MA31A – Enunciado Clase Auxiliar

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Roberto Cortez

14 de septiembre de 2007

Sean R un anillo conmutativo, $I \subset R$ un ideal no degenerado y M un R-módulo.

1. Definimos $IM = \{\sum_{i=1}^{n} s_i m_i : n \in \mathbb{N},\ s_i \in I,\ m_i \in M\}$. Probar que IM es submódulo de M y de hecho $IM = \langle\{sm : s \in I,\ m \in M\}\rangle$.

2. Sobre M/IM definimos la multiplicación por escalares en el anillo cuociente R/I como $[r][m] = [rm]$. Ver que esto genera una operación bien definida de $R/I \times M/IM$ en M/IM y que con ella M/IM resulta ser un R/I-módulo.

3. Si $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, con los M_λ submódulos de M, pruebe que $IM = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} IM_\lambda$ y de aquí deduzca que $M/IM \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda/IM_\lambda$ mediante la asociación $[\sum m_\lambda] \leftrightarrow \sum [m_\lambda]$ y este isomorfismo es como módulos sobre R y sobre I/R.

4. Si M es libre como R-módulo con base $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, pruebe que M/IM es libre como R/I-módulo con base $\{[b_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda}$.

5. El ideal I (no degenerado) se dice *maximal* si para todo $J \subset R$ ideal que lo contiene se tiene $J = I$ o bien J es degenerado. Pruebe que:

   a) Todo ideal propio J está contenido en algún ideal maximal. En particular, R siempre posee ideales maximales.

   b) R/I es cuerpo si y solamente si I es ideal maximal de R.

6. Probar que si M es libre como R módulo, entonces todas sus bases poseen el mismo cardinal (Teorema de la Dimensión).