Ejercicios para el Tema 3.

! 3.1.

Usar el algoritmo de Horner para dividir reiteradamente $f(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ por $x - 1$.

Hallar de ese modo el desarrollo de f en potencias de $x - 1$, y observar lo siguiente:

Para cada $k > 0$, el polinomio $p_k(x)$ de f en $x_0 = 1$ es el resto de dividir $f(x)$ por $(x - x_0)^{k+1}$.

Probar que eso se cumple para cada polinomio f y cada punto x_0 .

Para otras funciones, probar el siguiente análogo:

La igualdad $f(x) = q(x)\,(x - x_0)^{k+1} + r(x)$ con $r =$ al polinomio de Taylor p_k de f en x_0 , es la única con $r \in$ $\boxed{Pol_k = \{\text{polinomios de grado} \leq k\}}$ y $q(x)$ continua.

! 3.2.

El siguiente es un ejemplo de cómo la caracterización $\boxed{f(x) - p_n(x) = o(|x - x_0|^n)}$ de los polinomios de Taylor ayuda a calcularlos:

Si $p_n,\ q_n$ son los polinomios de Taylor en $x_0 = 0$ de dos funciones $f,\ g$, probar[8] que

$$fg - p_n q_n = o(|x|^n)$$

En consecuencia, el polinomio r_n que queda al suprimir en $p_n q_n$ los términos de grado mayor que n es el de Taylor (de grado n) de fg . Aplicar la idea por ejemplo a $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ con $n = 4$, y verificar el resultado[9]. Probar también que

$$F(x) - F(0) - \int_0^x p_n(s)\,ds = o(|x|^{n+1}) \text{ , si } F'(x) = f(x)$$

Deducir la relación que hay entre los desarrollos de Taylor de f y de F , y usarla para calcular el de

$$F(x) = \log(1 + x) \quad \text{, partiendo de} \quad f(x) = 1/\,(1 + x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

! 3.3. Para cada una de las funciones

$$f(x) = x, \quad x^2, \quad x^3, \quad 1/(2x + 1), \quad 1/(1 + 9x^2)$$

y los puntos $x_{0,1,2} = 0, 1, -1$, hallar polinomios interpoladores $P_{[0,1]}$, $P_{[0,1,-1]}$ (preferiblemente a ojo; si no se consigue, escribir y resolver el SEL), y comparar sus gráficas con las de las funciones.

Razonar por qué P_n *no depende del orden en que se dan* los puntos x_i , y por qué $P_n \equiv f$ si f es un polinomio de grado $\leq n$.

! 3.4.

Para $x_{0,1,2} = 0, 1, -1$, hallar los polinomios de **Lagrange** L_i . Hacerlo primero a ojo, en vista de las condiciones $L_i(x_j) = \delta_{ij}$; luego, utilizando la función $W(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_2)$.

En el caso general $x_0, \ldots, x_n$: ¿podría alguno de los L_i ser de grado $< n$? ¿por qué forman una base de $Pol_n = \{\text{polinomios de grado} \leq n\}$? Las respuestas deben salir inmediatamente de su definición.

Usando el desarrollo de Taylor de $W(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ en x_j , probar que el valor en $x = x_j$ de $W(x)/(x - x_j)$ es $W'(x_j)$, y comparar con las afirmaciones siguientes (cuando $x \to 0$) :

$$\begin{array}{lcll} \operatorname{sen}(x) = x + \ldots & \Rightarrow & \operatorname{sen}(x)/x & \to 1 \\ \cos(x) = 1\ - x^2/2 + \ldots & \Rightarrow & (1 - \cos(x)\,)/x^2 & \to 1/2 \end{array}$$

Venimos tomando los x_j distintos. ¿Quién será $W(x)/(x - x_j)^m$ si m de ellos coinciden en x_j?

! 3.5.

Buscar una tabla de la *distribución Normal* (cualquier texto de Probabilidad o Estadística tendrá una); hay muchos formatos diferentes, pero de los valores de la tabla se podrán deducir los

$$f(x) = \mathbb{P}(0 < X < x) \text{ si } X \text{ es Normal(0,1)}$$

Escribir para $f(x)$ las fórmulas $\begin{array}{ll} P_{[x_1,x_2]}(x) & \text{(interpolación lineal)} \\ P_{[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x) & \text{(interpolación cúbica)} \end{array}$

a usar para un $x \in (x_1, x_2)$, donde $x_k = x_0 + kh$ son abscisas que aparecen en la tabla.

[8] Indicación: $fg - p_n q_n = (f - p_n)g + (g - q_n)p_n$.

[9] El mismo tipo de argumento permite *componer desarrollos* para hallar el de $g \circ f$, etc. Ver [*San*98], Cap.2, en particular los Problemas 2.1.1, .3, .7, .8.

Observar ambas fórmulas y su diferencia: la *corrección* que la segunda añade a la primera.

