

AUXILIAR EXTRA 11/10/07

Matemáticas Aplicadas MA26B

Prof. Cátedra: Orlando Hofer P.

Prof. Auxiliar: Carlos Hübner T.

Algunas cosas que deben saber para el Control 2:

ϕ : Campo escalar $R^3 \rightarrow R$

$\vec{f}$: Campo vectorial $R^3 \rightarrow R^3$

- $\nabla \cdot (\phi \vec{f}) = \phi (\nabla \cdot \vec{f}) + \nabla \phi \cdot \vec{f}$
- $\nabla \times (\phi \vec{f}) = \phi (\nabla \times \vec{f}) + \nabla \phi \times \vec{f}$
- $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$ (Laplaciano)
- $\text{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$
- $\text{div}(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

- Teorema de Stokes

$$\int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} = \oint_{\partial \Sigma} \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

- Teorema de Gauss: (o de la divergencia)

$$\int_E \text{div}(\vec{f}) dV = \int_E (\nabla \cdot \vec{f}) dV = \oint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Obs: E es el espacio encerrado por la superficie cerrada Σ .

Todos estos puntos están demostrados en clases, salvo el segundo que demostraremos acá.

$$\vec{\phi f} = (\phi f_1, \phi f_2, \phi f_3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{rot}(\vec{\phi f}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(\phi f_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_2), \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_3), \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_1) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} f_3 + \phi \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} f_2 - \phi \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial z} f_1 + \phi \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} f_3 - \phi \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} f_2 + \phi \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_1 - \phi \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} f_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} f_2, \frac{\partial \phi}{\partial z} f_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x} f_3, \frac{\partial \phi}{\partial x} f_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_1 \right) + \left(\phi \frac{\partial f_3}{\partial y} - \phi \frac{\partial f_2}{\partial z}, \phi \frac{\partial f_1}{\partial z} - \phi \frac{\partial f_3}{\partial x}, \phi \frac{\partial f_2}{\partial x} - \phi \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} f_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} f_2, \frac{\partial \phi}{\partial z} f_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x} f_3, \frac{\partial \phi}{\partial x} f_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_1 \right) + \phi \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \nabla \phi \times \vec{f} + \phi (\nabla \times \vec{f}) \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que en cualquier superficie Σ cerrada, seccionalmente regular que esté contenida en un conjunto simplemente conexo $E \subset \mathbb{R}^3$, y en donde se define un campo vectorial $\vec{f}$ de clase $C^1(E)$ se cumple que:

$$\oiint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$$

Sol: Resulta simple observar que la integral del ejercicio tiene la forma del Teorema de Stokes, pero nos enfrentamos a un problema: ¿Cuál es la frontera de una superficie cerrada?. La respuesta es que no tiene, por ende no tenemos una curva para poder calcular su parametrización, entonces ¿Qué hacemos?.

El leer nuevamente el enunciado se nos dice que la superficie es seccionalmente regular, así que de esta forma seccionaremos la superficie original en dos superficies, las cuales tienen como fronteras la misma curva. Entonces tenemos:

$$\oiint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma = \oiint_{\Sigma_1} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma + \oiint_{\Sigma_2} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma$$

aplicamos Stokes...

$$= \oint_{\partial \Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{dr} + \oint_{\partial \Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

Pero recordamos que si bien la frontera es la misma, cuando se trata de darle el sentido a las fronteras de las distintas superficies, estas deben ser inversas, y por ende las parametrizaciones de la misma curva tienen distinto sentido, y como sabemos, cuando se invierte el sentido de una curva en una integral de línea, lo único que cambia es el signo de la integral de línea, por ende:

$$\oint_{\partial \Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{dr} + \oint_{\partial \Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{dr} = \oint_{\partial \Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{dr} - \oint_{\partial \Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$$

En general existen muchas igualdades respecto a esta área del cálculo, así que probaremos una de ellas.

Sea ϕ un campo escalar. Probar que:

$$\iiint_R \nabla \phi dV = \oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} d\Sigma$$

Sol: El tipo de igualdad se parece a el Teorema de Gauss, pero hay una complicación, ya que el Teorema de Gauss tiene un campo escalar dentro de la igualdad, y de hecho resulta esencial, ya que ¿Cuál sería la divergencia de un campo escalar?. Frente a esta complicación debemos “parchar” nuestro problema, y lograr “transformar” de alguna forma un campo escalar a uno vectorial. ¿Alguna idea?

La forma de pensar frente a esta situación es de qué forma logro transformar el campo escalar al vectorial sin que al momento de calcular la divergencia queden términos que no me ayuden para continuar con la igualdad. Bajo ese aspecto, ocupamos un pequeño “truco” ya utilizado anteriormente de multiplicar una de las integrales por un vector constante $\vec{k}$, de esta forma se obtiene:

$$\left(\oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} d\Sigma \right) \bullet \vec{k} = \oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} \bullet \vec{k} d\Sigma$$

obs: demostramos en una auxiliar anterior que el producto punto de un vector constante con una integral podía ingresar dentro de esta.

