# Pauta P5 Examen

**Matemáticas Aplicadas MA26B**

**Semestre Primavera 2007**

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

5.- Desarrollar en serie de Laurent la función $f$ de variable compleja definida por:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}$$

en los siguientes anillos, tomando como $z_0 = 0$

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 2$

*Sol:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$$

por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(z-1)}$$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ 2B - A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$f(z) = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + z/2}\right) + \frac{1}{(1-z)}\right]$$

Parte a)

Como $|z|<1$ y en particular $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ se tiene que:

$$\frac{1}{(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{\left(1+z/2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow\ f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)z^n$$

Parte b)

Se sigue cumpliendo que $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, pero ya $|z|>1$, así que modificamos la función con tal de poder ocupar que $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z/2}\right)+\frac{1}{(1-z)}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z/2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\left(1-1/z\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{\left(1+z/2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{1}\frac{z^n}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}z^n$$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
  - Hacer fracciones parciales para dejar en una forma mas optima la función (0.5 Puntos)
  - Saber las series geométricas y reemplazarlas (explicando porqué se puede) (2.0 Puntos)
  - Llegar la Serie de Laurent de la parta a) (1.0 Puntos)
  - Volver a transformar la función para que quede mas fácil de utilizar series geométricas (0.5 Puntos)
  - Saber las series geométricas y reemplazarlas (explicando porqué se puede) (2.0 Puntos)
  - Llegar la Serie de Laurent de la parta b) (1.0 Puntos)