10

# Series de Fourier

## 10.1 DESARROLLOS

Al estudiar las series de potencias en el capítulo 9 vimos que una función analítica $f$ puede ser representada por una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad (10.1)$$

para todos los valores de $x$ comprendidos dentro del radio de convergencia de la serie. Recordemos que $f$ tiene derivadas de todos los órdenes y que los coeficientes $c_n$ de (10.1) vienen dados por $f^{(n)}(a)/n!$. En este capítulo nos interesaremos por desarrollos en serie de funciones que pueden no ser derivables. Es decir, vamos a considerar funciones que pueden tener solamente un número finito de derivadas en algunos puntos y ser discontinuas en otros. Desde luego, en tales casos no es posible escribir desarrollos en serie de potencias de $(x-a)$ como el de (10.1). Para obtener representaciones de funciones no derivables recurrimos a desarrollos en serie cuyos términos son funciones trigonométricas tales como

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots$$
$$\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \ldots$$

Una *serie trigonométrica* es una serie de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad (10.2)$$

en la que los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son constantes. Sea $f$ una función real definida en $I = \{x\colon -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Los coeficientes $a_n$ y $b_n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, han de ser determinados de forma que $f$ quede representada por (10.2). Para ello tenemos que utilizar las denominadas relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n \end{cases}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad \text{para} \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

cuya validez se confirma fácilmente mediante métodos de integración elementales. Con la ayuda de estas fórmulas se pueden obtener expresiones explícitas para los coeficientes $a_n$, $b_n$ del desarrollo (10.2).

**Teorema 10.1.** Sea $f$ continua en $I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, con $f(-\pi) = f(\pi)$. Supóngase que la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{10.3}$$

converge uniformemente a $f$ para todo $x \in I$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{10.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos las sumas parciales

$$s_k(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{k} (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx).$$

Como la sucesión $s_k(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, la sucesión $s_k(x) \cos nx$ convergerá uniformemente a $f(x) \cos nx$ cuando $k \to \infty$ para cada $n$ fijo. Basta con observar que

$$|s_k(x) \cos nx - f(x) \cos nx| = |s_k(x) - f(x)| \cdot |\cos nx| \leqslant |s_k(x) - f(x)|.$$

Análogamente, $s_k \operatorname{sen} nx$ converge uniformemente a $f(x) \operatorname{sen} nx$ para cada $n$ fijo. Por lo tanto

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx \cos nx + b_m \operatorname{sen} mx \cos nx).$$

Esta serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término entre $-\pi$ y $\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n.$$

De forma análoga, repitiendo el mismo argumento para $f(x) \operatorname{sen} nx$, obtenemos la fórmula (10.5). □

Los números $a_n$ y $b_n$ se denominan *coeficientes de Fourier de f*. Si los $a_n$ y $b_n$ vienen dados por (10.4) y (10.5) la serie trigonométrica (10.3) recibe el nombre de *serie de Fourier* de la función $f$.

Sea $f$ una función integrable cualquiera definida en $I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Entonces los coeficientes $a_n$ y $b_n$ pueden ser calculados mediante las fórmulas (10.4) y (10.5). Sin embargo, no hay garantía de que la serie de Fourier (10.3) converja a $f$ si ésta es una función integrable arbitraria. En general, escribimos

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

para indicar que la serie del segundo miembro puede no converger a $f$ en algún punto $x \in I$. Uno de los problemas centrales del estudio de las series de Fourier consiste en la identificación de amplias clases de funciones que tienen la propiedad de que sus series de Fourier sí convergen a los valores correctos.

**Definición.** Se dice que una función $f$ definida en $I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$ es *continua a trozos* en $I$ si y sólo si (i) existe una subdivisión

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

tal que $f$ es continua en cada uno de los subintervalos $I_k = \{x: x_{k-1} < x < x_k\}$ y (ii) en todos los puntos de la subdivisión $x_0, x_1, \ldots, x_n$ existen los límites unilaterales de $f$.

Una función continua a trozos tiene un número finito de puntos de discontinuidad, en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En cada uno de estos puntos los límites

$$\lim_{x \to x_k^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_k^+} f(x)$$

existen; se los denota por $f(x_k -)$ y $f(x_k +)$, respectivamente. La magnitud $f(x_k +) - f(x_k -)$ se denomina *salto* de $f$ en $x_k$. Los coeficientes $a_n$ y $b_n$, dados por integrales, no resultan alterados si se cambia el valor de $f$ en un número finito de puntos. Por lo tanto, dos funciones $f_1$ y $f_2$ que difieran solamente en un número finito de puntos tienen la misma serie de Fourier. Sea $f$ una función continua a trozos dada. Decimos que $f$ está *estandarizada* si su valor en los puntos de discontinuidad viene dado por

$$f(x_i) = \frac{1}{2}[f(x_i +) + f(x_i -)].$$

La estandarización de una función continua a trozos no modifica sus coeficientes de Fourier. Véase en la figura 10.1 un ejemplo de función estandarizada. En el estudio de las series de Fourier normalmente supondremos, por comodidad, que las funciones continuas a trozos han sido estandarizadas.