Puede que la tabla usada tenga paso $h < 0.1$, pero tomar de ella sólo los valores correspondientes a $x_i = 0$, 0.1 , 0.2 , 0.3 , y usarlos para aproximar $f(0.15)$ con cada una de las dos fórmulas. Juzgar si la diferencia entre los resultados es relevante, *en vista de la precisión dada por la tabla.*

! 3.6.

Reescribir el polinomio $f(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ en la forma de Newton para $x_{0,1,2,3} = -1, 0, 1, 2$, usando primero división por los factores $x - x_i$ (Horner), luego una tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{llll} f_0 = f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ f_1 = f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\ f_2 = f[x_2] & f[x_2, x_3] & & \\ f_3 = f[x_3] & & & \end{array}$$

Hacer esto último también para la función $1/(1 + (3x)^2)$. En cada caso, comparar la función $f(x)$ con las "sumas parciales" $P_k(x)$, $k = 0, \ldots, 3$.

La diferencia dividida $f[x_0, \ldots, x_k]$ es *homogénea de grado* $-k$ *en los* x_j *:* si cambiamos la escala de x , de modo que los datos f_i se mantienen y cada x_i se convierte en sx_i , la DD se multiplica por s^{-k}.

Probarlo de dos maneras:

• a partir de la fórmula de recurrencia;

• con un *cambio de escala* en el problema de interpolación que resuelve P_n :
si $p(x)$ *lo resuelve para los datos* $x_0, \ldots, x_n$, $f_0, \ldots, f_n$ *, comprobar que el polinomio* $p_h(x) = p(x/h)$ *lo resuelve para los datos* $hx_0, \ldots, hx_n$, $f_0, \ldots, f_n$ *.*

Deducir de aquí que *todos los coeficientes* de P_n son funciones homogéneas de los x_j .

! 3.7.

Con los datos del ejercicio **! 3.5**, y utilizando la expresión del error de interpolación, estudiar cuál sería la relación entre el paso de la tabla y el número de dígitos de precisión de sus datos que puede hacer razonable el usar[10] interpolación cúbica en lugar de lineal.

La respuesta dependerá naturalmente de la "zona" de valores x , tratar de darla en esa forma.

! 3.8.

- El **método de la secante** para aproximar ceros de funciones[11], puede expresarse así:

  dados los valores $f_i = f(x_i)$ *en dos puntos* x_0, x_1 *, definir* x_2 *por la ecuación* $P_{[x_0,x_1]}(x_2) = 0$.

  Escribir esa ecuación en términos de las $f[x_i]$, despejar x_2 y observar la similitud de la fórmula que resulta con la de Newton.

- Lo mismo puede hacerse con *tres* valores $f_i = f(x_i)$: definir x_3 mediante $P_{[x_0,x_1,x_2]}(x_3) = 0$, pero en este caso observar lo siguiente: la ecuación es la misma si multiplicamos cada f_i , y con ellos $P_2 = P_{[x_0,x_1,x_2]}$, por una misma constante $c \neq 0$; si en particular los dividimos por $f[x_0, x_1, x_2]$, el polinomio toma la forma

  $$P_2(x) = (x - a)^2 - b \text{ , cuyos ceros (reales o complejos) son } a \pm \sqrt{b} \text{ .}$$

  En tal caso, bastan los valores f_0, f_1 para determinar a, b :

  $$f_1 - f_0 = (x_1 - a)^2 - (x_0 - a)^2 = (x_1 + x_0 - 2a)(x_1 - x_0) \text{ , de donde}$$
  $$2a = x_1 + x_0 - f[x_0, x_1] \quad , \quad b = (x_0 - a)^2 - f_0$$

  Convertir todo esto en un algoritmo para calcular x_3 a partir de los datos x_i, f_i , $i = 0, 1, 2$.
  La ventaja de este método es que puede aproximar los ceros **complejos** de una función.

- Si usamos polinomios P_n que interpolen *los valores* x_i *como función de los* f_i , el punto buscado será $x = P_n(0)$, y el método se llama **interpolación inversa.**

  Explicar por qué esto no produce nada nuevo si $n = 1$ (sale otra vez la secante), pero sí usando más valores. Escribir la fórmula que resulta con $n = 2$, $i = 0, 1, 2$.

---

[10] Estas tablas no están pensadas en general para eso, sino para usar directamente los valores que ofrecen.

[11] Visto en el **Tema 1**, como alternativa a Newton.

! 3.9.