Entonces...

$$\left(\oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} d\Sigma \right) \bullet \vec{k} = \oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} \bullet \vec{k} d\Sigma = \oiint_{\Sigma} \phi \vec{k} \bullet \hat{n} d\Sigma$$

y ahora si notamos que $\phi \vec{k}$ es un campo vectorial, y lo denominamos $\vec{f}$, es fácil ver que podemos aplicar el Teorema de la Divergencia. Así que:

$$\oiint_{\Sigma} \phi \vec{k} \bullet \hat{n} d\Sigma = \iiint_R \text{div}(\phi \vec{k}) dV$$

pero (ver primera página por la identidad)

$$\text{div}(\phi \vec{k}) = \phi \text{div}(\vec{k}) + \nabla \phi \bullet \vec{k} = \nabla \phi \bullet \vec{k} \quad \text{ya que} \quad \text{div}(\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \phi \vec{k} \bullet \hat{n} d\Sigma = \iiint_R \text{div}(\phi \vec{k}) dV = \iiint_R \nabla \phi \bullet \vec{k} dV = \left(\iiint_R \nabla \phi dV \right) \bullet \vec{k}$$

Como el producto punto con el vector constante está en ambos lados de la igualdad, implica que lo que lo acompaña es idéntico, es decir:

$$\Rightarrow \iiint_R \nabla \phi dV = \oiint_{\Sigma} \phi \hat{n} d\Sigma$$

El siguiente ejercicio, consta de verificar el Teorema de Stokes para el campo vectorial definido por $f(x, y, z) = (xy, z^3, x^3)$ si Σ es la superficie definida por las ecuaciones:
 $x^2 + y^2 = 9 \quad 0 \leq z \leq 2 \quad 0 \leq x \quad 0 \leq y$

Sol: Es fácil notar que la superficie se trata de un cuarto de cilindro de radio 3, centrado en el origen, de altura 2, ubicado en el primer octante. (si no lo cree, dibújelo).

Tenemos que verificar Stokes, quien nos dice:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

para verificarlo, resolveremos la primera integral, y luego la segunda y veremos si llegamos a resultados idénticos.

$rot(\vec{f}) = (-3z^2, -3x^2, -x)$, entonces:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} = \iiint_{\Sigma} rot(\vec{f}) \cdot \hat{n} d\Sigma = \iiint_{\Sigma} (-3z^2, -3x^2, -x) \cdot \hat{n} d\Sigma$$

pero ¿quién es $\hat{n}$ en coordenadas cartesianas?

Notamos primero que no tiene valor en el eje z, y que además se dirige en forma radial al punto, por ende:

$$\hat{n} = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{3}(x, y, 0)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} &= \iint_{\Sigma} (-3z^2, -3x^2, -x) \cdot \hat{n} d\Sigma \\ &= \iint_{\Sigma} (-3z^2, -3x^2, -x) \cdot \frac{1}{3}(x, y, 0) d\Sigma \\ &= \iint_{\Sigma} (-z^2 x - x^2 y) d\Sigma \end{aligned}$$

Ahora, por resultar más cómodo, cambiaremos a coordenadas cilíndricas, en donde:

$$x = R \cos(\phi) = 3 \cos(\phi)$$

$$y = R \sin(\phi) = 3 \sin(\phi)$$

$$z = z$$

$$d\Sigma = R d\phi dz = 3 d\phi dz$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{d\Sigma} &= \iint_{\Sigma} (-z^2 x - x^2 y) d\Sigma \\
&= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} (-z^2 3 \cos(\phi) - 9 \cos^2(\phi) 3 \sin(\phi)) 3 d\phi dz \\
&= -9 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} z^2 \cos(\phi) d\phi dz - 81 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\phi dz \\
&= -9 \left(\frac{z^3}{3} \right)_0^2 (\sin(\phi))_0^{\pi/2} - 81 (z)_0^2 \left(-\frac{\cos^3(\phi)}{3} \right)_0^{\pi/2} \\
&= -9 \left(\frac{8}{3} \right) (1) - 81 (2) \left(-\frac{1}{3} \right) = -78
\end{aligned}$$

Veamos ahora la otra integral:

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

de partida la frontera de Σ es una curva seccionalmente regular, compuesta de 4 curvas regulares, cuyas respectivas parametrizaciones son: (haga el dibujo para darse cuenta de esto)

