Pauta P1 Control 2

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

1.- a) Un campo vectorial $\vec{f} : A \subset R^3 \to R^3$ de clase $C^1(A)$ está definido por:

$$\vec{f}(x,y,z) = \nabla(z\phi) + \alpha\phi\widehat{k}$$

donde α es un número real fijo y $\phi : A \subset R^3 \to R$ es un campo escalar armónico sobre A, probar que:

$$div(\vec{f}) = (2+\alpha)\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

b) Si $\vec{k}$ es un vector constante probar que:

$$\nabla \times \left(\vec{k} \times \vec{f}\right) = \vec{k}\nabla \bullet \vec{f} - \left(\vec{k} \bullet \nabla\right)\vec{f}$$

donde $\vec{f}$ es un campo vectorial diferenciable.

Sol:

a) Tenemos la función $\vec{f}(x,y,z) = \nabla(z\phi) + \alpha\phi\widehat{k}$

y sabemos que:

$$\nabla(z\phi) = \frac{\partial}{\partial x}(z\phi)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(z\phi)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(z\phi)\hat{k}$$

$$= z\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + z\frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \left(\phi + z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{f}(x,y,z) = z\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + z\frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \left((\alpha+1)\phi + z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{k}$$

entonces

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left((\alpha+1)\phi + z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= z\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + (\alpha+1)\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= z\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) + (\alpha+2)\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

pero el enunciado nos dice que ϕ es un campo escalar armónico, por ende cumple la ecuación de Laplace, que dice:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

así que

$$div(\vec{f}) = (2+\alpha)\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

b) Se sabe que:

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\nabla\bullet\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\bullet\vec{a}) + (\vec{b}\bullet\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\bullet\nabla)\vec{b}$$

en este caso:

$$\nabla\times(\vec{k}\times\vec{f}) = \vec{k}(\nabla\bullet\vec{f}) - \vec{f}(\nabla\bullet\vec{k}) + (\vec{f}\bullet\nabla)\vec{k} - (\vec{k}\bullet\nabla)\vec{f}$$

pero al ser $\vec{k}$ un vector constante, se tiene que:

$$(\vec{f}\bullet\nabla)\vec{k} = 0 = \nabla\bullet\vec{k}$$

teniendo entonces que

$$\nabla\times(\vec{k}\times\vec{f}) = \vec{k}(\nabla\bullet\vec{f}) - (\vec{k}\bullet\nabla)\vec{f}$$

<u>Asignación de Puntaje:</u>

- Punto Base (1 punto)
- Parte a) (4 Puntos Total)
    - Encontrar $\nabla(z\phi)$ y reemplazarlo en $\vec{f}$ (1 Punto)

- Encontrar la divergencia de $\vec{f}$ (2 Puntos)
- Ocupar la Ecuación de Laplace y concluir (1 Punto)

- Parte b) (2 Puntos Total)
  - Ocupar o llegar a la fórmula (1 Punto)
  - Ver las igualdades a cero debido a que $\vec{k}$ es vector constante (1 Punto)