Fijados $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, sean $P_2(s)$, $P_4(s)$, los polinomios que interpolan $f(a+hs)$ respectivamente en los puntos $[0, \pm 1]$, $[0, \pm 1, \pm 2]$. Considerar los siguientes operadores de derivación aproximada, los primeros para aproximar $f'(a)$, el otro para $f''(a)$, y las expresiones que se dan para ellos:

$$\mathcal{D}_2 f(a) = \frac{P_2'(0)}{h} = f[a-h, a+h] \quad , \quad \mathcal{D}_4 f(a) = \frac{P_4'(0)}{h} = \frac{4}{3} f[a-h, a+h] - \frac{1}{3} f[a-2h, a+2h]$$

$$\mathcal{D}^2 f(a) = \frac{P_4''(0)}{h^2} = (\ \Delta^2 f(a-h) - \frac{1}{12} \Delta^4 f(a-2h)\ )\ /h^2$$

- El cambio de escala $x = a + hs$ reduce el operador al caso $h = 1$, dejando en su expresión los denominadores h, h^2 .
  ¿Por qué desaparece luego el denominador h en las de $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4$, pero no el h^2 en la de $\mathcal{D}^2$?
- Usando el desarrollo de Taylor de f en a , hallar la expresión aproximada del error $\mathcal{D}f(a) - f^{k)}(a)$ para cada uno de estos operadores. En los que usan P_4 , esas expresiones saldrán de los términos de grado > 4 del desarrollo de Taylor. ¿Por qué sabemos que será así?
- Suponiendo un $\varepsilon_m = 10^{-16}$, hallar el tamaño del error que se producirá en el cálculo de $\mathcal{D}_2 f(a)$ y en el de $\mathcal{D}_4 f(a)$, y deducir el límite de precisión alcanzable con cada método: para aproximadamente qué valores de h el error de redondeo llega a superar el error de aproximación del operador.
- Si se calcula la expresión de $P_4(s)$ con cualquiera de los métodos generales vistos en este Tema, se puede llegar a las expresiones dadas para sus derivadas, tras largo camino.
  Pero considerar el argumento siguiente: las tres funciones $p'(0), p[-1,1], p[-2,2] : Pol_4 \to \mathbb{R}$ son formas lineales que se anulan para $p = 1, s^2, s^4$, luego no pueden ser independientes, y se tendrá:
  $$p'(0) = c_1 p[-1,1] + c_2 p[-2,2] \ .$$
  Basta ahora evaluarlas en $p = s, s^3$ para deducir los valores de c_1, c_2 , luego usar el cambio $x = a+hs$ para traducir las diferencias de p en diferencias de f y tener $\mathcal{D}_4 f(a)$.

  Probar a imitar el argumento para $\mathcal{D}^2 f(a)$; ahora las tres formas se anulan para $p = 1, s, s^3$, y hay que trabajar un poco más: producir las diferencias sucesivas de s^2, s^4 para poder hallar los coeficientes; a cambio, la traducción es esta vez más simple.

! 3.10.

- Acotar el error $|f(x) - p(x)|$ que resulta, para x en el intervalo $J = [a-h, a+h]$, al interpolar $f(x) = 1/(1+x^2)$ usando los 3 nodos $a, a \pm h$.
  ¿En cuántos intervalos J de igual longitud habrá que dividir $I = [-5, 5]$ para tener en cada uno errores menores que $3 \cdot 10^{-4}$, y cuántos valores de f se usarán en total?
  Dato: un cálculo elemental (pesado) revela que el $\max |f'''(x)| \approx 4.7$ *se alcanza cerca de* $x = 0.3$.
- ¿Cuál será el máximo relevante si queremos que la aproximación $f(x) \approx p(x)$ tenga *errores relativos* de ese tamaño?
- ¿Cómo varían las respuestas si hablamos de $f(x) = 1/(1+25\,x^2)$ y del intervalo $I = [-1, 1]$?

! 3.11. Hay un único polinomio $p \in Pol_3$ tal que los valores de p, p' en dos puntos dados $a, b = a+h$ coinciden con los de f, f' . Hallar expresiones para $p(x)$, y para el error $f(x) - p(x)$.

Usarlas para dar una fórmula que aproxime $\log(a+hs)$ para $s \in (0,1)$ usando valores en a, b .

! 3.12.

Dados los valores f_i de una función $f(x)$ en $n+1$ puntos $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, su *spline cúbico natural* es la función g que interpola f en esos puntos y cumple además:

i) *en cada* $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, g *coincide con un polinomio* $p_i \in Pol_3$;
ii) *para* $0 < i < n$ *se tiene* $p_{i+1}'(x_i) = p_i'(x_i)$, $p_{i+1}''(x_i) = p_i''(x_i)$;
iii) $p_0''(a) = p_n''(b) = 0$.

Escribir el sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar esos polinomios, dados los x_i, f_i .
Escribir código MATLAB que lo resuelva y muestre gráficamente el resultado.

POSIBLES RESPUESTAS a los Ejercicios para el Tema 3.

! 3.1.

