MA31A – Enunciado Clase Auxiliar

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Roberto Cortez

16 de noviembre de 2007

Sea F un cuerpo de característica 0. Recuerde que bajo esa hipótesis en una clase auxiliar pasada se probó que si $f(x) \in F[x]$ es irreducible entonces $f(x)$ no posee raíces múltiples. Dada K extensión de F, decimos que la extensión es *simple* si existe $c \in K$ tal que $K = F(c)$.

(a) Pruebe que si a, b son algebráicos sobre F entonces existe $c \in F(a, b)$ tal que $F(a, b) = F(c)$. Concluya que toda extensión finita de F es simple.

Considere un cuerpo K y H un subgrupo del grupo de automorfismos de K. Se define el *cuerpo fijo* de H, anotado K_H, como el conjunto de elementos de K que quedan invariantes bajo cualquier automorfismo en H. Por otro lado, dada K extensión de F, se define el *grupo de automorfismos* de K relativo a F, denotado $G(K, F)$, como el conjunto de automorfismos de K que dejan fijo todo elemento de F. Se prueba fácilmente que K_H es un subcuerpo de K y que $G(K, F)$ es un subgrupo del grupo de automorfismos de K. En una auxiliar pasada se probó que si K es una extensión finita de F entonces $G(K, F)$ es un grupo finito y se tiene la cota $o(G(K, F)) \leq [K : F]$. En general el cuerpo fijo de $G(K, F)$ contiene a F, pero la inclusión puede ser estricta. Cuando K sea una extensión finita de F y se tenga la igualdad en la inclusión recién mencionada, diremos que K es una extensión *normal*.

(b) Sea K extensión finita de F y sea H un subgrupo de $G(K, F)$. Pruebe que $H = G(K, K_H)$ y $[K : K_H] = o(G(K, K_H))$. Concluya que si K es extensión normal entonces $[K : F] = o(G(K, F))$.