<u>Pauta P3 Control 2</u>

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

3.- Si $\vec{a}$ es un vector constante arbitrario y si V es el volumen de una región R en R^3 acotada por una superficie cerrada simple seccionalmente regular orientada positivamente (normal unitaria exterior) probar que

- $$\oiint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n}\times(\vec{a}\times\vec{r})d\Sigma = 2V\vec{a}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición.

<u>Sol:</u>

Se debe probar que

$$\oiint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n}\times(\vec{a}\times\vec{r})d\Sigma = 2V\vec{a}$$

lo que es idéntico a probar que:

$$\vec{k}\bullet \oiint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n}\times(\vec{a}\times\vec{r})d\Sigma = 2V\vec{k}\bullet\vec{a}$$

donde $\vec{k}$ es un vector constante.

Por lo visto en clases

$$\vec{k}\bullet \oiint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n}\times(\vec{a}\times\vec{r})d\Sigma = \oiint_{\Sigma=Fr(R)} \vec{k}\bullet\left[\hat{n}\times(\vec{a}\times\vec{r})\right]d\Sigma$$

Además tenemos la identidad:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\vec{c}$$

asé que

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \vec{k} \bullet [\hat{n} \times (\vec{a} \times \vec{r})] d\Sigma = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \vec{k} \bullet [(\vec{n} \bullet \vec{r})\vec{a} - (\vec{n} \bullet \vec{a})\vec{r}] d\Sigma$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \left[(\vec{n} \bullet \vec{r})\vec{k} \bullet \vec{a}\right] d\Sigma - \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \left[(\vec{n} \bullet \vec{a})\vec{k} \bullet \vec{r}\right] d\Sigma$$

$$= \left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} (\vec{r} \bullet \vec{n}) d\Sigma - \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \left[\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) \bullet \vec{n}\right] d\Sigma$$

El Teorema de la Divergencia dice que

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \vec{f} \bullet \vec{n} d\Sigma = \iiint_R div\left(\vec{f}\right) dV$$

de esta forma

$$\left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} (\vec{r} \bullet \vec{n}) d\Sigma - \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \left[\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) \bullet \vec{n}\right] d\Sigma = \left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) \iiint_R div(\vec{r}) dV - \iiint_R div\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) dV$$

Ahora

$$div(\vec{r}) = div((x, y, z)) = 3$$
$$div\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) = \left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right) div(\vec{a}) + \nabla\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right) \bullet \vec{a}$$

ya que $\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)$ actúa como un campo escalar. Además por ser $\vec{a}$ un vector constante, $div(\vec{a}) = 0$ y además $\nabla\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right) = \vec{k}$, por ende

$$div\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) = \vec{k} \bullet \vec{a}$$

entonces

$$\left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) \iiint_R div(\vec{r}) dV - \iiint_R div\left(\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right)\vec{a}\right) dV = \left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) \iiint_R 3 dV - \iiint_R \left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right) dV = 2V\left(\vec{k} \bullet \vec{a}\right)$$

así que

$$\vec{k} \bullet \oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n} \times (\vec{a} \times \vec{r}) d\Sigma = 2V\vec{k} \bullet \vec{a}$$

y esto implica que

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma=Fr(R)} \hat{n} \times (\vec{a} \times \vec{r}) d\Sigma = 2V\vec{a}$$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Multiplicar por un vector constante (0.5 Punto)
- Ocupar la identidad $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$ (1 Punto)
- Ocupar el Teorema de la Divergencia correctamente (2.5 Puntos)
- Calcular las divergencias (1.5 Puntos)
- Concluir (0.5 Puntos)