- La primera linea son los coeficientes de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, bajo ella se dan los de los sucesivos cocientes por $x - 1$, y a la derecha de éstos, los correspondientes restos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & & \textit{resto} \\ & 1 & 0 & -1 & & \boxed{0} \\ & & 1 & 1 & & \boxed{0} \\ & & & 1 & & \boxed{2} \end{array}$$

lo que da:

$$f(x) = 0 + (x-1)\{\ 0 + (x-1)\{\ 2 + (x-1)\ \}\} = 2(x-1)^2 + (x-1)^3$$

que es el desarrollo de Taylor de f en $x_0 = 1$.

- Si dado un polinomio $f(x)$ de grado n , escribimos su desarrollo de Taylor (completo) en potencias de $x - x_0$, tendrá este aspecto para cada $k = 0, \dots, n$:

$$f(x) = p_k(x) + r_k(x)$$

donde p_k es el desarrollo hasta grado k , y los sumandos del correspondiente resto r_k contienen el factor $(x - x_0)^{k+1}$; por lo tanto, $r_k(x) = q(x)(x - x_0)^{k+1}$, y como p_k es de grado $< k + 1$, es el resto de la división por $(x - x_0)^{k+1}$.

- Si hubiese dos igualdades $f(x) = q_i(x)\,(x - x_0)^{k+1} + r_i(x)$, con q_i continuas y $r_i \in Pol_k$, sería

$$r_2(x) - r_1(x) = (x - x_0)^{k+1} q(x) \in Pol_k \text{ , con } q(x) = q_1(x) - q_2(x) \text{ continua en } x_0 \text{ ,}$$

que sólo es posible si $q(x) \equiv 0$.

! 3.2.

- Como ambos factores $f - p_n$, $g - q_n$, son $o(|x|^n)$, también lo son la diferencia

$$fg - p_n q_n = (f - p_n)g + (g - q_n)p_n \text{ ,}$$

y la $fg - r_n$ que queda al suprimir en $p_n q_n$ los términos de grado $> n$; pero como $r_n \in Pol_n$, eso implica que es el polinomio de Taylor de fg hasta grado n (en $x_0 = 0$). Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \text{ , } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \Rightarrow$$

$\operatorname{sen}(x)\cos(x) = x - 2x^3/3 + o(x^4)$, que concuerda con:

$$2 \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x) = 2x - 8x^3/3! + o(x^4) \text{ .}$$

- Para x en algún entorno de $x_0 = 0$, y para alguna C , se tendrá $|f(x) - p_n(x)| < C|x|^{n+1}$, luego

$$|\int_0^x (f(s) - p_n(s))\,ds| < C|x|^{n+2}/(n+2) \text{ ,}$$

que da la igualdad del enunciado sin más que usar $F(x) - F(0) = \int_0^x f(s)\,ds$.
esa igualdad implica que el polinomio

$$P_{n+1} = F(0) + \int_0^x p_n(s)\,ds \in Pol_{n+1}$$

es el de Taylor de F hasta grado $n + 1$; o lo que es lo mismo, que el p_n de $f = F'$ se obtiene derivando el P_{n+1} de F. Por ejemplo, el desarrollo de Taylor

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad \text{da el de:} \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

! 3.3. Como se trata en cada caso de hacer pasar o bien una recta o bien una parábola por 2 ó 3 puntos del plano, la respuesta para las tres primeras funciones es inmediata, y casi lo es para las otras dos:

$$\begin{array}{rccc} x = & 0 & 1 & -1 \\ 1/(1+2x) = & 1 & 1/3 & -1 \\ 1/(1+9x^2) = & 1 & 1/10 & 1/10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left|\ \begin{array}{ll} P_1(x) = & P_2(x) = \\ 1 - 2x/3 & 1 + 2x/3 - 4x^2/3 \\ 1 - 9x/10 & 1 - 9x^2/10 \end{array}\right.$$

La condición que define el polinomio interpolador $P_n \in Pol_n$ no cambia si reordenamos los puntos $x_0, \dots, x_n$; pero si $f \in Pol_n$, el polinomio f cumple tautológicamente esa condición.

! 3.4.

- Las condiciones $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ dan inmediatamente las tres parábolas
$$L_0(x) = 1 - x^2 \ , \quad L_1(x) = x(x+1)/2 \ , \quad L_2(x) = x(x-1)/2$$
a las que se llega igual suprimiendo cada factor en $W(x) = x(x-1)(x+1)$ y dividiendo por el valor que resulta en el correspondiente punto.

- Como L_i debe anularse en n puntos, no puede ser de grado $< n$ sin ser $\equiv 0$; además, sus imágenes por la función $\phi(p) = (p(x_i)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ son los $n+1$ vectores unidad, lo que no sería posible si los L_i no fuesen independientes.