**Definiciones.** Diremos que una función $f$ es *continuamente derivable a trozos en* $I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$ si y sólo si (i) $f$ es continua a trozos y (ii) $f'$ existe y es continua a trozos en todo subintervalo $I_k = \{x: x_{k-1} < x < x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Se dice que una función $f$ es *continuamente derivable* en $I$ si y sólo si $f$ y $f'$ son continuas en $I$.

Postponemos hasta la sección 10.3 la cuestión de la convergencia de las series de Fourier; ahora vamos a estudiar el proceso formal de determinación de los coefi-

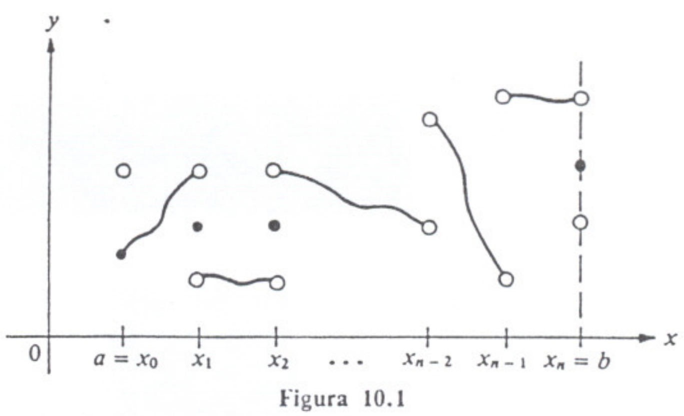


Figura 10.1

cientes de Fourier para diversas funciones. Sea $f$ una función continua a trozos en $I = \{x\colon -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. La *extensión periódica* $\tilde{f}$ *de* $f$ se define mediante la fórmula

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para} \quad -\pi \leqslant x < \pi, \\ f(x - 2\pi) & \text{para} \quad x \notin I. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ *se estandariza en* $-\pi$, $\pi$ y en todos los demás puntos de discontinuidad de forma que esté definida para $-\infty < x < \infty$.

EJEMPLO 1. Hállese la serie de Fourier de

$$f(x) = x, \qquad x \in I = \{x\colon -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}.$$

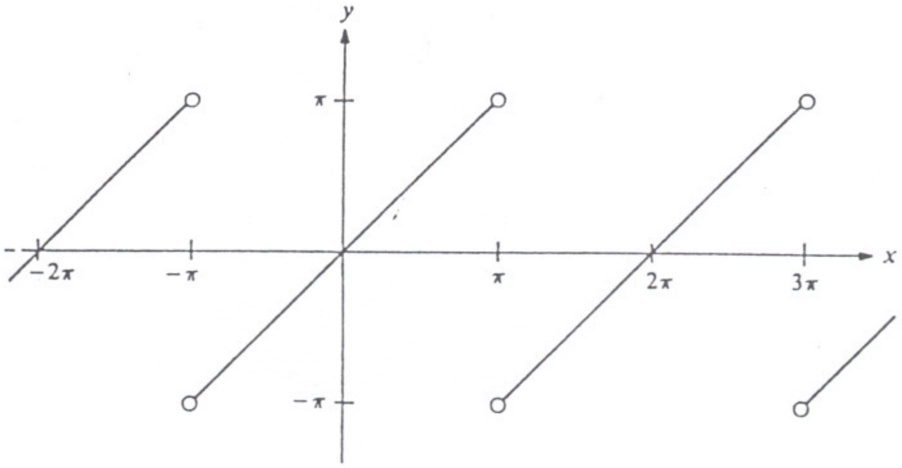


Figura 10.2

*Solución.* Formamos $\tilde{f}$, extensión periódica de $f$, y la estandarizamos (véase la figura 10.2). Por (10.4) y (10.5),

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx.$$

Integrando por partes obtenemos $a_0 = 0$ y

$$a_n = 0, \qquad b_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Por lo tanto,

$$f(x) \sim 2\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right], \qquad -\pi < x < \pi.$$

La serie del segundo miembro representa $\tilde{f}$ para todos los valores de $x$. Veremos más adelante que esta serie converge a $x$ para $-\pi < x < \pi$ y, evidentemente, es nula para $x = \pm\pi$.

El cálculo de coeficientes de Fourier frecuentemente se puede simplificar aprovechando las propiedades de las funciones pares e impares en la integración. Se dice que una función $f$ es *par* si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x$. Nótese que $\cos nx$ es una función par para todo $n$. Una función $g$ es *impar* si

$$g(-x) = -g(x)$$

para todo $x$. Las funciones $\operatorname{sen} nx$ son impares para todo $n$. Siendo $c$ un número cualquiera, si $f$ es par y $g$ es impar, entonces

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2\int_0^c f(x)\,dx, \qquad \int_{-c}^{c} g(x)\,dx = 0.$$

El producto de dos funciones pares es par, el producto de dos funciones impares es par y el producto de una función par por una impar es impar.

