MA31A – Enunciado Clase Auxiliar

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Roberto Cortez

26 de octubre de 2007

P1. Sea R un dominio de integridad y F un sub-anillo que además es cuerpo y tal que R es de dimensión finita cuando se ve como espacio vectorial sobre F. Pruebe que R es un cuerpo.

P2. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Dado $p(t) \in \mathbb{F}[t]$ de la forma $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, definimos la *derivada* de $p(t)$ como el polinomio $p'(t) \in \mathbb{F}[t]$ dado por $p'(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$, donde k se identifica con el elemento de $\mathbb{F}$ que se obtiene al sumar 1 consigo mismo k veces. Por otro lado, llamamos *característica* de $\mathbb{F}$ al menor entero n tal que $n = 0$ en $\mathbb{F}$, o bien 0 si tal entero no existe.

(a) Pruebe que si la característica de $\mathbb{F}$ es 0, entonces $p'(t) = 0$ implica que $p(t) = \alpha$ para cierto $\alpha \in \mathbb{F}$.

(b) Pruebe que si la característica de $\mathbb{F}$ es $N > 0$, entonces $p'(t) = 0$ implica que $p(t) = q(t^N)$ para cierto $q(t) \in \mathbb{F}[t]$.

(c) Suponga $p(t)$ es de grado mayor o igual a 1. Decimos que p es *libre de cuadrados* si en su factorización no aparece ningún polinomio repetido, es decir, los polinomios irreducibles están elevados a 1. Pruebe que si la característica de $\mathbb{F}$ es 0, entonces $\operatorname{mcd}(p(t), p'(t)) = 1$ implica que $p(t)$ es libre de cuadrados.

P3. Sea $\mathbb{F}$ cuerpo finito. Pruebe que el grupo $\mathbb{F}^*$ es cíclico. Dése un cuerpo finito $\mathbb{F}$ particular, que no sea algún $\mathbb{Z}_p$, y encuentre un generador de $\mathbb{F}^*$.