- Como $W(x)$ se anula en x_j , su desarrollo de Taylor allí comienza:
$$W(x) = W'(x_j)(x - x_j) + o(|x - x_j|) \ ,$$
luego $W(x)/(x - x_j) - W'(x_j)$ tiende a 0 en ese punto.
Es exactamente el mismo argumento que da las implicaciones del enunciado, y el mismo de la implicación siguiente, cuya hipótesis se tiene si m de los factores coinciden con $x - x_j$:
$$W(x) = W^{m)}(x_j)\frac{(x - x_j)^m}{m!} + o(|x - x_j|^m) \quad \Rightarrow \quad \frac{W(x)}{(x - x_j)^m} - \frac{W^{m)}(x_j)}{m!} \to 0 \text{ cuando } x \to x_j$$

! 3.5.

- Si tomamos para empezar $x_0 = 0$, $h = 1$, la fórmula para la interpolación lineal puede escribirse:
$$P_{[1,2]}(x) = (x-1)f_2 - (x-2)f_1$$
Como estamos interesados en la diferencia $P_{[1,2,0,3]}(x) - P_{[1,2]}(x)$, podemos observar que se anula en $x = 1, \ 2,$ y que por lo tanto[12]
$$P_{[1,2,0,3]}(x) - P_{[1,2]}(x) = (x-1)(x-2)(a_0 + a_1 x)$$
y las igualdades
$$\begin{aligned} f_0 &= 2a_0 + P_{[1,2]}(0) &&= 2a_0 + 2f_1 - f_2 \\ f_3 &= 2(a_0 + 3a_1) + P_{[1,2]}(3) &&= 2(a_0 + 3a_1) + 2f_2 - f_1 \end{aligned}$$
dan los coeficientes:
$$\boxed{a_0 = (f_0 + f_2)/2 \ - f_1} \quad , \quad \boxed{a_1 = (f_3 - f_0)/6 \ - (f_2 - f_1)/2}$$

Para pasar al caso general, basta observar que el cambio de variable $x - x_0 = h\xi$ transforma el polinomio interpolador con valores f_k en $x = x_k$ en otro con esos mismos valores en $\xi = k$; si llamamos ξ a la variable de las fórmulas anteriores, basta sustituir $\xi = (x - x_0)/h$, y cada factor $\xi - k$ por $(x - x_k)/h$, para tener el $p(x)$ buscado. En particular,
$$P_{[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x) - P_{[x_1,x_2]}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{h^2} \ (a_0 + a_1 \frac{x - x_0}{h} \ )$$

Por otro lado, la naturaleza del problema planteado sugiere usar la variable $t = (x - x_1)/h \in (0,1)$, que convierte las fórmulas en:
$$P_2(t) = tf_2 + (1-t)f_1 \quad , \quad P_4(t) - P_2(t) = t(t-1) \ (a_0 + a_1(t+1) \ )$$

- En el ejemplo de los puntos $x_k = k \cdot 0.1$, una cierta tabla de la Normal nos da:
$$f_{0,1,2,3} = \ 0, \ 0.0797, \ 0.1585, \ 0.2358 \text{ , de donde } \ a_0 = -0.00045, \ a_1 = -0.0001 \ ,$$
lo que da $P_2(0.5) = 0.1191$, con una corrección de $P_4 - P_2 = +0.00015$; y en efecto, el valor que da la tabla en cuestión para $x = 0.15$ es $f = 0.1192$; teniendo en cuenta que ese es el dígito redondeado, la corrección es irrelevante.

[12]Es *la misma idea* que lleva a la forma de Newton para P_n .

! 3.6.

- El cálculo es como el del ejercicio **3.1**, salvo que ahora el punto a en el que evaluamos (es decir, el factor $x-a$ por el que dividimos) varía en cada linea:

$$\begin{array}{r|rrrrr} a= & 1 & -1 & -1 & 1 & \mathit{resto} \\ -1 & & 1 & -2 & 1 & \boxed{\mathbf{0}} \\ 0 & & & 1 & -2 & \boxed{\mathbf{1}} \\ 1 & & & & \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{-1}} \end{array}$$

$$f(x)=P_3(x)=0+(x+1)\{\ 1+x\{\ -1+(x-1)\ \}\}=0\ +(x+1)\ -(x+1)x\ +(x+1)x(x-1)$$

Se llega a lo mismo con las Diferencias Divididas; la primera linea son las $f[x_0,\ldots,x_k]$:

$$\begin{array}{llcccc} x_0=-1 & f_0= & \boxed{\mathbf{0}} & \boxed{\mathbf{1}} & \boxed{\mathbf{-1}} & \boxed{\mathbf{1}} \\ x_1=0 & f_1= & 1 & -1 & 2 & \\ x_2=1 & f_2= & 0 & 3 & & \\ x_3=2 & f_3= & 3 & & & \end{array}$$

y para la función $1/1+9x^2$ (mismos x_i),
$$\begin{array}{lrrrr} f_0= & \boxed{\mathbf{0.1}} & \boxed{\mathbf{0.9}} & \boxed{\mathbf{-0.9}} & \boxed{\mathbf{0.438}} \\ f_1= & 1 & -0.9 & 0.413 & \\ f_2= & 0.1 & -0.073 & & \\ f_3= & 0.027 & & & \end{array}$$

$$P_3(x)=0.1\ +0.9(x+1)\ -0.9(x+1)x\ +0.438(x+1)x(x-1)$$

- La afirmación a probar es la siguiente:

con unos mismos datos $\{f_i\}$ *, se tendrá* $f[hx_0,\ldots,hx_k]=h^{-k}f[x_0,\ldots,x_k]$.