En el ejemplo 1 podemos observar que $f(x) = x$ es impar. Por lo tanto $f(x)\cos nx$ es impar, de forma que, *sin necesidad de cálculos*, sabemos que $a_n = 0$ para todo $n$.

EJEMPLO 2. Hállese la serie de Fourier de la función

$$f(x) = |x|, \qquad x \in I = \{x:\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}.$$

*Solución.* Formemos la extensión periódica de $f$ según se muestra en la figura 10.3. Como $f$ es par, las funciones $f(x)\operatorname{sen} nx$ son impares. Por lo tanto, $b_n = 0$ para todo $n$. Además, $a_0 = \pi$ y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi - 1] = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

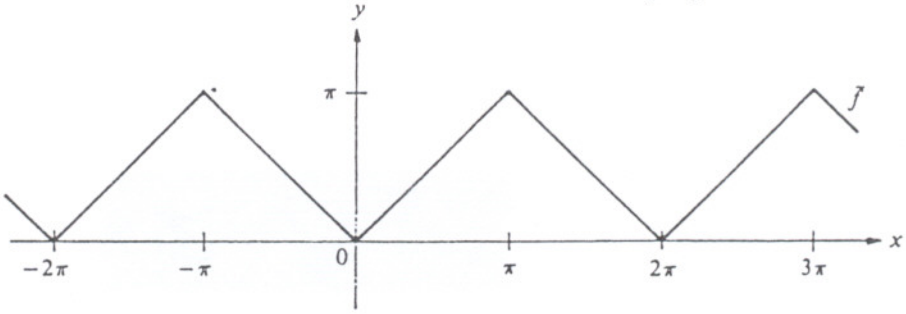


Figura 10.3

para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Así pues, la serie de Fourier de $f$ viene dada por

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \cdots\right], \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Suponiendo por el momento que esta serie converge a $|x|$, hacemos $x = 0$ y obtenemos la interesante fórmula

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right].$$

Esta fórmula es correcta y puede ser utilizada para calcular $\pi$ con el grado de precisión deseado. No obstante, se dispone de series muy superiores para calcular numéricamente $\pi$.

## Problemas

En los problemas 1 a 10 hállese la serie de Fourier de la función $f$ dada.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in I_1 = \{x: -\pi \leqslant x < 0\}. \\ 1 & \text{para } x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in I_1 = \{x: -\pi \leqslant x < \pi/2\}, \\ 1 & \text{para } x \in I_2 = \{x: \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$
3. $f(x) = x^2$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.
4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in I_1 = \{x: -\pi \leqslant x < 0\}, \\ x & \text{para } x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$
5. $f(x) = |\cos x|$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.
6. $f(x) = x^3$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.
7. $f(x) = e^{2x}$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.
8. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in I_1 = \{x: -\pi \leqslant x < 0\}, \\ \operatorname{sen} x & \text{para } x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

**10.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para $x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

**11.** Compruébense las fórmulas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad m = n, \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases}$$

**12.** (*a*) Hállese la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: -\pi \leqslant x < 0\}, \\ \pi/4 & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$$

(*b*) Suponiendo que la serie del apartado (*a*) converge a $f$ (estandarizada), demuéstrese que

(i) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots.$

(ii) $\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{17} - \cdots.$

(iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi = 1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{17} + \cdots.$

**13.** (*a*) Hállese la serie de Fourier de

$$f(x) = x + x^2 \quad \text{para} \quad x \in I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}.$$

(*b*) Suponiendo que la serie del apartado (*a*) converge a $f$ (estandarizada), demuéstrese que $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

## 10.2 SERIES DE FOURIER DE SENOS Y COSENOS. CAMBIO DE INTERVALO

Supongamos que queremos hallar la serie de Fourier de una función $f$ cuyo dominio es $J = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$. Como los coeficientes de Fourier $a_n$ y $b_n$ vienen dados por integrales entre $-\pi$ y $\pi$, necesitamos cambiar el dominio de $f$ a $I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$. Para ello basta con que definamos $f$ arbitrariamente en el subintervalo $I' = \{x: -\pi \leqslant x < 0\}$. Como lo único que nos interesa es $f$ en $J$, las características de convergencia de la serie en $I'$ carecen de importancia. Por ejemplo, podemos hacer $f \equiv 0$ en $I'$. Sin embargo, una elección que es útil en la mayor parte de los casos consiste en definir $f$ como función *par* en $I$. Puesto que $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ para funciones pares, la serie de Fourier constará solamente de términos cosinusoidales. Damos a tal serie el nombre de *serie de cosenos*; como la función original tiene dominio $J$, el desarrollo de Fourier se denomina *serie de medio recorrido*.

Una función $f$ definida en $J$ puede ser extendida a $I$ como función impar. Entonces $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y la serie resultante se denomina *serie de senos*. Ilustraremos el procedimiento de obtención de series de senos y de cosenos mediante los dos ejemplos siguientes.

