Pauta P3 Control 2 MA33A

Parte 1

Nos podríamos haber inspirado en el método de Simpson, puesto que tenemos que:
(0.5 ptos)
$y' = f(y)$, si integramos entre t y $t + \Delta t$ por teorema fundamental del cálculo tenemos que:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(y(s))ds \approx \frac{\Delta t}{6}\left[f(y(t)) + 4f(y(t+\frac{\Delta t}{2})) + f(y(t+\Delta t))\right]$$

(1 pto)
de este modo $f(y(t)) = k_1$ y aproximando por Euler o Taylor(entorno a t):

$$y(t+\frac{\Delta t}{2}) \approx y(t) + y'(t)\frac{\Delta t}{2} \Rightarrow f(y(t+\frac{\Delta t}{2})) \approx f(y(t) + y'(t)\frac{\Delta t}{2}) = k_2$$

y

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + y'(t)\Delta t \Rightarrow f(y(t+\Delta t)) \approx f(y(t) + y'(t)\Delta t) = k_3$$

(0.5 ptos)

$$\text{y así se tiene que } y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

Obs: Es fundamental que tengan claro que la variable de integración es t y no y. También que RK es un método para resolver EDO's y no un método de integración.

Parte 2

Para poder aplicar el método debemos convertir la ecuación $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (que es de segundo orden) en una de primer orden. Para ello hacemos el cambio de variables:

$$\begin{array}{ccc} u = y & & u' = y' = v \\ & \Rightarrow & \\ v = y' & & v' = y'' = -y = -u \end{array}$$

y con las condiciones iniciales tenemos:

$$u(0) = y(0) = 1$$

$$v(0) = y'(0) = 0$$

Ahora tenemos una EDO vectorial de primer orden $\dot{\vec{y}} = f(\vec{y})$, con:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = f(\vec{y}) = f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$$

con la condición inicial:

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1 pto. por determinar la nueva EDO)

Para el método $y_0 = \vec{y}(0)$ Ahora debemos determinar k_1, k_2 y k_3 en la primera iteración

$$k_1 = f(y_0) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$k_2 = f(y_0 + (\Delta t/2)\,k_1) = f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix}1\\-\Delta t/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Delta t/2\\-1\end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(y_0 + \Delta t k_1) = f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \Delta t\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1\\-\Delta t\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-\Delta t\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{6}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-\Delta t/2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\Delta t\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\Delta t/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-(\Delta t)^2/2\\-\Delta t\end{pmatrix}$$

Con esto:

$$y(\Delta t) \approx y_1 = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

(1 pto. por utilizar bien el método y concluir)

Parte 3

El error local del método es:

$$y(t+\Delta t) - [y(t) + \Delta t\phi(y(t), t, \Delta t)] = y(t+\Delta t) - y(t) - \Delta t\phi(y(t), t, \Delta t)$$

donde $y(t)$ es una solución de la EDO (solución real, sin ninguna aproximación), por Simpson sabemos que:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(y(s))ds = \frac{\Delta t}{6}\left[f(y(t)) + 4f(y(t+\frac{\Delta t}{2})) + f(y(t+\Delta t))\right] + (f(y(\xi)))^{(4)}\frac{\Delta t^5}{2880}$$

(0.5 ptos) por otro lado

$$y(t+\frac{\Delta t}{2}) = y(t) + y'(t)\frac{\Delta t}{2} + y''(\xi_1)\frac{\Delta t^2}{4} = y(t) + k_1\frac{\Delta t}{2} + y''(\xi_1)\frac{\Delta t^2}{4}$$

y

$$y(t+\Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t + y''(\xi_2)\frac{\Delta t^2}{2} = y(t) + k_1\Delta t + y''(\xi_2)\frac{\Delta t^2}{2}$$

(0.5 ptos)

y para f reducimos en uno el orden

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(\xi_3)\Delta x$$

así por Taylor tenemos:

$$f(y(t+\frac{\Delta t}{2})) = f(y(t)+k_1\frac{\Delta t}{2}) + c_1\Delta t^2$$

y también

$$f(y(t+\Delta t)) = f(y(t)+y'(t)\Delta t) + c_2\Delta t^2$$

$$\Rightarrow y(t+\Delta t) - y(t) = \frac{\Delta t}{6}\left[f(y(t)) + 4f(y(t+\frac{\Delta t}{2})) + f(y(t+\Delta t))\right] + \frac{2c_1\Delta t^3}{3} + \frac{c_2\Delta t^3}{6} + c\Delta t^5$$

$$= \Delta t\phi(y(t),t,\Delta t) + \tilde{c}\Delta t^3 + c\Delta t^5 \text{ , así el error local es } \epsilon = \tilde{c}\Delta t^3 + c\Delta t^5$$

(0.5 ptos)

y como

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\epsilon}{\Delta t} = 0$$

el método es consistente.

(0.5 ptos)

Obs: deben tener claro que y_n sólo aproxima a $y(t_n)$ y no son necesariamente lo mismo (en general no lo son), en esta parte no pueden despreciar errores, sino que controlarlos. Si se demuestra consitencia sin usar el error local, deben trabajar con normas de funciones. Más precisamente él método es consistente si:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sup_{t\in[0,T-\Delta t]}|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} - \phi(y(t),t,\Delta t)| = 0$$

suponiendo que queremos resolver la ecuación en $[0,T]$. Y el supremo sí importa.