac{3}{2}(\frac{14}{9}\ln 4 - \frac{101}{48})}{\frac{9}{2}} = \frac{571}{216} - \frac{200}{81}\ln 4$

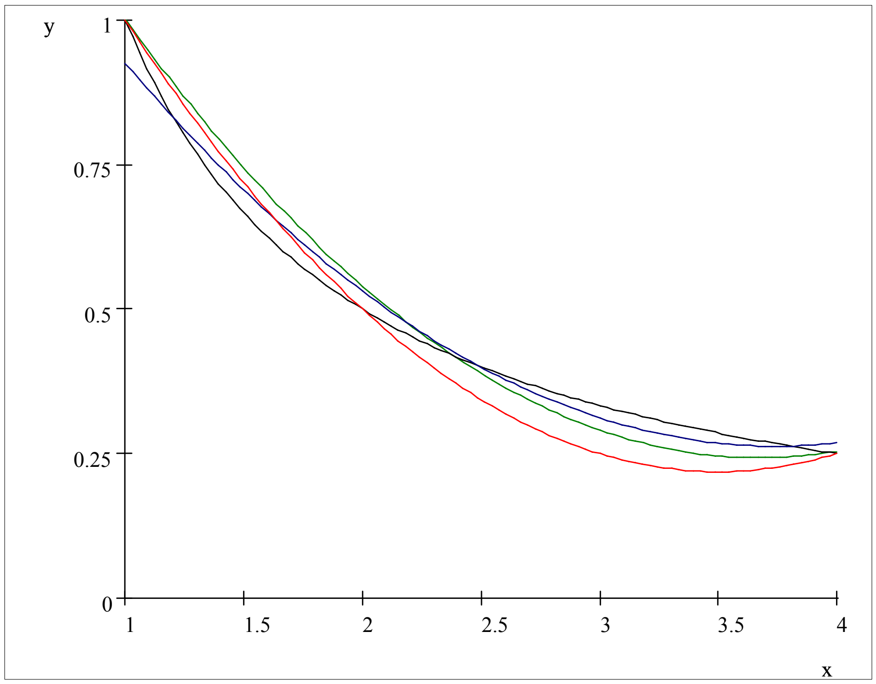
$a_0 = \frac{2\ln 4 - 15(\frac{571}{216} - \frac{200}{81}\ln 4) - 42(\frac{40}{81}\ln 4 - \frac{125}{216}) - (\frac{44}{9}\ln 4 - \frac{329}{48}) - (\frac{14}{9}\ln 4 - \frac{101}{48})}{6} = \frac{160}{81}\ln 4 - \frac{115}{108}$

Obs: Se podía resolver no de forma exacta, aproximando números, eso no baja puntaje.

vi. Polinomio $p(x)$

$a_0 = \frac{160}{81}\ln 4 - \frac{115}{108} = 1.673\,544\,417\,026\,944\,432\,3$
$a_1 = \frac{571}{216} - \frac{200}{81}\ln 4 = -0.779\,430\,521\,283\,680\,540\,33$
$a_2 = \frac{40}{81}\ln 4 - \frac{125}{216} = 0.105\,886\,104\,256\,736\,108\,07$
obs: se pueden aproximar estos coeficientes
$p(x) = \frac{160}{81}\ln 4 - \frac{115}{108} + \left(\frac{571}{216} - \frac{200}{81}\ln 4\right)x + \left(\frac{40}{81}\ln 4 - \frac{125}{216}\right)x^2$
$p(x) = 1.674 - 0.779x + 0.106x^2$

(d) Errores:



Negro: $\frac{1}{x}$ Rojo: $p_L(x)$ Lagrange Azul: $p_C(x)$ Chebyshev Verde: $p(x)$ Lagrangiano

i. En el intervalo $[1,4]$: $E = \int_1^4 (f(x) - p(x))^2 dx$
Como las tres integrales son de la forma $\int_1^4 (\frac{1}{x} - a - bx - cx^2)^2 dx$, calculemos solo UNA vez la integral de forma general y después reemplazamos:

$$\left(\frac{1}{x} - a - bx - cx^2\right)^2 = \begin{array}{cccccc} \frac{1}{x^2} & -\frac{a}{x} & -b & -cx & & \\ & -\frac{a}{x} & +a^2 & +abx & +acx^2 & \\ & & -b & +abx & +b^2x^2 & +bcx^3 \\ & & & -cx & +acx^2 & +bcx^3 & +c^2x^4 \end{array}$$