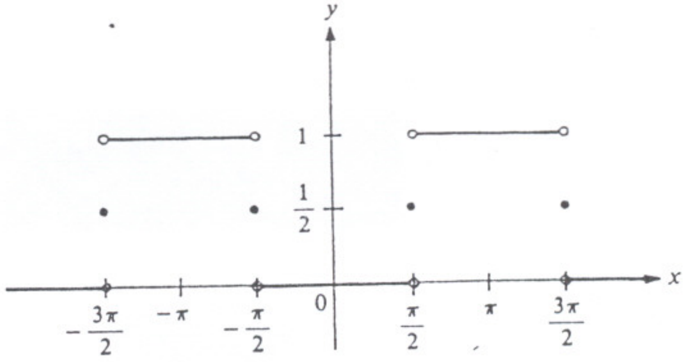


Figura 10.4

EJEMPLO 1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad I_1 = \{x: 0 \leqslant x < \pi/2\} \\ 1 & \text{para} \quad I_2 = \{x: \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi\}, \end{cases}$$

hállese su serie de cosenos.

*Solución.* Extendemos $f$ como función par, según se muestra en la figura 10.4. A continuación estandarizamos la función de forma que $\tilde{f}(\frac{\pi}{2}) = \tilde{f}(\frac{3\pi}{2}) = \tilde{f}(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. Como $\tilde{f}$ es par, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Además,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fácilmente se calcula que

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{es par} \\ \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)} & \text{si} \quad n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots \right], \qquad x \in I_1 \cup I_2.$$

EJEMPLO 2. Hállese la serie de senos para la función $f$ del ejemplo anterior.

*Solución.* Extendemos $f$ como función impar, como se muestra en la figura 10.5. En la función estandarizada $\tilde{f}(-3\pi/2) = \tilde{f}(\pi/2) = \cdots = 1/2$, $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi) = \cdots = 0$ y $\tilde{f}(-\pi/2) = \tilde{f}(3\pi/2) = \cdots = -1/2$. Entonces $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx.$$

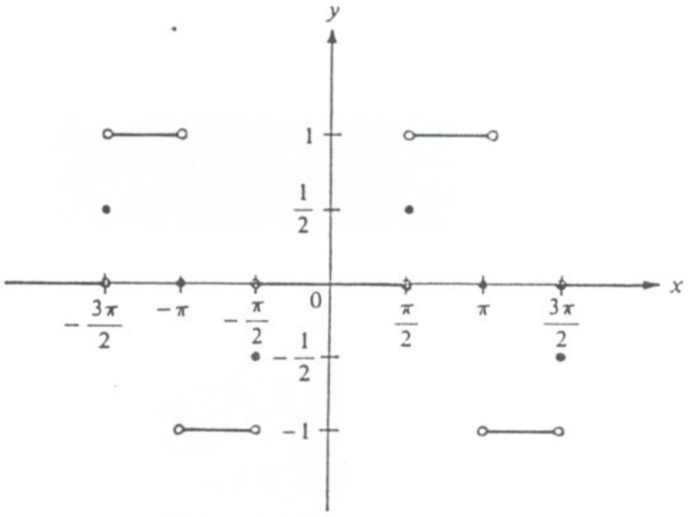


Figura 10.5

Así pues,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1] & \text{si } n = 2k \text{ y } k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\bar{f}(x) \sim \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - 2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \frac{2\operatorname{sen} 6x}{6} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \cdots\right] \quad \text{para} \quad x \in I_1 \cup I_2.$$

Si $f$ es una función continuamente derivable a trozos definida en un intervalo $J = \{x: c - \pi < x < c + \pi\}$, podemos formar la extensión periódica de $f$ y calcular los coeficientes de Fourier $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ mediante las fórmulas (10.4) y (10.5). Puesto que las funciones trigonométricas tienen período $2\pi$, es evidente que estos coeficientes vienen dados también por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

EJEMPLO 3. Dada $f(x) = x$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$, hállese la serie de Fourier de $f$.

*Solución.* Extendamos y estandaricemos $f$, según se muestra en la figura 10.6. Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

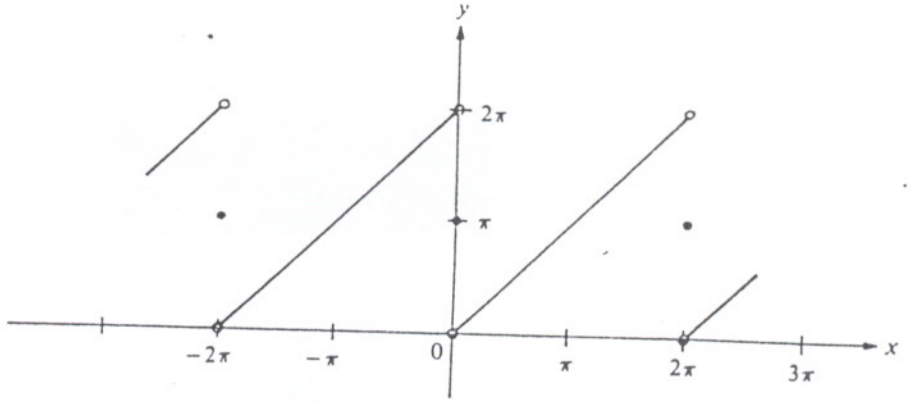


Figura 10.6

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{2}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Por lo tanto,