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_1(t) &= (3 \sin(t), 3 \cos(t), 2) & t \in [0, \pi/2] \\
\vec{\gamma}_2(t) &= (3, 0, 2-t) & t \in [0, 2] \\
\vec{\gamma}_3(t) &= (3 \cos(t), 3 \sin(t), 0) & t \in [0, \pi/2] \\
\vec{\gamma}_4(t) &= (0, 3, t) & t \in [0, 2]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_1'(t) &= (3 \cos(t), -3 \sin(t), 0) & t \in [0, \pi/2] \\
\vec{\gamma}_2'(t) &= (0, 0, -1) & t \in [0, 2] \\
\vec{\gamma}_3'(t) &= (-3 \sin(t), 3 \cos(t), 0) & t \in [0, \pi/2] \\
\vec{\gamma}_4'(t) &= (0, 0, 1) & t \in [0, 2]
\end{aligned}$$

Así que ya tenemos casi todos los datos necesarios, faltaría evaluar las distintas parametrizaciones en el campo vectorial, lo que queda de la forma:

$$f(\vec{\gamma}_1) = (9\text{sen}(t)\cos(t), 8, 27\text{sen}^3(t))$$

$$f(\vec{\gamma}_2) = (0, (2-t)^3, 27)$$

$$f(\vec{\gamma}_3) = (9\text{sen}(t)\cos(t), 0, 27\cos^3(t))$$

$$f(\vec{\gamma}_4) = (0, t^3, 0)$$

así que:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} f(\vec{\gamma}_1) \cdot \vec{\gamma}_1'(t) dt + \int_0^2 f(\vec{\gamma}_2) \cdot \vec{\gamma}_2'(t) dt + \int_0^{\pi/2} f(\vec{\gamma}_3) \cdot \vec{\gamma}_3'(t) dt + \int_0^2 f(\vec{\gamma}_4) \cdot \vec{\gamma}_4'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (9\text{sen}(t)\cos(t), 8, 27\text{sen}^3(t)) \cdot (3\cos(t), -3\text{sen}(t), 0) dt + \int_0^2 (0, (2-t)^3, 27) \cdot (0, 0, -1) dt \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} (9\text{sen}(t)\cos(t), 0, 27\cos^3(t)) \cdot (-3\text{sen}(t), 3\cos(t), 0) dt + \int_0^2 (0, t^3, 0) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (27\text{sen}(t)\cos^2(t) - 27\text{sen}^2(t)\cos(t) - 24\cos(t)) dt - \int_0^2 27 dt \\ &= \left[27 \left(-\frac{\cos^3(t)}{3} - \frac{\text{sen}^3(t)}{3} \right) - 24\text{sen}(t) \right]_0^{\pi/2} - 27(t)_0^2 \\ &= -\frac{27}{3} + \frac{27}{3} - 24 - 54 = -78 \end{aligned}$$

Por ende se verifica el Teorema de Stokes en este caso.

El último ejercicio se trata de un campo escalar ϕ que tiene la propiedad de que $\|\nabla \phi\|^2 = 4$ y $\text{div}(\phi \nabla \phi) = 10\phi$. Calcular la integral de superficie $\oiint_{\Sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Sigma$, donde Σ es la superficie de la esfera unitaria con centro en el origen y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ es la derivada direccional del campo escalar ϕ en la dirección y sentido de $\hat{n}$.

Sol: La última línea nos dice que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \nabla \phi \cdot \hat{n} \\ \Rightarrow \oiint_{\Sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Sigma &= \oiint_{\Sigma} \nabla \phi \cdot \hat{n} d\Sigma \end{aligned}$$

Ahora queda más evidente observar que podemos ocupar el Teorema de Gauss para resolver todo de forma más fácil.

$$\oiint_{\Sigma} \nabla \phi \bullet \hat{n} d\Sigma = \iiint_R \operatorname{div}(\nabla \phi) dV$$

El problema es que no conocemos el campo escalar, y por ende desconocemos su divergencia, así que ocupamos el resto de información que nos da el enunciado.

(ver primera página por la identidad)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) &= \phi \operatorname{div}(\nabla \phi) + \nabla \phi \bullet \nabla \phi \\ &= \phi \operatorname{div}(\nabla \phi) + \|\nabla \phi\|^2 \\ &= \phi \operatorname{div}(\nabla \phi) + 4\phi \\ \Rightarrow \phi \operatorname{div}(\nabla \phi) + 4\phi &= 10\phi = \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) \end{aligned}$$

Asumiendo que ϕ no es nulo en todos los puntos, podemos dividir por el campo y hacer álgebra y llegar a:

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla \phi) = 6$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \nabla \phi \bullet \hat{n} d\Sigma = \iiint_R \operatorname{div}(\nabla \phi) dV = 6 \iiint_R dV$$

pero al tratarse de la esfera unitaria, el volumen de esta es $\frac{4}{3}\pi$, así que todo queda:

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \nabla \phi \bullet \hat{n} d\Sigma = 6 \iiint_R dV = 8\pi$$