Pauta P4 Control 2

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

4.- Verificar el Teorema de Stokes si $\vec{f}: R^3 \to R^3$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{f}(x,y,z) = y^2\hat{i} + xy\hat{j} - 2xz\hat{k}$$

y Σ es la superficie definida por la hemiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $z \geq 0$ $\hat{n} \bullet \hat{k} > 0$.

<u>*Sol:*</u>

$$\vec{f}(x,y,z) = y^2\hat{i} + xy\hat{j} - 2xz\hat{k}$$
$$= (y^2, xy, -2xz)$$

El Teorema de Stokes dice:

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{f}) \bullet \hat{n} d\Sigma = \oint_{\Gamma = Fr(\Gamma)} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Calcularemos la primera integral de superficie.

$$\nabla \times \left(\vec{f}\right) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$
$$= (-2z - 0, 0 + 2z, -y)$$
$$= (-2z, 2z, -y)$$

además la normal al casquete esférico es:

$$\hat{n}_{\Sigma} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

de esta forma

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{f}) \bullet \hat{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} (-2z, 2z, -y) \bullet \frac{1}{R}(x, y, z) d\Sigma$$
$$= \frac{1}{R}\int_{\Sigma} (-2zx + zy) d\Sigma$$

pasamos a coordenadas esféricas, donde:

$$d\Sigma = R^2 sen\theta d\theta d\varphi$$
$$x = Rsen\theta \cos\varphi$$
$$y = Rsen\theta \cos\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

de esta forma:

$$\frac{1}{R}\int_{\Sigma} (-2zx + zy) d\Sigma = \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(-2R^2 \cos\theta sen\theta \cos\varphi + R^2 \cos\theta sen\theta sen\varphi\right) R^2 sen\theta d\varphi d\theta$$
$$= 0$$

ya que $\int_0^{2\pi} sen\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$

Ahora calculamos la segunda integral de línea, en donde la curva a integrar es una circunferencia de radio R centrada den el origen y que se encuentra en el plano XY. La parametrizamos:

$$\vec{\gamma}(\theta) = (R\cos\theta, Rsen\,\theta, 0)$$
$$\vec{\gamma}\,'(\theta) = (-Rsen\,\theta, R\cos\theta, 0)$$
$$\vec{f}(\vec{\gamma}(\theta)) = (R^2 sen^2\theta, R^2 \cos\theta sen\,\theta, 0)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{f}\cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\gamma}(\theta)) \bullet \vec{\gamma}\,'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(R^2 sen^2\theta, R^2 \cos\theta sen\theta, 0\right) \bullet (-Rsen\theta, R\cos\theta, 0) d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-R^3 sen^3\theta + R^3 \cos^2\theta sen\theta\right) d\theta$$
$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(-sen\theta + 2\cos^2\theta sen\theta\right) d\theta$$
$$= 0$$

por lo que se verifica el Teorema de Stokes

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Calcular el rotacional del campo vectorial (1 Punto)
- Encontrar la normal a la superficie (0.5 Puntos)
- Hacer producto punto y llegar a la integral a calcular (1 Punto)
- Pasar a coordenadas esféricas y llegar a el resultado (1.5 Puntos)
- Parametrizar la curva de la frontera de la superficie y calcular su circulación (2 Puntos)