$$x \sim \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \quad \text{para} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Una función $f$ que sea continuamente derivable a trozos en un intervalo $I = \{x\colon -L \leqslant x \leqslant L\}$ para algún número $L > 0$ puede ser representada mediante una *serie de Fourier modificada*. Introducimos un cambio de variable y definimos $y$ y $g(y)$ mediante

$$y = \frac{\pi x}{L}, \qquad f(x) = f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) = g(y) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

La transformación aplica $I$ sobre $I' = \{x\colon -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, y entonces $g$ es una función continuamente derivable a trozos en $I'$. Por lo tanto,

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \operatorname{sen} ny), \qquad y \in I' \tag{10.6}$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\, dy, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) \operatorname{sen} ny\, dy.$$

Volviendo a la variable $x$ y a la función $f$ obtenemos

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

La serie (10.6) se convierte en

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \qquad x \in I.$$

EJEMPLO 4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: -1 \leqslant x < 0\} \\ x - 1 & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}, \end{cases}$$

hállese la serie de Fourier de $f$ en $I = I_1 \cup I_2$.

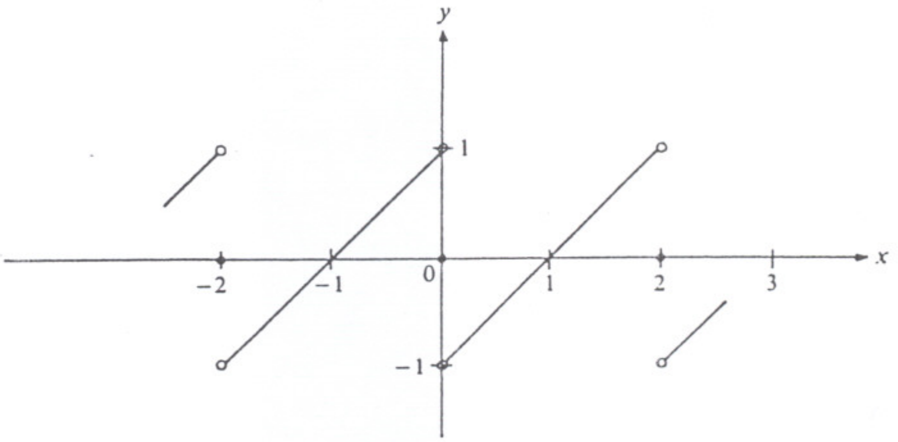


Figura 10.7

*Solución.* En la figura 10.7 se muestra la gráfica (estandarizada) de la extensión periódica de $f$. Obsérvese que $f$ es impar y que, por lo tanto, $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Además,

$$b_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{1}\, dx = -\frac{2}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Entonces

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n} \quad \text{para} \quad x \in I.$$

**Problemas**

En los problemas 1 a 4, desarróllese la función $f$ en serie de cosenos. Dibújese la extensión estandarizada de $f$.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: 0 \leqslant x < \pi/2\} \\ 0 & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{para} \quad x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}.$

3. $f(x) = x$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
4. $f(x) = x^3$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.

En los problemas 5 a 8, desarróllese la función $f$ en serie de senos. Dibújese la extensión estandarizada de $f$.

5. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: 0 \leqslant x < \pi/2\} \\ -1 & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$
6. $f(x) = \cos x$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
7. $f(x) = x$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.
8. $f(x) = x^3$ para $x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.

En los problemas 9 a 12, hállese la serie de Fourier de $f$ en el intervalo $I = \{x: -L < x < L\}$.

9. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: -2 \leqslant x < 0\} \\ -1 & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 2\}. \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \in I_1 = \{x: -2 \leqslant x < 0\} \\ x & \text{para} \quad x \in I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 2\}. \end{cases}$
11. $f(x) = x^2$ para $x \in I = \{x: -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
12. $f(x) = 1 - |x|$ para $x \in I = \{x: -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

## 10.3 TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA

Es importante disponer de criterios sencillos que permitan determinar si una serie de Fourier es convergente. En esta sección vamos a ver cómo obtener clases de funciones que tienen la propiedad de que la serie de Fourier converge a $f(x)$ para todo $x$ del dominio de la función $f$.

Empecemos por establecer una desigualdad que será útil a lo largo de todo el estudio de las series de Fourier.