Esto es obvio si $k=0$, e inmediato por inducción en k si observamos la igualdad

$$(hx_k-hx_0)\ f[hx_0,\ldots,hx_k]=f[hx_1,\ldots,hx_k]-f[hx_0,\ldots,hx_{k-1}]\ .$$

Pero también es obvio que el p_h definido por $p_h(x)=P_{[x_0,\ldots,x_k]}(x/h)$ cumple[13]

$$p_h(hx_i)=P_{[x_0,\ldots,x_k]}(x_i)=f_i\ ,\text{ para } i=0,\ldots,k\ ,\text{ y que}$$

$$P_{[x_0,\ldots,x_k]}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k\quad\Rightarrow\quad p_h(x)=a_0+\frac{a_1}{h}x\ldots+\frac{a_k}{h^k}x^k$$

luego *todos los coeficientes de* $P_{[x_0,\ldots,x_k]}$ son homogéneos en los datos x_i , el de x^j con grado $-j$.

! 3.7. Sabemos[14] que la función a interpolar en el ejercicio **3.5** es

$$f(x)=\int_0^x N(s)ds\ ,\text{ donde}\quad N(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}$$

lo que da: $\quad f'(x)=N(x)\ ,\quad f''(x)=-xN(x)\ ,\quad f'''(x)=(x^2-1)N(x)\ ,\quad\ldots$

Si las abscisas de la tabla que usamos para interpolar son $x_k=x_0+kh$, la fórmula de error para el polinomio $P_1=P_{[x_1,x_2]}$ es

$$\boxed{f(x)-P_1(x)=f''(\xi)\,(x-x_1)(x-x_2)\,/2}$$

que es >0 para $0<x_1<x<x_2$, y tendrá su *tamaño máximo* si concurren estas dos cosas:

$$\begin{cases}|x-x_1|=|x-x_2|=h/2\\ |f''(\xi)| \text{ alcanza su valor máximo,}\end{cases}$$

que es $|f''(1)|=1/\sqrt{2\pi e}=0.24$, como se descubre mirando las funciones f'',f'''.

En resumen, $|f-P_1|\le 0.24\,(h/2)^2\,/2$, que es $=0.003$ si $h=0.1$, como en **3.5**.

Y la cota es menor si nos apartamos de $x=1$: por ejemplo $|f''(0.2)|=0.078$, $|f''(2)|=0.054$.

Para una tabla con 4 decimales, como en el ejemplo usado en la respuesta a **3.5**, esto implica que el error de interpolación de P_1 es irrelevante salvo en la zona cercana a $x=1$, y lo sería también allí si fuese $h=0.05$ o menor.

[13]Esta propiedad de cambio de escala de los P_n es lo que se ha explotado en la respuesta a **3.5**.

[14]Ver curso de Probabilidad.

! 3.8.

Este ejercicio muestra cómo las ideas del Tema 3 producen métodos aplicables al Tema 1. El primero de ellos ya se mencionó allí.

- La ecuación $0 = P_{[x_0,x_1]}(x_2) = f_0 + f[x_0,x_1](x_2 - x_0)$ da $\boxed{x_2 = x_0 - f_0/f[x_0,x_1]}$,

  que es en lo que se convierte el método de Newton si reemplazamos la $f'(x_0)$ con $f[x_0,x_1]$; recordemos que $f[x_0,x_1] = f'(\xi)$ para algún $\xi \in (x_0,x_1)$.

- El algoritmo sugerido para resolver la ecuación $0 = P_{[x_0,x_1,x_2]}(x_3)$ es el siguiente:

  `Input:` x_0, x_1, x_2 `,` f_0, f_1, f_2 `.`
  $c = f[x_0,x_1,x_2]$
  `para` $i = 0,1,2$ `,` $f_i = f_i/c$ `% reduce`[15] `al caso` $f[x_0,x_1,x_2] = 0$
  $a = (x_1 + x_0 - f[x_0,x_1])/2$
  $b = (x_0 - a)^2 - f_0$
  $s = \sqrt{b}$ `, con el signo que haga` $\Re(s/a) > 0$
  `Output:` $x_3 = a + s$ `% el signo elegido evita el sumar casi opuestos`

- La ecuación $0 = P_{[x_0,x_1]}(x_2)$ dice que

  los puntos $(x_0,f_0),(x_1,f_1),(x_2,0)$ *están alineados,*

  y esa afirmación no cambia si intercambiamos los papeles de las variables, producimos $P_{[f_0,f_1]}$ con los x_i como valores, y escogemos $x_2 = P_{[f_0,f_1]}(0)$.

