<u>Pauta P2 Control 2</u>

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

2.- Probar utilizando el Teorema de Green que la integral de línea

- $\oint_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

sobre cualquier curva Γ simple, seccionalmente regular de Jordan que contiene al origen vale 2π

<u>*Sol:*</u>

El campo escalar esta en forma diferencial en la integral de línea, y entonces queda de la forma:

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

pero este campo vectorial está definido para todo R^2 menos el origen, en donde hay un hueco. Además se tiene que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\left(x^2 + y^2 - 2x^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{\left(y^2 - x^2\right)}{x^2 + y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

entonces, para estos casos donde hay sólo un hueco y $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, el Teorema de Green nos dice que dos curvas seccionalmente regulares de Jordan tienen la misma circulación (si ambas no poseen mas huecos entre ellas), o sea

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr}$$

de esta forma, basta elegir una curva Γ_1 que encierre al origen y calcular su circulación. Una de estas curvas es la circunferencia de radio R (utilizamos esta por ser simple el calculo de su circulación).

Parametrización:

$$\vec{\gamma}(\phi) = (R\cos\phi, Rsen\phi)$$
$$\vec{\gamma}'(\phi) = (-Rsen\phi, R\cos\phi)$$
$$\vec{f}(\vec{\gamma}(\phi)) = \left(\frac{-Rsen\phi}{R^2\cos^2\phi + R^2 sen^2\phi}, \frac{R\cos\phi}{R^2\cos^2\phi + R^2 sen^2\phi} \right) = \frac{1}{R}(-sen\phi, \cos\phi)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\gamma}(\phi)) \bullet \vec{\gamma}'(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}(-sen\phi, \cos\phi) \bullet (-Rsen\phi, R\cos\phi) d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} (sen^2\phi + \cos^2\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

apoyados en lo anterior:

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} = 2\pi$$

que es lo que había que demostrar.

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Observar que el campo vectorial tiene un hueco en el origen (1 Punto)
- Detallar que $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ (1,5 Puntos)
- Explicar que se requiere y que dice el Teorema de Green en estos casos (1 Punto)
- Calcular la circulación de otra curva Γ_1 y concluir (2,5 Puntos)