**Teorema 10.2.** (Desigualdad de Bessel.) Supóngase que el dominio de $f$ es $I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y que $f^2$ es integrable en $I$. Sea

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

la serie de Fourier de $f$. Entonces

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \quad \text{(desigualdad de Bessel).} \tag{10.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $s_n(x)$ la $n$-ésima suma parcial de la serie; esto es,

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Escribamos ahora

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-s_n(t)]^2\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)s_n(t)\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(t)\,dt. \tag{10.8}$$

De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier,

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)s_n(t)\,dt. \tag{10.9}$$

Además, efectuando la multiplicación de los términos de $s_n^2(t)$ y teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas,

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)s_n(t)\,dt. \tag{10.10}$$

Combinando (10.8), (10.9) y (10.10) se obtiene

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-s_n(t)]^2\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-\pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right\}. \tag{10.11}$$

Si $f^2$ es integrable podemos hacer que $n$ tienda a infinito en (10.11), con lo que resulta

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt<\infty. \qquad \square$$

La desigualdad de Bessel muestra que $a_n$ y $b_n$ tienden a cero cuando $n\to\infty$ para toda función cuyo cuadrado sea integrable en $I=\{x:-\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

Una expresión que aparece con frecuencia en el estudio de la convergencia de series de Fourier es el *núcleo de Dirichlet*, $D_n$, definido por

$$D_n: x\to\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}.$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\equiv\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}=D_n(x), \tag{10.12}$$

se encuentra que el núcleo de Dirichlet tiene las siguientes propiedades:

(i) $D_n(x)$ es una función par de $x$.
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\,dx=\pi$.
(iii) $D_n$ tiene periodo $2\pi$.

**Lema 10.1.** Supóngase que $s_n$ es la $n$-ésima suma parcial de la serie de Fourier de una función continua a trozos $f$ con periodo $2\pi$. Entonces

$$s_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)-f(x+)]D_n(u)\,du+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-u)-f(x-)]D_n(u)\,du. \tag{10.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$, sustituyendo las expresiones de $a_k$ y $b_k$ obtenemos

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\right] dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] dt.$$

Haciendo $t = x + u$ en esta integral,

$$s_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku\right] du = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u)\, du.$$

Puesto que $D_n$ y $f$ son periódicos, con periodo $2\pi$, se puede cambiar el intervalo de integración a $I = \{u: -\pi < u < \pi\}$. Entonces

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+v) D_n(v)\, dv + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\, D_n(u)\, du.$$

Sustituyamos $v$ por $-u$ en la primera integral (recordando que $D_n(-v) = D_n(v)$), de forma que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] D_n(u)\, du.$$

Teniendo en cuenta la propiedad (ii) de $D_n$ obtenemos (10.13). □

**Teorema 10.3.** Supóngase que $f$ es continuamente derivable a trozos, estandarizada y periódica, con periodo $2\pi$. Entonces la serie de Fourier de $f$ converge a $f(x)$ para todo $x$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $s_n(x) - f(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo valor de $x$. Escribamos la expresión (10.10) del lema 10.1 en la forma

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+u) - f(x+)] D_n(u)\, du +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x-u) - f(x-)] D_n(u)\, du \equiv$$
$$\equiv S_n(x) + T_n(x).$$

Por la definición de $D_n(u)$,

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}u} \operatorname{sen}\left(n + \tfrac{1}{2}\right)u\, du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}u} \left(\operatorname{sen} nu \cos \tfrac{1}{2}u + \cos nu \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}u\right) du. \qquad (10.14)$$

Definamos $g_1$ y $g_2$ por las fórmulas

$$g_1(x, u) = \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \cos \tfrac{1}{2} u,$$

$$g_2(x, u) = \tfrac{1}{2}(f(x-u) - f(x-)).$$

Entonces $g_1$ y $g_2$ son continuamente derivables a trozos, con la posible excepción de $g_1$ en $u = 0$. No obstante, por la regla de l'Hôpital,

$$g_1(x, 0+) = -f'(x-),$$

luego $g_1$ es continuamente derivable a trozos en todo punto. Escribiendo ahora (10.14) en la forma

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g_1(x, u) \operatorname{sen} nu + g_2(x, u) \cos nu)\, du,$$

vemos que el segundo miembro es el $n$-ésimo coeficiente de Fourier de la serie de senos de $\frac{1}{2} g_1$ más el $n$-ésimo coeficiente de la serie de cosenos de $\frac{1}{2} g_2$. Según la desigualdad de Bessel, estos coeficientes tienden a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $T_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Análogamente, $S_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Un criterio de convergencia no tan restrictivo como el del teorema 10.3 se puede obtener mediante el lema de Riemann-Lebesgue, que además tiene otras aplicaciones importantes.

**Teorema 10.4.** (Lema de Riemann-Lebesgue.) Sea $f$ una función definida en $I = \{x\colon -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$, y supóngase que $|f|$ es integrable en $I$. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ los coeficientes de Fourier de $f$. Entonces $a_n, b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $|f|$ es integrable en sentido impropio.† (En otro caso, $f^2$ también es integrable y la desigualdad de Bessel demuestra la tesis.) Definamos

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leqslant N, \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| > N, \end{cases}$$

donde $N$ es un número positivo cualquiera. De acuerdo con la definición de integral impropia, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N$ suficientemente grande como para que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|\, dx < \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Puesto que $|f_N(x)|$ está acotado por $N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)|^2\, dx \leqslant N \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)|\, dx \leqslant N \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty.$$

† Véase en la sección 11.2 un estudio de las integrales impropias.

