Control 2 MA-33A-1 2006-2

Profesor Dr. Gonzalo Hernandez - Auxiliar Gonzalo Rios

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1) Métodos Iterativos para SEL:

   Coincidere un sistema $Ax = b$ de $n \times n$, con A definida positiva y tridiagonal.

   (a) Determine el número de operaciones al aplicar al sistema el método de Gauss-Seidel, si se hicieron k_{GS} iteraciones.

   Hint: Calcule de forma separada el número de operaciones para calcular $[diag(A) + low(A)]^{-1}, B, h$ y de cada iteración: $x^{k+1} = Bx^k + h$

   (b) Determine el número de operaciones al aplicar el método de la potencia para calcular $\rho(T_G)$ el radio espectral de la matriz del método de Gauss-Seidel T_G, suponiendo que fueron necesarias k_p iteraciones.

   (c) Determine el número máximo de iteraciones k_{SOR} del método SOR aplicado al sistema $Ax = b$, tomando $\overline{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_G)}}$ y calculando $\rho(T_G)$ con el método de la potencia usando k_p iteraciones, tal que el método SOR sea más eficiente que el método de Gauss-Seidel con k_{GS} iteraciones.

2) Interpolación Polinomial:

   (a) Un spline cúbico sujeto S de la función f en el intervalo $[0, 2]$ está definido por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + b_0 x + 2x^2 - 2x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ S_1(x) = 1 + b_1(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   Aplicando las condiciones para determinar $S(x)$ obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

   (b) Suponga que para interpolar una función f en los puntos x_0, x_1, x_2 se desea utilizar splines cuadráticas $S(x)$ definidas por: $S(x)$ es un polinomio cuadrático en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ dado por:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 \quad j = 0, 1$$

   i) Determine la cantidad de ecuaciones que se necesitan para obtener en forma única un spline cuadrático en los puntos x_0, x_1, x_2.

   ii) Determine las condiciones y ecuaciones que debe satisfacer el spline cuadrático.

3) Interpolación y Aproximación por Mínimos Cuadrados:

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $p_L(x)$ de segundo grado. Calcule el error $E_L = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_L(x))^2 dx$

(b) Use los ceros del polinomio de Chebyshev $T_3(x)$ y las transformaciones del intervalo dado, y construya un polinomio interpolante $p_C(x)$ de segundo grado para $f(x)$ en $[x_0, x_2]$. Calcule el error $E_C = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_C(x))^2 dx$

(c) Se desea interpolar $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$. El polinomio resultante sería de grado n. Para aumentar la precisión a un bajo costo, se desea encontrar un polinomio $p(x)$ de grado $n+1$ tal que:

i) Interpole a $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$

ii) Minimice el error en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Este polinomio $p(x)$ tendrá la forma: $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$. Para determinarlo se puede resolver el problema de minimización con restricciones:

$$\begin{aligned} &\min_{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}} \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx \\ &s.a. : p(x_k) = f\,(x_k) \quad k = 0, ..., n \end{aligned} \tag{1}$$

Para resolver este problema $(*)$, se define el lagrangiano L según:

$$L(a_0, a_1, ..., a_{n+1}, b_0, b_1, ..., b_n) = \int_{x_0}^{x_n} (f(x) - p(x))^2 dx + \sum_{k=0}^{n} b_k (p(x_k) - f\,(x_k))$$

Entonces, la solución es equivalente a minimizar L respecto a los parámetros: $a_0, a_1, ..., a_{n+1}, b_0, b_1, ..., b_n$.

Aplique este método para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con los puntos $x_0 = 1$ y $x_2 = 4$. Calcule el error $E_P = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p(x))^2 dx$

(d) Los tres polinomios anteriores, $p_L(x),\ p_C(x)$ y $p(x)$ son de segundo grado e interpolan y/o aproximan a $f(x) = \frac{1}{x}$. Compare los tres polinomios considerando:

i) Los errores totales en el intervalo $[x_0, x_2]$

ii) Los errores en los puntos $x_{0,}\ x_1,\ x_2$

iii) La cota superior de los errores para todo punto en el intervalo $[x_0, x_2]$

Concluya cual de los tres polinomios calculados anteriormente es mejor. Explique.