  Por el contrario, parábolas con eje vertical y horizontal no pueden ser la misma curva, y por eso la fórmula de **interpolación inversa**

  $$x_3 = P_{[f_0,f_1,f_2]}(0) = x_0 + x[f_0,f_1](-f_0) + x[f_0,f_1,f_2]\,(-f_0)(-f_1)$$

  no da el mismo resultado que el algoritmo del apartado anterior; en particular, siempre producirá valores reales si lo son los datos.

! 3.9.

- El denominador h se incorpora a las **diferencias divididas** en las expresiones de $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4$, pero las **diferencias sucesivas** de $\mathcal{D}^2$ son independientes de la escala de abscisas, sólo siguen la escala de los valores de f .

- Los operadores que usan P_4 son exactos para $f \in Pol_4$, y por eso sus errores deben salir de los términos de grado > 4 del desarrollo de Taylor de f .

  En efecto, las expresiones que resultan son:

  $$f[a-h,a+h] - f'(a) \approx \frac{f^{3)}(a)}{3!}h^2 + \frac{f^{5)}(a)}{5!}h^4 \quad \text{, y de ahí}$$

  $$\mathcal{D}_4 f(a) - f'(a) \approx \frac{f^{5)}(a)}{5!}\left(\frac{4}{3}h^4 - \frac{1}{3}(2h)^4\right) = \frac{-f^{5)}(a)}{30}h^4$$

  Para $\mathcal{D}^2 f(a)$, las expresiones $\Delta^k = (E-I)^k = \sum_0^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} E^j(-1)^{k-j}$ llevan a

  $$\Delta^2 f(a-h) - f''(a)h^2 \approx \frac{f^{4)}(a)}{12}h^4 \quad , \quad \Delta^4 f(a-h) - f^{4)}(a)h^4 \approx \frac{f^{6)}(a)}{6}h^6$$

  de donde

  $$\mathcal{D}^2 f(a) - f''(a) \approx \frac{-f^{6)}(a)}{6 \cdot 12}h^4$$

[15] Si c fuese muy pequeño, se puede tomar como $= 0$ y usar secante con x_1, x_2 .

- El error esperable al calcular $f[a-h,a+h]$ es $\approx \varepsilon_m f(a)/2h$, y cuando eso sea $\approx f^{3)}(a)h^2/3!$, que es el error de la aproximación $f'(a) \approx f[a-h,a+h]$, será inútil reducir este último haciendo h más pequeño; si ignoramos el factor $3f/f'''$, que podemos suponer de tamaño "moderado" salvo casos especiales, la barrera se alcanza cuando $h^3 \approx \varepsilon_m$, con error de tamaño $\approx \varepsilon_m^{2/3} = 10^{-10.7}$.

  Cuando el mismo argumento se aplica a la aproximación $f'(a) \approx \mathcal{D}_4 f(a)$, da un error límite $\approx \varepsilon_m^{4/5}$.

- El argumento es que una forma lineal $\phi(p)$ que se anule en el subespacio $\mathcal{L}\{1, s^2, s^4\}$ de $Pol_4 \approx \mathbb{R}^5$, estará determinada por los valores que tome para $p = s, s^3$, luego tres de ellas no pueden ser independientes.

  Los valores citados se resumen a la izquierda, y se usan a la derecha para hallar c_1, c_2 :

valor para: de la forma lineal:	s	s^3	
$p'(0)$	1	0	y en consecuencia, $\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = c_1 + 4c_2 \end{cases}$
$p[-1,1]$	1	1	de donde, $p'(0) = \frac{4}{3}p[-1,1] - \frac{1}{3}p[-2,2]$
$p[-2,2]$	1	4	

  Para $\mathcal{D}^2 f(a)$, el mismo argumento da

$$p''(0) = c_1 \Delta^2 p(-1) + c_2 \Delta^4 p(-2) \ , \quad \text{y tras calcular las diferencias:}$$

valor para: de la forma lineal:	s^2	s^4	
$p''(0)$	2	0	y en consecuencia, $\begin{cases} 2 = 2c_1 \\ 0 = 2c_1 + 24c_2 \end{cases}$
$\Delta^2 p(-1)$	2	2	de donde, $p''(0) = \Delta^2 p(-1) - \frac{1}{12}\Delta^4 p(-2)$
$\Delta^4 p(-2)$	0	24	

! 3.10.