$\Longrightarrow (\frac{1}{x} - a - bx - cx^2)^2 = \frac{1}{x^2} - 2a\frac{1}{x} + (a^2 - 2b) + 2(ab - c)x + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4$
$\Longrightarrow \int_1^4 (\frac{1}{x} - a - bx - cx^2)^2 dx = (1 - \frac{1}{4}) - 2a\ln 4 + (a^2 - 2b)3 + 2(ab - c)\frac{16-1}{2} + (b^2 + 2ac)\frac{64-1}{3} + 2bc\frac{256-1}{4} + c^2\frac{1024-1}{5}$
$E(a,b,c) = \frac{3}{4} - 2a\ln 4 + 3(a^2 - 2b) + 15(ab - c) + 21(b^2 + 2ac) + \frac{255}{2}bc + \frac{1023}{5}c^2$

A. Lagrange
$a = \frac{7}{4}$
$b = -\frac{7}{8}$
$c = \frac{1}{8}$
$E(\frac{7}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{8}) = \frac{3}{4} - 2 \times \frac{7}{4} \times \ln 4 + 3(\frac{49}{16} + 2 \times \frac{7}{8}) + 15(-\frac{7}{4} \times \frac{7}{8} - \frac{1}{8}) +$

$21(\frac{49}{64}+2\times\frac{7}{4}\times\frac{1}{8})-\frac{255}{2}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1023}{5}\times\frac{1}{64}$
$E_L=\frac{3111}{640}-\frac{7}{2}\ln 4=0.008\,907\,236\,080\,382\,834\,079\,4$

B. Chebyshev
$a=1.495\,15$
$b=-0.657\,51$
$c=0.087\,7$
$E(1.495\,15,-0.657\,51,0.087\,7)=\frac{3}{4}-2\times1.495\,15\times\ln 4+3(1.495\,15^2+2\times0.657\,51)+15(-1.495\,15\times0.657\,51-0.087\,7)+21(0.657\,51^2+2\times1.495\,15\times0.087\,7)-\frac{255}{2}\times0.657\,51\times0.087\,7+\frac{1023}{5}0.087\,7^2$
$E_C=4.147\,307\,823\,6-2.990\,3\ln 4=0.001\,871\,795\,543\,191\,082\,499\,3$

C. Lagrangiano
$a=1.674$
$b=-0.779$
$c=0.106$
$E(1.674,-0.779,0.106)=\frac{3}{4}-2\times1.674\ln 4+3(1.674^2+2\times0.779)+15(-1.674\times0.779-0.106)+21(0.779^2+2\times1.674\times0.106)-\frac{255}{2}\times0.779\times0.106+\frac{1023}{5}0.106^2$
$E=4.647\,147\,6-3.348\ln 4=0.005\,834\,078\,970\,606\,208\,142\,2$

D. Comparar
$E_C<E<E_L$
El polinomio de Chebyshev es el que tiene menor error de todos, luego el polinomio del Lagrangiano, y luego el polinomio de Lagrange. Esto se debe ya que el polinomio de Chebyshev no interpola los puntos dados, por lo que tiene más libertar para acotar el error, luego el del lagrangiano es el polinomio que interpola los dos extremos de menor error, y como el polinomio de lagrange interpola esos dos puntos, más x_1, entonces el error es más grande que todos.

