MA31A – Enunciado Clase Auxiliar

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Roberto Cortez

28 de septiembre de 2007

P1. Sea V un R-módulo, con R un anillo conmutativo unitario. Pruebe que son equivalentes:

(I) cada submódulo W de V es finitamente generado;

(II) no existe una cadena infinita $W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \cdots$ de submódulos de V.

P2. Determinar, salvo isomorfismo, todos los grupos abelianos de orden 400.

P3. Pruebe lo siguiente.

(a) Sea p primo y $e, \nu \leq 1$ números enteros. El número de elementos de $\mathbb{Z}_{p^e}$ cuyo orden divide a p^ν es p^ν si $\nu \leq e$, y es p^e si $\nu \geq e$.

(b) Sea $q \geq 1$ un entero. Sean $W_1, \ldots, W_k$ grupos abelianos finitos, y sea u_j el número de elementos de W_j cuyo orden divide a q. Entonces el número de elementos del grupo producto $V = W_1 \times \cdots \times W_k$ cuyo orden divide a q es $u_1 \cdots u_k$.

(c) Sea p primo. Con la notación del punto anterior, suponga que W_j es un grupo cíclico de orden d_j potencia de p, digamos $d_j = p^{e_j}$. Sea r_i la cantidad de d_j's iguales a p^i, es decir, r_i es la cantidad de j's tales que $e_j = i$. Entonces el número de elementos de V cuyo orden divide a p^ν es p^{s_ν}, donde $s_1 = r_1 + r_2 \cdots$, $s_2 = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \cdots$, $s_3 = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 3r_4 + \cdots$, y así sucesivamente.