Pauta P1-C3-MA26B

Profesor: Felipe Álvarez
por Emilio Vilches.

17 de noviembre de 2007

Problema 1.

Encuentre una solución $u = u(t,x)$ de la ecuación:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad t > 0, \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

bajo las condiciones:

$$\begin{array}{lc} u(t,0) = u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1/2 \\ 1-x & 1/2 < x < 1 \end{cases} & \\ u_t(0,x) = 3\sin(2\pi x) & 0 < x < 1 \end{array}$$

Solución.

hacemos separación de variables

$$u(t,x) = \phi(x)\psi(t)$$

imponiendo (1)

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda$$

luego

$$\phi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$
$$\psi(t) = ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}$$

[0.5 ptos.]

- imponemos la primera condición de borde

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad t > 0$$

$u(t,0) = 0$:

$$u(t,0) = (A+B)\left(ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}\right) = 0 \tag{2}$$

de donde

$$A = -B$$

$u(t,1)=0$:

$$u(t,0)=\left(Ae^{\sqrt{\lambda}}-Ae^{-\sqrt{\lambda}}\right)\left(ae^{\sqrt{\lambda}t}+be^{-\sqrt{\lambda}t}\right)=0$$

de donde

$$A\left(e^{\sqrt{\lambda}}-e^{-\sqrt{\lambda}}\right)=0$$

[1 ptos.]

de acá notamos que si $\lambda \geq 0$ hay solo soluciones triviales ($A=0$) así que supondremos que $\lambda < 0$. [0.5 ptos.]

supongamos que

$$\lambda=-k^2$$

la condición (2) queda como

$$\sin(k)=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=n\pi \quad n\in\mathbb{N}$$

luego

$$u_n(t,x)=A\left(e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}\right)\left(a_ne^{in\pi t}+b_ne^{-in\pi t}\right)=\left(A_ne^{in\pi t}+B_ne^{-in\pi t}\right)\sin(n\pi x)$$

[0.5 ptos.]

entonces

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(A_ne^{in\pi t}+B_ne^{-in\pi t}\right)\sin(n\pi x)\right)$$

[0.5 ptos.]

ahora notamos que

$$A_ne^{in\pi t}+B_ne^{-in\pi t}=C_n\sin(n\pi t)+D_n\cos(n\pi t)$$

con esto

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(C_n\sin(n\pi t)+D_n\cos(n\pi t)\right)\sin(n\pi x)\right)$$

- imponemos la tercera condición

$u_t(0,x)=3\sin(2\pi x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(C_n\cos(n\pi 0)-D_n\sin(n\pi 0)\right)n\pi\sin(n\pi x)\right)=3\sin(2\pi x)$$

esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nn\pi\sin(n\pi x)\right)=3\sin(2\pi x)$$

multiplicamos por $\sin(m\pi x)$, integramos entre $[-1,1]$ para obtener

$$C_n=\begin{cases} 0 & n\neq 2 \\ \frac{3}{2\pi} & n=2 \end{cases}$$

[1.5 ptos.]

- ahora para imponer la segunda condición de borde, debemos hacer una extensión impar de la función $f(x)$:

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} x & -1/2<x\leq 1/2 \\ 1-x & 1/2<x\leq 1 \\ -x-1 & -1<x\leq -1/2 \end{cases}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \sin\left(n\pi x\right)\right) = \hat{f}\left(x\right)$$

multiplicando por $\sin\left(m\pi x\right)$ e integrando entre $[-1, 1]$

$$D_n = \int_{-1}^{1} \hat{f}\left(x\right) \sin\left(n\pi x\right) dx = 2 \int_{0}^{1} f\left(x\right) \sin\left(n\pi x\right) dx$$

de donde

$$D_n = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(n\pi\right)^2}$$

[1.5 ptos.]

luego

$$u\left(t, x\right) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(C_n \sin\left(n\pi t\right) + D_n \cos\left(n\pi t\right)\right) \sin\left(n\pi x\right)\right)$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ \frac{3}{2\pi} & n = 2 \end{cases}$$

$$D_n = \tfrac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(n\pi\right)^2}$$