Por lo tanto, por la desigualdad de Bessel, los coeficientes de Fourier de $f_N(x)$ tienden a 0 cuando $n \to \infty$. Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe un $n_0$ tal que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \cos nx\, dx\right| < \tfrac{1}{2}\epsilon, \qquad \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \operatorname{sen} nx\, dx\right| < \tfrac{1}{2}\epsilon \quad \text{para} \quad n > n_0.$$

En consecuencia, para $n > n_0$ y $N$ suficientemente grande

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\right| \leqslant \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \cos nx\, dx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_N(x)) \cos nx\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\epsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)| \cdot |\cos nx|\, dx < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

El resultado para la serie de senos se obtiene de la misma forma. □

Con la ayuda del lema de Riemann-Lebesgue podemos establecer el siguiente criterio de convergencia de las series de Fourier, algo más general que el del teorema 10.3.

**Teorema 10.5.** (Criterio de Dini.) Supóngase que $f$ es una función estandarizada y periódica, con periodo $2\pi$, y que las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x+u) - f(x+)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}\right| du, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x-u) - f(x-)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}\right| du \tag{10.15}$$

son finitas para algún valor de $x$. Entonces la serie de Fourier de $f$ converge a $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Se repite la demostración del teorema 10.3 hasta la ecuación (10.14). Entonces, dado que las integrales de (10.15) son finitas, podemos aplicar el lema de Riemann-Lebesgue a las funciones $g_1$ y $g_2$ definidas en la demostración del teorema 10.3. Como se supone que $f$ está estandarizada, se llega a la conclusión de que $f(x) - s_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

*Observaciones*

(i) Como la magnitud $|(\operatorname{sen} \frac{1}{2} u)/u|$ está acotada, las condiciones (10.15) pueden ser sustituidas por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x+u) - f(x+)}{u}\right| du < \infty,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x-u) - f(x-)}{u}\right| du < \infty. \tag{10.16}$$

(ii) Es interesante disponer de criterios acerca de la propia $f$, en lugar de condiciones como (10.16), generalmente difíciles de comprobar. Obsérvese que *si $f$ tiene una derivada acotada*, entonces las integrales de (10.16) son ciertamente finitas; de hecho están acotadas por $2\pi \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f'(x)|$.

(iii) Una función es *continua en el sentido de Hölder* si y sólo si para cada $x$ existen constantes $M$ y $\alpha$, con $0 < \alpha \leqslant 1$, tales que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

para todo $y$ de $I = \{y: -\pi \leqslant y \leqslant \pi\}$. Si $f$ es continua en el sentido de Hölder, entonces las integrales de (10.16) están acotadas por una integral de la forma

$$A\int_{-\pi}^{\pi} |u|^{\alpha-1}\,du.$$

Esta integral es finita si $\alpha$ es positivo; toda función continua en el sentido de Hölder satisface la condición (10.16).

Es útil saber cuándo una serie de Fourier puede ser derivada o integrada término a término. Para ello sirve el siguiente lema.

**Lema 10.2.** Supóngase que $f$ tiene periodo $2\pi$ y es continuamente derivable a trozos. Entonces sus coeficientes de Fourier, $a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, satisfacen las desigualdades

$$|a_n| \leqslant \frac{C}{n}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{C}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $C$ es una constante que depende sólo de $f$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el salto de $f$ se produce en $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < < x_{r-1} < x_r = \pi$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\cos nt\,dt.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{f(t)\operatorname{sen} nt}{n}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\operatorname{sen} nt\,dt.$$

Como $f$ y $f'$ están acotadas, la acotación para $a_n$ es inmediata. El resultado para $b_n$ se obtiene de forma análoga. □

**Corolario.** Supóngase que $f$ y sus $p - 2$ primeras derivadas son periódicas, con periodo $2\pi$, y que $f^{(p-1)}$ es continuamente derivable a trozos. Entonces los coeficientes de Fourier $a_n$, $b_n$ de $f$ satisfacen las desigualdades

$$|a_n| \leqslant \frac{C}{n^p}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{C}{n^p}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $C$ no depende de $n$.

Para demostrar el corolario seguimos el mismo método que en la demostración del lema 10.2, integrando por partes $p$ veces. El corolario indica que, cuantas más derivadas tenga la función, más rápidamente converge la serie de Fourier.

