Pauta P3 Examen

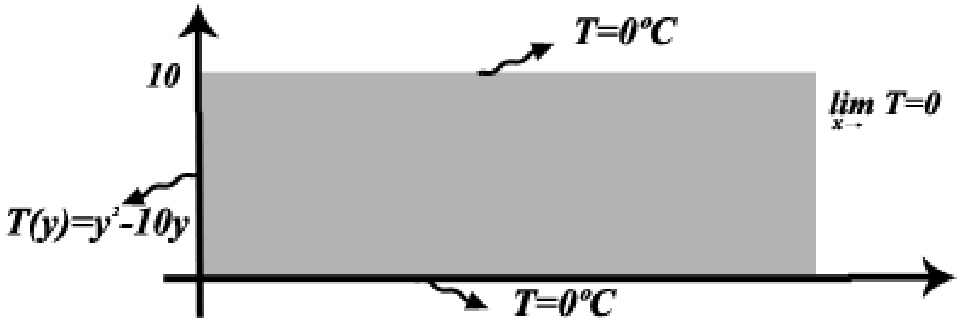
Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

3.- Determinar la temperatura estacionaria en los puntos de la lámina rectangular seminfinita de la figura, conociendo los valores de la frontera como se indican:



HINT: $T_{xx} + T_{yy} = 0$

<u>Sol:</u> El Hint nos dice que se debe cumplir la ecuación $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ y luego ocupamos él método de separación de variables, en donde:

$$T(x,y) = X(x)Y(y)$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

reemplazándolas en la ecuación del hint, queda:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad [1]$$

El siguiente paso en el método es decir que esta última igualdad es igual a $-\lambda^2$ o a λ^2. Supongamos que es con $-\lambda^2$, de esta forma queda:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} X(x) = ACos(\lambda x) + BSen(\lambda x) \\ Y(y) = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y} \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$T(x,y) = X(x)Y(y) = \left(ACos(\lambda x) + BSen(\lambda x)\right)\left(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}\right)$$

El problema es que al aplicar la condición de borde

$\lim\limits_{x\to\infty} T(x,y) = 0$ tal límite no existe, salvo que A y B sean iguales a 0, dejando sin solución la ecuación del calor. Esto implica que nuestra suposición fue incorrecta y debemos ocupar λ^2 en vez de $-\lambda^2$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \\ Y(y) = CCos(\lambda y) + DSen(\lambda y) \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$T(x,y) = X(x)Y(y) = \left(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\right)\left(CCos(\lambda y) + DSen(\lambda y)\right)$$

Y se debe aplicar ahora las condiciones de borde:

$$\lim_{x\to\infty} T(x,y) = \lim_{x\to\infty}\left(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\right)\left(CCos(\lambda y) + DSen(\lambda y)\right) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow T(x,y) = e^{-\lambda x}\left(\tilde{A}Cos(\lambda y) + \tilde{B}Sen(\lambda y)\right) \qquad \tilde{A} = BC \quad \tilde{B} = BD$$

Aplicamos la segunda condición de borde:

$$T(x,0)=e^{-\lambda x}\left(\tilde{A}Cos(\lambda 0)+\tilde{B}Sen(\lambda 0)\right)=\tilde{A}e^{-\lambda x}=0$$
$$\Rightarrow \tilde{A}=0$$
$$\Rightarrow T(x,y)=\tilde{B}e^{-\lambda x}Sen(\lambda y)$$

Aplicamos la tercera condición:

$$T(x,10)=\tilde{B}e^{-\lambda x}Sen(\lambda 10)=0$$

Descartamos la opción $\tilde{B}=0$ ya que nuevamente daría solución nula, por tanto

$$Sen(\lambda 10)=0\Rightarrow 10\lambda=n\pi\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{10} \qquad n=1,2,3.....$$

$$T_n(x,y)=\tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi x}{10}}sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)$$

Ahora por el principio de superposición, se tiene que:

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi x}{10}}sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)$$

Ocupamos la última condición

$$T(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)=\left(y^2-10y\right)=\phi(y)$$

Lo que es un desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $\phi(y)=y^2-10y$.
De esta forma:

$$\tilde{B}_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(y^2-10y\right)sen\left(\frac{n\pi y}{l}\right)dy=\frac{2}{10}\int_0^{10}\left(y^2-10y\right)sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)dy$$
$$\Rightarrow$$
$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\int_0^{10}\left(y^2-10y\right)sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)dy\right)e^{-\frac{n\pi x}{10}}sen\left(\frac{n\pi y}{10}\right)$$

Obs: Es posible incluso calcular la integral.

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Por ocupar separación de variables y llegar a la igualdad [1] (1.0 Puntos)
- Por llegar a las soluciones de X e Y, especificando si se ocupo λ^2 y porqué (2.0 Puntos)
- Por ocupar la primera condición de borde (0.5 Puntos)
- Por ocupar la segunda condición de borde (0.5 Puntos)
- Por ocupar la tercera condición de borde (0.5 Puntos)
- Por ocupar el principio de superposición (0.5 Puntos)
- Por ocupar la ultima condición de borde, dando a lugar la serie de Fourier y calcular las constantes restantes (1.0 Puntos)