ii. En los puntos $x_0=1$ $x_1=2$ $x_2=4$

A. Lagrange
$|p_L(1)-1|=0\implies\frac{|p_L(1)-1|}{1}=0$
$\left|p_L(2)-\frac{1}{2}\right|=0\implies\frac{\left|p_L(2)-\frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2}}=0$
$\left|p_L(4)-\frac{1}{4}\right|=0\implies\frac{\left|p_L(4)-\frac{1}{4}\right|}{\frac{1}{4}}=0$
$E_{T_{abs}}=0+0+0=0$
$E_{T_{rel}}=0+0+0=0$

B. Chebyshev
$|p_C(1)-1|=0.074\,66\implies\frac{|p_C(1)-1|}{1}=0.074\,66$
$\left|p_C(2)-\frac{1}{2}\right|=0.030\,93\implies\frac{\left|p_C(2)-\frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2}}=0.061\,86$
$\left|p_C(4)-\frac{1}{4}\right|=0.018\,31\implies\frac{\left|p_C(4)-\frac{1}{4}\right|}{\frac{1}{4}}=0.073\,24$
$E_{T_{abs}}=0.074\,66+0.030\,93+0.018\,31=0.123\,9$
$E_{T_{rel}}=0.074\,66+0.061\,86+0.073\,24=0.209\,76$

C. Lagrangiano

$|p(1)-1| = 0 \Longrightarrow \frac{|p(1)-1|}{1} = 0$
$\left|p(2)-\frac{1}{2}\right| \simeq 0.038\,2 \Longrightarrow \frac{\left|p(2)-\frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2}} \simeq 0.076\,4$
$\left|p(4)-\frac{1}{4}\right| = 0 \Longrightarrow \frac{\left|p(4)-\frac{1}{4}\right|}{\frac{1}{4}} = 0$
$E_{T_{abs}} = 0 + 0.038\,2 + 0 = 0.038\,2$
$E_{T_{rel}} = 0 + 0.076\,4 + 0 = 0.076\,4$

D. Comparar

$E_L < E < E_C$

Claramente el polinomio de Lagrange tiene menos error que los otros, ya que interpola esos puntos.

Luego, el polinomio del Lagrangiano, como interpola los extremos, solo tienen un pequeño error en el punto $x_1 = 2$.

El polinomio con más error en los puntos es el polinomio de Chebyshev, ya que no interpola ninguno de esos puntos.

iii. Cota superior

Como todos los errores realtivos son de la forma
$E_{rel}(x) = \frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} = \frac{\left|ax^2+bx+c-\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \left|ax^3 + bx^2 + cx - 1\right|$
y el máximo se alcanza en la derivada igual a cero, por lo que el módulo se puede sacar:
$\frac{\partial E_{rel}(x)}{\partial x} = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Longrightarrow$
$\bar{x}_1 = \frac{-2b+\sqrt{4b^2-12ac}}{6a}$
$\bar{x}_2 = \frac{-2b-\sqrt{4b^2-12ac}}{6a}$
que son los puntos del error máximo de los polinomios.

A. Lagrange

El polinomio de Lagrange interpola a $f(x)$ en 1,2 y 4, por lo que el error será cero en esos puntos, entonces, con solo evaluar en algun punto entre $[1,2]$ y $[2,4]$ se puede obtener el signo del módulo:
$E_L(x) = \frac{|p_L(x)-f(x)|}{|f(x)|} = \frac{\left|\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{7}{4}-\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \left|\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1\right|$
$\max E_L(x) \Longleftrightarrow \frac{\partial E_L(x)}{\partial x} = 0$
ocupando lo anterior:
$\bar{x}_1 = \frac{-2b+\sqrt{4b^2-12ac}}{6a} = \frac{2\times\frac{7}{8}+\sqrt{4\times\left(\frac{7}{8}\right)^2-12\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{4}}}{6\times\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{7}{3} \simeq 3.\,215$
$\bar{x}_2 = \frac{2\times\frac{7}{8}-\sqrt{4\times\left(\frac{7}{8}\right)^2-12\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{4}}}{6\times\frac{1}{8}} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \simeq 1.\,451$
$E_L(\bar{x}_1) = \left|\frac{1}{8}\times 3.\,215^3 - \frac{7}{8}\times 3.\,215^2 + \frac{7}{4}\times 3.\,215 - 1\right| = 0.264\,076\,453\,125$
$E_L(\bar{x}_2) = \left|\frac{1}{8}\times 1.\,451^3 - \frac{7}{8}\times 1.\,451^2 + \frac{7}{4}\times 1.\,451 - 1\right| = 0.078\,891\,231\,375$
Error máximo: $E_{ML} = \ 0.264\,076\,453\,125$

