Pauta P1-C2

Profesor: Felipe Álvarez
por Emilio Vilches.

24 de octubre de 2007

(a) Dado que $u(x, y)$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$, existe $v(x, y)$ tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y ademas u y v satisfacen la condiciones de Cauchy-Riemann ;

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$; $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ y $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$
luego

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1$$

imponiendo (1)

$$v_y = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1$$

integrando parcialmente esto, se obtiene

$$v = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + C(x)$$

donde $C(x)$ es una constante de integracion que depende de x. Derivando lo anterior con respecto a x tenemos

$$v_x = \frac{-2y}{x^2 + y^2} + C'(x)$$

volviendo a imponer (1)

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2 = -v_x = -\left(\frac{-2y}{x^2 + y^2} + C'(x)\right)$$

luego

$$C'(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = 2x + k$$

por lo tanto

$$v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + 2x + k$$

imponiendo que

$$f(1) = 1 - i$$

se encuentra finalmente que

$$v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + 2x - 3$$

(b) Revisar propiedades del Logartimo complejo en la pagina 98 del apunte. Para mayor claridad notaremos *Log* para el logaritmo complejo y log para el logaritmo real.

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, bajo estas condiciones z se puede escribir en su forma polar $z = re^{i\theta}$, para algún $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, con esto $Log(z) = \log(r) + i\theta$

(i) Sea $k \in \mathbb{Z}$ luego

$$\begin{aligned} p^k(z) &= exp(kLog(z)) = exp(k(\log(r) + i\theta)) \\ &= exp(\log(r^k) + ik\theta) = exp(\log(z^k)) = z^k \end{aligned}$$

pues si $z = re^{i\theta}$ entonces $z^k = r^k e^{ik\theta}$.

Ahora mostremos que

$$\overline{p^\lambda(\bar{z})} = p^{\bar{\lambda}}(z)$$

Sea $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, notemos que si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ y por lo tanto $Log(\bar{z}) = \log(r) - i\theta$, luego

$$\begin{aligned} \overline{p^\lambda(\bar{z})} &= \overline{exp(\lambda Log(\bar{z}))} = \overline{exp((\lambda_1 + i\lambda_2)(\log(r) - i\theta))} \\ &= \overline{exp((\lambda_1 \log(r) + \lambda_2\theta) + i(-\lambda_2 \log(r) + \lambda_1\theta))} = \overline{exp(\lambda_1 \log(r) + \lambda_2\theta)\, exp(i(-\lambda_2 \log(r) + \lambda_1\theta))} \\ &= exp(\lambda_1 \log(r) + \lambda_2\theta)\, \overline{exp(i(-\lambda_2 \log(r) + \lambda_1\theta))} = exp(\lambda_1 \log(r) + \lambda_2\theta)\, exp(-i(-\lambda_2 \log(r) + \lambda_1\theta)) \\ &= exp((\lambda_1 - i\lambda_2)\log(r) + i(\lambda_1 - i\lambda_2)\theta) = exp(\bar{\lambda}(\log(r) + i\theta) = exp\left(\bar{\lambda} Log(z)\right) = p^{\bar{\lambda}}(z) \end{aligned}$$

(ii) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ y $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ entonces

$$\begin{aligned} p^{\lambda+\mu}(z) &= exp((\lambda + \mu) Log(z)) = exp(\lambda Log(z) + \mu Log(z)) \\ &= exp(\lambda Log(z))\, exp(\mu Log(z)) = p^\lambda(z)\, p^\mu(z) \end{aligned}$$

El dominio donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa esta dado por el dominio donde $Log(z)$ es holomorfa, pues $p^\lambda(z)$ es una composición de $exp(z)$(holomorfa en todo $\mathbb{C}$) y $Log(z)$ (holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$) , luego $p^\lambda(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ entonces

$$\begin{aligned} \left(p^\lambda(z)\right)' &= (exp(\lambda Log(z)))' \\ &= exp(\lambda Log(z))\, \lambda z^{-1} = exp(\lambda Log(z))\, \lambda exp(-Log(z)) \\ &= \lambda exp((\lambda - 1) Log(z)) = \lambda p^{\lambda-1}(z) \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $exp(Log(z)) = z$.

(iii) Sea $t > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha t^{i\beta} = t^\alpha exp(i\beta Log(t)) = t^\alpha exp(i\beta \log(t)) = t^\alpha (cos(\beta \log(t)) + i\sin(\beta \log(t)))$$

y

$$i^i = exp(iLog(i)) = exp\left(i\left(log(1) + i\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$