MA31A – Enunciado Clase Auxiliar

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Roberto Cortez

2 de noviembre de 2007

P1. (a) Sea F un cuerpo y $f(x) \in F[x]$. Pruebe que $f(x)$ posee una raíz múltiple si y sólo si $f(x)$ y $f'(x)$ poseen un factor común no trivial.

(b) Sea F un cuerpo y $f(x) \in F[x]$ irreducible.

1. Suponga que la característica de F es 0. Pruebe que $f(x)$ no posee raíces múltiples.
2. Suponga que la característica de F es $p > 0$. Pruebe que si $f(x)$ posee raíces múltiples entonces $f(x) = g(x^p)$ para cierto $g(x) \in F[x]$.

Un elemento a en una extensión K de F se dice *separable sobre* F si satisface un polinomio sobre F sin raíces múltiples. Una extensión K de F se dice *separable* si todos sus elementos son separables sobre F. Un cuerpo F se dice *perfecto* si toda extensión finita de F es separable.

(c) Pruebe que todo cuerpo de característica 0 es perfecto.

(d) Sea F cuerpo de característica $p > 0$.

1. Pruebe que para $a, b \in F$ cualesquiera se tiene $(a+b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}$.
2. Sea K una extensión de F y sea T formado por los elementos $a \in K$ tales que $a^{p^n} \in F$ para cierto n. Pruebe que T es un sub-cuerpo de K.
3. Sean K, T como en el ítem anterior. Pruebe que cualquier automorfismo de K que deja fijo cada elemento de F también deja fijo todo elemento de T.

(e) Pruebe que un cuerpo F de característica $p > 0$ es perfecto si y sólo si para cada $a \in F$ existe un $b \in F$ tal que $b^p = a$. Concluya que todo cuerpo finito es perfecto.

P2. (a) Sean K un cuerpo y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ automorfismos de K distintos. Pruebe que es imposible encontrar elementos $a_1, \ldots, a_n$ en K, no todos 0, tales que $a_1\sigma_1(u) + \cdots + a_n\sigma_n(u) = 0$ para todo u en K.

Sea G un grupo de automorfismos de K. El *cuerpo fijo* de G es el conjunto de todos los elementos $a \in K$ tales que $\sigma(a) = a$ para todo $\sigma \in G$. Note que esta definición tiene perfecto sentido si G es un conjunto cualquiera de automorfismos de K.

(b) Sea A un conjunto de automorfismos de K y sea G el grupo generado por A. Pruebe que el cuerpo fijo de A y de G coinciden.

(c) Pruebe que el cuerpo fijo de G es un sub-cuerpo de K.

Sea K un cuerpo y F un sub-cuerpo. El *grupo de automorfismos de* K *relativo a* F, denotado $G(K, F)$, es el conjunto de todos los automorfismos de K que dejan fijo todo elemento de F. No es cierto en general que el cuerpo fijo de $G(K, F)$ es F.

(d) Pruebe que $G(K, F)$ es un subgrupo del grupo de automorfismos de K.

(e) Sea K extensión finita de F. Pruebe que $G(K, F)$ es un grupo finito y que de hecho se tiene $o(G(K, F)) \leq [K : F]$.