- La fórmula del error es

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} W(x)$$

  con $\xi \in J$, $W(x) = (x-a)(x-a-h)(x-a+h)$, y si tomamos $x = a + hs$,

$$\max_J |W(x)| = h^3 \max_{[-1,1]} |s(s^2-1)| = 0.385\, h^3$$

  Usando el dato del enunciado, $|f'''(\xi)/3!| \leq 0.78$, $|f(x) - p(x)| \leq 0.30\, h^3$, que será $< 3 \cdot 10^{-4}$ si $h^3 < 3 \cdot 10^{-4}/0.30$, lo que se cumple para $h = 1/10$. Eso supone partir I en 50 intervalos iguales, y usar 101 valores de f .

  Por otra parte se tiene $|f'''(5)| = 0.0063$, que permitiría usar $h = 0.9$ para ese mismo tamaño de error, de modo que usar intervalos iguales parece bastante mala idea.

- Para controlar el error relativo $|f(x) - p(x)|/f(x)$, lo que importa es el $\max_J |f'''(x)/f(x)|$, que como puede comprobarse se alcanza cerca de 0.4 y es ≈ 5.2 ; por lo tanto, el valor de h que da un cierto tamaño de error es esencialmente el mismo de antes.

- Tanto $f(x)$ como I son los mismos de antes salvo un mismo cambio de escala en abscisas, luego sirven los mismos $p(x)$ de antes, con ese mismo cambio y los mismos errores; sólo cambian los factores del error: el factor 5 entra dividiendo a h , y f''' es 5^3 veces mayor.

! 3.11. Se puede formar una tabla de "diferencias divididas osculatorias":

$$\begin{array}{c|lllll}
x_i = & & & & \\
a & f(a) & f'(a) & (f[a,b] - f'(a)\ )/h & (f'(b) + f'(a) - 2f[a,b]\ )/h^2 \\
a & f(a) & f[a,b] & (f'(b) - f[a,b]\ )/h & \\
b & f(b) & f'(b) & & \\
b & f(b) & & &
\end{array}$$

y escribir con ellas el polinomio en la forma de Newton:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f[a,b] - f'(a)}{h}(x-a)^2 + \frac{f'(a) + f'(b) - 2f[a,b]}{h^2}(x-a)^2(x-b)$$

Pero es más fácil y más transparente escribir los **polinomios de Lagrange** para el problema, en primer lugar para el caso $[a, b] = [0, 1]$:

$$\begin{array}{ccc} L_0(s) = (1-2s)(s-1)^2 & , & L_1(s) = (1-2(s-1))s^2 \\ L_{0'}(s) = s(s-1)^2 & , & L_{1'}(s) = s^2(s-1) \end{array}$$

que resuelven el problema con valores $(f(0), f(1), f'(0), f'(1)) = (1, 0, 0, 0)$ para $L_0(s)$, etc.
El cambio $x = a + hs$ reduce el problema a este caso, si no olvidamos cómo cambian las derivadas:

$$\boxed{p(a+hs) = f(a)L_0(s) + f(b)L_1(s) + f'(a)h\,L_{0'}(s) + f'(b)h\,L_{1'}(s)}$$

Esta fórmula se aplica inmediatamente al caso de $\log(a + hs)$ para $s \in (0, 1)$.

! 3.12.

- Las incógnitas serán los coeficientes de cada polinomio

  $$p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

  y hay ecuaciones de cuatro tipos, que dan las siguientes lineas de matriz:

lineas	ecuación	columna:				$4i$							
n	$p_i(x_i) = f_i$	$\dots$	1	x_i	x_i^2	x_i^3	$\dots$					$\mid$	f_i
n	$p_i(x_{i-1}) = f_{i-1}$	$\dots$	1	x_{i-1}	x_{i-1}^2	x_{i-1}^3	$\dots$					$\mid$	f_{i-1}
$n-1$	$p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i)$	$\dots$	0	1	$2x_i$	$3x_i^2$	0	-1	$-2x_i$	$-3x_i^2$	$\dots$	$\mid$	0
$n-1$	$p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$	$\dots$	0	0	2	$6x_i$	0	0	-2	$-6x_i$	$\dots$	$\mid$	0

  además de las dos ecuaciones de los extremos: $p_0''(a) = 0 = p_n''(b)$.

- El código[16] debe usar los vectores de datos $(x_i), (f_i)$ para:

  – escribir los coeficentes adecuados sobre una matriz y un vector inicializados como
  `A = zeros(4*n); b = zeros(4*n,1);`

  – resolver el sistema:
  `a = A\b;`

  – generar muchos valores $x \in (x_0, x_n)$ y los correspondientes $g(x) = p_i(x)$, y mostrarlos en un `plot`, con los nodos destacados.

  Si el dato es una función f que se evalúa en los nodos x_i , conviene evaluarla también en los x del gráfico, y mostrar en otro `plot` (con su propia escala de ordenadas) los errores $g(x) - f(x)$.

[16] Se encontrará próximamente un ejemplo de este código en el fichero habitual: `Mrut.txt`.