Pauta P2 Examen

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

2.- a) Determinar la naturaleza de la EDP siguiente (elíptica, parabólica o hiperbólica) y obtener la solución general

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

b) Sea u un campo escalar armónico sobre $S\subset\mathbb{C}$. Probar que la función de variable compleja f definida por

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

es analítica en S.

Sol:

a) La forma general de este tipo de EDP se escribe como:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2f\frac{\partial u}{\partial x}+2g\frac{\partial u}{\partial y}+eu=0$$

para el caso particular de de nuestra EDP, es:

$2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ e identificamos que:

$a=1 \quad h=0 \quad b=2$

$f=0 \quad g=0 \quad e=0$

Ahora, para saber su naturaleza calculamos

$$ab-h^2=2-0=2>0\Rightarrow \textit{Elíptica}$$

Para ver su solución general, debemos calcular las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$b\lambda^2 + 2h\lambda + a = 0 \rightarrow 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

de esta forma podemos asegurar que la solución general es:

$$u(x,y) = F\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}iy\right) + G\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}iy\right)$$

b) Para *f* que sea analítica en un punto $z \in S$ debe cumplirse que exista de la derivada de la función en una vecindad de *z* ($V_\delta(z)$), y que para las funciones *u* y *v* existan las derivadas parciales de primer orden y deben ser continuas en el punto $z \in S$ y cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemmann en dicho punto.

Debido a que el campo escalar *u* es armónico, se cumple que *u* es dos veces diferenciable sobre *S* y de esta forma las derivadas parciales son continuas.

Veamos que cumplan Cauchy-Riemmann, para ello, la forma general de una función es:

$$f(z) = u_1(z) + v_1(z)i$$

$$C - R \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases}$$

en nuestro caso se tiene que:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad v_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{array}$$

La función *u* para ser Armónica debe cumplir con la ecuación de Laplace, que dice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

y de esta forma queda claro que cumple la primera condicion de Cauchy-Riemmann

Como la función en armónica, debe ser clase C^2 y por ende, cumplir el Teorema de Schwartz en que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow -\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

de esta forma cumple la otra de las ecuaciones de Cauchy-Riemmann, dejando en claro que la función en analítica en un punto $z \in S$

<u>Asignación de Puntaje:</u>

- Punto Base (1 punto)
- Parte a)
  - Demostrar que la EDP es elíptica (1 Punto)
  - Encontrar las raíces de la ecuación cuadrática (1.5 Puntos)
  - Escribir la solución general (0.5 Puntos)
- Parte b)
  - Decir el porque de que las derivadas parciales son continuas (1.0 Puntos)
  - Demostrar Cauchy-Riemmann (2.0 Puntos)