Pauta P4 Examen

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

4.- Sea ϕ un campo escalar definido en coordenadas cilíndricas por:

$$\phi(r,\theta,z) = r^3 sen\theta Logz$$

a) Hallar la expresión de ϕ en coordenadas cartesianas.

b) Calcular $\nabla^2\phi$ en coordenadas cartesianas

c) Calcular $\nabla^2\phi$ en coordenadas cilíndricas. Comparar con b)

Sol:

Parte a)

Basta reconocer que $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$ y que $y = rsen\theta$, de esta forma:

$$\phi(r,\theta,z) = r^3 sen\theta Logz = r^2(rsen\theta)Log(z) = (x^2+y^2)yLogz$$

Parte b)

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xyLogz \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2yLogz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y^2Logz + (x^2+y^2)Logz \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6yLogz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{(x^2+y^2)y}{z} \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{(x^2+y^2)y}{z^2}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 8yLogz - \frac{(x^2 + y^2)y}{z^2}$$

Parte c)

En coordenadas generalizadas se tiene que:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right)$$

$$u_1 = \hat{r} \qquad h_1 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\| = 1$$

$$u_2 = \hat{\theta} \qquad h_2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\| = r$$

$$u_3 = \hat{k} \qquad h_3 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial k}\right\| = 1$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 3r^2 sen\theta Loz \Rightarrow r\frac{\partial\phi}{\partial r} = 3r^3 sen\theta Loz \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 9rsen\theta Logz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = r^3\cos\theta Logz \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -rsen\theta Logz$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{r^3 sen\theta}{z} \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{r^3 sen\theta}{z^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 8rsen\theta Logz - \frac{r^3 sen\theta}{z^2}$$

Volviendo a efectuar los cambios de variable de $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $y = rsen\theta$, se tiene que este último valor es igual a el Laplaciano en coordenadas cartesianas.

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Parte a) (1.0 Puntos)
- Parte b) (2.0 Puntos)
- Parte c)
    - Por escribir la fórmula del Laplaciano en Coordenadas Generalizadas (1.0 Puntos)
    - Por calcular los h (0.5 Puntos)
    - Por encontrar el Laplaciano de la función (1.0 Punots)
    - Por comparar con b) (0.5 Puntos)