**Teorema 10.6.** (Derivación término a término de series de Fourier.) Supóngase que $f$ es continua en todo punto y periódica, con periodo $2\pi$. Supóngase que $f'$ es continuamente derivable a trozos y estandarizada. Entonces

(i) La serie que se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de $f$ converge en todo punto a $f'(x)$.
(ii) La serie de Fourier de $f$ converge uniformemente a $f(x)$ para todo $x$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los saltos de $f'$ se producen en $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{r-1} < x_r = \pi$. Definamos

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f'(t)\,dt$$

y observemos que $g$ es continua. Además, como $g' - f' \equiv 0$ para $x_{i-1} < x < x_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, la función $g - f$ tiene que ser constante en cada subintervalo. Puesto que $g$ y $f$ son ambas continuas, $g - f$ es idénticamente constante. Denotemos los coeficientes de Fourier de $f'$ por $A_n, B_n$. Para $n = 1, 2, \ldots$ escribimos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\cos nt\,dt.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\frac{f(x_i)\operatorname{sen} nx_i - f(x_{i-1})\operatorname{sen} nx_{i-1}}{n} + \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\operatorname{sen} nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} nt\,dt = \frac{B_n}{n}\cdot$$

Análogamente,

$$b_n = -\frac{A_n}{n}\cdot$$

Derivando la serie

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx)$$

término a término se obtiene la serie de Fourier de $f'$. El hecho de que la serie de Fourier de $f'$ sea convergente es consecuencia del teorema 10.3.

Para demostrar que la serie de Fourier de $f$ es uniformemente convergente, aplicamos el corolario del lema 10.2:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx\right| \leqslant 2C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot$$

Como la serie de constantes del segundo miembro es convergente, la serie de Fourier lo es uniformemente. □

**Teorema 10.7.** (Integración término a término de las series de Fourier.) Supóngase que $f$ es continuamente derivable a trozos y periódica, de periodo $2\pi$. Supóngase que el coeficiente de Fourier $a_0$ es cero y defínase

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt.$$

Entonces la serie de Fourier de $F$ se obtiene integrando término a término la de $f$, salvo el término constante $A_0$, que viene dado por

$$A_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. La condición $a_0 = 0$ se impone para que $F$ tenga periodo $2\pi$. La relación entre la serie de Fourier de $F$ y la de $f$ es entonces consecuencia del teorema 10.6. Para hallar $A_0$, observemos que

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{t}^{\pi} dx\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - t)f(t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tf(t)\,dt. \qquad \square$$

*Observaciones*

(i) Si la función $f$ no cumple la condición $a_0 = 0$, definimos $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0$, a la que sí es aplicable el teorema 10.7.

(ii) El teorema 10.7 no requiere la convergencia uniforme de la serie derivada $F'(x) = f(x)$. En general, la serie integrada tendrá mayor velocidad de convergencia que la serie original.

EJEMPLO. En el ejemplo 1 de la sección 10.1 obtuvimos el desarrollo

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sen} nx}{n}, \qquad x \in I = \{x:\ -\pi < x < \pi\}.$$

Utilícese este resultado para hallar la serie de Fourier de $F: x \to x^2$ en $I$.

*Solución.* Tenemos que $a_0 = 0$ en el desarrollo de $f$; la función es continuamente derivable a trozos. Por lo tanto, es aplicable el teorema 10.7. Hagamos

$$F'(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sen} nx}{n}$$

donde $F(x) = x^2 - \pi^2$. Entonces

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}.$$

**Problemas**

1. Hállese el desarrollo de Fourier de $f: x \to (1/3)(\pi^2 x - x^3)$ en $I = \{x:\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$ y pruébese que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6} = \pi^6/945$.
2. Utilícese el teorema 10.7 para encontrar el desarrollo de Fourier de $f: x \to |x|$ en $I = \{x:\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

3. Hállese el desarrollo de Fourier de la función $f$ dada por

$$f: x \to \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - \pi x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\frac{1}{2}(x^2 + \pi x) & -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Utilizando el resultado del problema 1, hállese la serie de Fourier de $f: x \to (1/12)(\pi^2 - x^2)^2$ en $I = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

5. Hállense las series de Fourier de las funciones $f$ y $F$ dadas por

$$f: x \to |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$F: x \to \begin{cases} -1 + \cos x - \frac{2}{\pi} x & \text{para } I_1 = \{x: -\pi \leqslant x \leqslant 0\}, \\ 1 - \cos x - \frac{2}{\pi} x & \text{para } I_2 = \{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}. \end{cases}$$

6. Hállese la serie de Fourier de la función $f$ dada por

$$f: x \to \begin{cases} -(\pi + x) & \text{para } I_1 = \left\{x: -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\pi\right\}, \\ x & \text{para } I_2 = \left\{x: -\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi\right\}, \\ \pi - x & \text{para } I_3 = \left\{x: \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi\right\}. \end{cases}$$

7. Supóngase que $f$, función periódica con periodo $2\pi$, tiene derivadas continuas de todos los órdenes para $-\infty < x < \infty$. Sean $a_n$, $b_n$ los coeficientes de Fourier de $f$. ¿Cómo se comportan los cocientes $a_n/n^k$, $b_n/n^k$ cuando $n \to \infty$, siendo $k$ un entero positivo?