Problemas Propuestos Nº3: Superficies y Áreas
MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez

Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

14 de Agosto de 2007

Problema 1.- Considere la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esferico unitario que estan por encima del plano $z = 2y$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$

(i) Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.

(ii) Parametrice el borde geometrico ∂S de S, y las siguientes rectas tangentes a ∂S: la que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y la que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$

(iii) *(Aunque se requieren conocimientos de flujo, podrian tratar de hacerla)* Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)\hat{\imath} + (e^{-x^2} - 2)\hat{\jmath} + (2e^{-x^2} + 1)\hat{k}$$

Sobre la superficie S orientada con la normal exterior a la esfera.

Problema 2.- Sea S la superficie dada por el grafo de la función $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, demuestre la siguiente formula para la integral de f sobre S:

$$\int\int_S f \; dS = \int\int_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{cos(\theta)} dxdy$$

Donde $\theta = \theta(x, y, z)$ es el angulo formado por la normal a la superficie con el vector unitario $\hat{k} = (0, 0, 1)$ en el punto $(x, y, g(x, y))$

Problema 3.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Parametrice la superficie generada al rotar el grafo de f alrededor del eje OX. Demuestre que su área es igual a

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

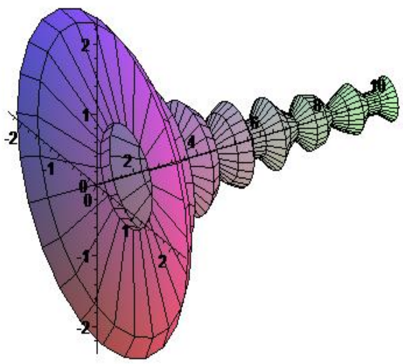

Figura 1: Función $\frac{1}{z}(\cos(5x) + 2)$ revolucionada