B. Chebyshev

De forma análoga, pero con los puntos $3.8,\ 2.5,\ 1.2$
$E_C(x) = \left|\frac{p_C(x)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|0.087\,7x^3 - 0.657\,51x^2 + 1.\,495\,15x - 1\right|$
$\max E_C(x) \Longleftrightarrow \frac{\partial E_C(x)}{\partial x} = 0$

$\bar{x}_1 = \frac{2\times 0.657\,51 + \sqrt{4\times 0.657\,51^2 - 12\times 0.087\,7\times 1.\,495\,15}}{6\times 0.087\,7} = 3.\,249\,167\,533\,904\,671\,003$
$5 \simeq 3.\,25$
$\bar{x}_2 = \frac{2\times 0.657\,51 - \sqrt{4\times 0.657\,51^2 - 12\times 0.087\,7\times 1.\,495\,15}}{6\times 0.087\,7} = 1.\,749\,008\,064\,727\,027\,970$
$3 \simeq 1.749$
$E_C(\bar{x}_1) = \left|0.087\,7 \times 1.\,749^3 - 0.657\,51 \times 1.\,749^2 + 1.\,495\,15 \times 1.\,749 - 1\right| =$
$0.072\,905\,506\,577\,3$
$E_C(\bar{x}_2) = \left|0.087\,7 \times 3.\,25^3 - 0.657\,51 \times 3.\,25^2 + 1.\,495\,15 \times 3.\,25 - 1\right| =$
$0.075\,135\,312\,5$
Error máximo: $E_{MC} = \; 0.075\,135\,312\,5$

C. Lagrangiano
$E(x) = \left|\frac{p(x)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|0.106\,x^3 - 0.779\,x^2 + 1.\,674x - 1\right|$
$\bar{x}_1 = \frac{2\times 0.779 + \sqrt{4\times 0.779^{\,2} - 12\times 0.106\times 1.\,674}}{6\times 0.106} = 3.\,308\,060\,904\,105\,676\,241\,2 \simeq$
$3.\,308$
$\bar{x}_2 = \frac{2\times 0.779 - \sqrt{4\times 0.779^{\,2} - 12\times 0.106\times 1.\,674}}{6\times 0.106} = 1.\,591\,310\,165\,076\,713\,695$
$9 \simeq 1.\,591$
$E(\bar{x}_1) = \left|0.106 \times 3.\,308^3 - 0.779 \times 3.\,308^2 + 1.\,674 \times 3.\,308 - 1\right| = 0.149\,805\,680$
128
$E(\bar{x}_2) = \left|0.106 \times 1.\,591^3 - 0.779 \times 1.\,591^2 + 1.\,674 \times 1.\,591 - 1\right| = 0.118\,356\,516$
526
Error máximo: $E_M = \; 0.149\,805\,680\,128$

D. Comparar
$E_{MC} < E_M < E_{ML}$
Por la propiedad de los polinomios de Chebyshev, es el polinomio de menor error en la cota superior en cada punto del intervalo dado.
Luego, como el polinomio del Lagrangiano minimiza el área total del error, esto lleva a acotar de mejor manera a todos los puntos del intervalo, por lo que no puede haber mucho error en los puntos.
Como el polinomio de Lagrange solo interpola en los puntos dados, no tiene ninguna propiedad de que acota el error en todos los puntos del intervalo, por lo que su error es el mayor de todos.

Como vimos, cada uno de estos tres polinomios intenta de aproximar y/o interpolar a $f(x)$ en el intervalo $[1, 4]$ y cada polinomio tiene distintas propiedades descritas previamente, y según para lo que se necesite hacer con el polinomio, es cual se elige para construir.