Pauta P5 Control 2

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

5.- Un campo escalar ϕ el cual no es nunca nulo, tiene las propiedades de que $\|\nabla\phi\|^2 = 2\phi$ y $div(\phi\nabla\phi) = 8\phi$. Calcular la integral de superficie $\oiint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Sigma$, donde Σ es la superficie de la esfera de radio R con centro en el origen y $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ es la derivada direccional del campo escalar ϕ en la dirección y sentido de la normal unitaria exterior a Σ.

<u>*Sol:*</u>

ϕ es un campo escalar, y su gradiente un campo vectorial, por ende:

$$
\begin{aligned}
div(\phi\nabla\phi) &= \phi div(\nabla\phi) + \nabla\phi \bullet \nabla\phi \\
&= \phi div(\nabla\phi) + \|\nabla\phi\|^2
\end{aligned}
$$

y como $\|\nabla\phi\|^2 = 2\phi$ y $div(\phi\nabla\phi) = 8\phi$, y asumiendo que $\phi \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\phi div(\nabla\phi) + \|\nabla\phi\|^2 = 8\phi \\
&\phi div(\nabla\phi) + 2\phi = 8\phi \\
&\phi div(\nabla\phi) = 6\phi \\
&div(\nabla\phi) = 6
\end{aligned}
$$

además como $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \bullet \hat{n}$

entonces

$$
\oiint_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Sigma = \oiint_\Sigma \nabla\phi \bullet \hat{n} d\Sigma
$$

y de esta forma podemos ocupar el Teorema de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \nabla\phi \bullet \hat{n} d\Sigma = \iiint_{R} div(\nabla\phi) dV = 6\iiint_{R} dV = 6\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 8\pi R^3$$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Calcular $div(\phi\nabla\phi)$ (2 Punto)
- Reemplazar los datos y encontrar $div(\nabla\phi)$ (1 Punto)
- Ocupar Teorema de Gauss y llegar al resultado (3 Punto)