

b Pauta P1 Examen

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

1.- Utilizando residuos, calcular la siguiente integral compleja:

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz$$

Si Γ es la circunferencia de ecuación $|z - 1| = 3$

Sol:

Denotemos como
$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2(z - i)}$$

de esta forma es fácil notar que hay dos puntos singulares donde la función no está definida, en $z = 0$ y en $z = i$. Ahora, debemos notar que la curva Γ encierra ambos polos y entonces podemos afirmar por el Teorema de Residuos que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(i)]$$

Calculemos los residuos. Llamemos $\phi(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{(z - i)}$, entonces vemos que es

analítica en $z = 0$ y que $\phi(0) \neq 0$. Además podemos denotar $f(z) = \frac{\phi(z)}{z^2}$, y de esta forma afirmar que:

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{\phi^{(2-1)}(0)}{(2-1)!} = \phi'(0) = \left(\frac{2ze^{z^2}(z-i) - (e^{z^2} - 1)}{(z-i)^2} \right)_{z=0} = 0$$

Ahora llamemos $\phi_1(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$, que es una función analítica en $z = i$ y que $\phi_1(i) \neq 0$. Además $f(z) = \frac{\phi_1(z)}{z - i}$, de esta forma se puede afirmar que:

$$\operatorname{Res} f(i) = \phi_1(i) = \left(\frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \right)_{z=i} = \frac{e^{-1} - 1}{-1} = 1 - e^{-1}$$

Así que

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(i)] = 2\pi i [0 + 1 - e^{-1}] = 2\pi i (1 - e^{-1})$$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Por encontrar los puntos singulares (1 punto)
- Por decir que la curva encierra ambos puntos (0,5 puntos)
- Por expresar el valor de la integral vía residuos (1 punto)
- Por encontrar los valores de los residuos (3 Puntos)
- Por explicar la forma de obtener los residuos (que $\phi(z)$ es analítica y distinta de cero en cada punto) (0,5 puntos)